



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1:4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0.5y) + \log_{0.5y} 11 = \log_{0.125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-15; 90)$, $Q(2; 90)$ и $R(17; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Произведение чисел $a^b \cdot b^c \cdot c^a$ час ровно:

$(abc)^2 = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$ и это можно сделать
на произведение надо, но что делится
число $ab \cdot bc \cdot ca$.

$$(abc)^2 : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot 2^4 \cdot 3^{25} \cdot 5^{23} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Тогда $\min(a^b) = 2^3 \cdot 3^{53} \cdot 5^{52}$, то b в квадратах
степени всех полупростых чисел степени
простых множителей однозначно ~~записаны~~,
значит b в $(abc)^2$ не может входить ~~3~~, то $b=4$.
она делится на него поделилась 3 в нем
как минимально в 60 степеней ~~записаны~~
 $\min(a^b) = 2^3 \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, а $\min(b^c) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Доказано, что делится, при $a=2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^8$

~~то~~ $a=2^3 \cdot 3^{18} \cdot 5^{16}$ значит b

если $a=bc$ то все входящие в a числа должны быть в b степени

т.е. $\min(a^b) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, воссчитавшее при

$$a=2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^8$$

$$b=2^2 \cdot 3^5$$

$$c=2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение по теореме Пифагора в $\triangle ACD$:

$$(2x)^2 + (\sqrt{10}x - \sqrt{14}t)^2 = (\sqrt{14}x - 7t)^2$$

t выражаем через x , она неизвестна
и все находится

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

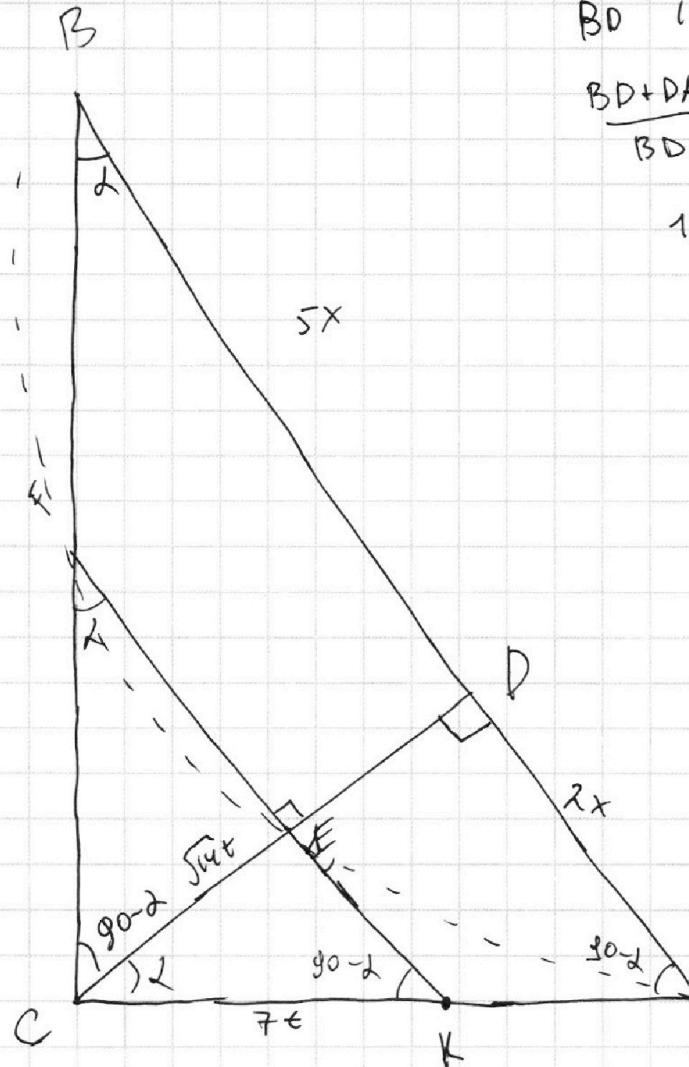
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{BD+DA}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$1 + \frac{DA}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{DA}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$DA = 2x$$

$$BD = 5x$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow CD \perp EF$$

$$CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10} x$$

$$\begin{aligned} S_{ACD} &= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10} x^2 \\ &= \sqrt{10} x^3 \end{aligned}$$

Продолжим FE до пересечения с AC, получим
но теореме о касательной и секущей:

$AK^2 = KE \cdot KF$ поделим эти равенства:

$$CE^2 = KE \cdot EF \text{ (из пропорциональности } \triangle CKF \text{ и } \triangle FKE)$$

$$\frac{AK^2}{CE^2} = \frac{KF}{EF} = \frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \quad (\text{т.к. } \triangle ABC \sim \triangle FK) \quad (FK \parallel AB)$$

$$AC^2 = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14} x, \quad \frac{CK}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{\sqrt{14}} \\ CK = 7x, \quad CE = \sqrt{14} x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

анкос $\frac{y}{x}$ (4) учитывает значения от 0 до π , следовательно $10 \arccos(\sin x)$ учитывает значения от 0 до 10π . Значит и простые часы должны быть открыты с 0 до 10π :

$$0 \leq 8\pi - 2x \leq 10\pi ; \quad -8\pi \leq -2x \leq 0 ; \quad 4,5\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{2}.$$

также имеем $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ преобразуем уравнение:

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 8\pi - 2x ; \quad 5\pi - \cancel{10\arcsin(\sin x)} = 8\pi - 2x$$

$$10\arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

$$1) x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = x ;$$

$$10x = 2x - 4\pi$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{4\pi}{8} \checkmark$$

$$2) x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

$$10(\pi - x) = 2x - 4\pi$$

$$10\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \checkmark$$

$$3) x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] ; \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = \cancel{x} - 2\pi$$

$$10(x - 2\pi) = 2x - 4\pi$$

$$8x = 16\pi$$

$$x = 2\pi \checkmark$$

$$4) x \in \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right) ; \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = 3\pi - x$$

$$10(3\pi - x) = 2x - 4\pi \quad 5) x \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right], \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = x - 4\pi$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6} \checkmark$$

$$10(x - 4\pi) = 2x - 4\pi \quad x = \frac{8\pi}{2} \checkmark$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{8\pi}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предложение №4 (2)

Решее ур-ие задаем прямую, которая может
иметь с окружностью максимум 2 точки
пересечения. Значит прямая должна пересечь
эту окружность. Рассмотрим 1 ур-ие:

$$6\alpha y = b - 5x$$

Вертикальная

при $\alpha = 0$ ур-ие задаем горизонтальную прямую
которая ~~не~~ может пересечь ~~округ~~ ~~беск~~
окружностью! при $\alpha \neq 0$, например $\alpha = 1$:

$y = -\frac{5}{6\alpha}x + \frac{b}{6\alpha}$. Для всех α , при которых
~~прямая~~ не существует b , при которых
прямая лежит между ~~одной~~ из касательных
 $*1$, $*2$ или прямой между окружностями, т.е.
имеющих общих точек, ~~прямая~~ b , что
прямая пересечет еще окружности. Найдем
точку с ртно прямой $y = cx + d$ ~~внеш~~ касательной
к обеим окружностям

$$x^2 + (cx + d)^2 = 25$$

одинаково меньше 1 решения

$$x^2 + c^2x^2 + 2cx + d^2 = 25$$

$$(c^2 + 1)x^2 + 2cx + d^2 - 25 = 0$$

$$\Delta_1 = 4c^2 - (c^2 + 1)(d^2 - 25) = 0$$

$$x^2 + (cx + d + 5)^2 = 4$$

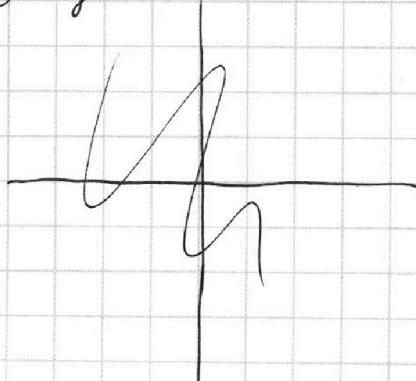
одинаково меньше 1 решения

$$x^2 + c^2x^2 + d^2 + 10cx + 2cd + 25 = 4$$

$$(c^2 + 1)x^2 + 10cx + d^2 + 2cd + 21 = 0$$

$$(c^2 + 1)x^2 + (2cd + 10c)x + d^2 + 2cd + 21 = 0$$

Найдем значение c ~~геометрически~~:



Ан. А. Мирон

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N₄ (1)

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

↑

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 25 \quad (2) \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

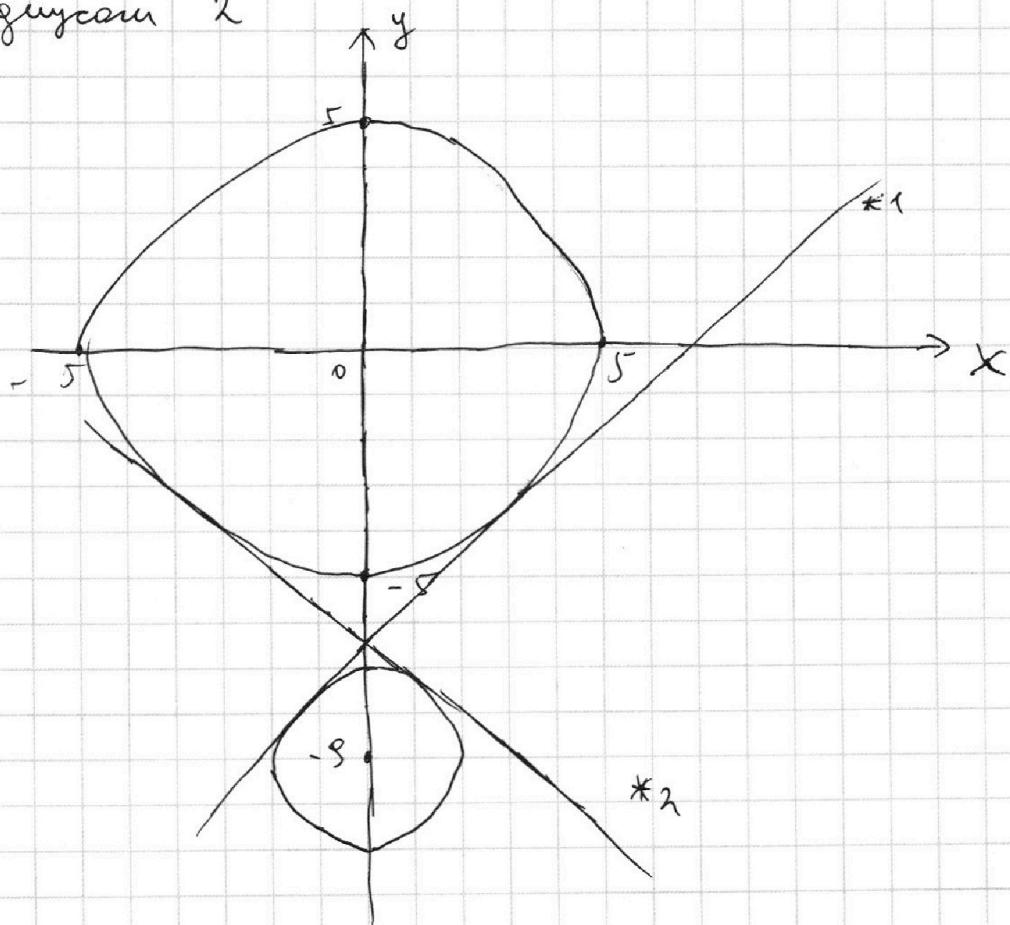
$$(3): x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 81 = 4$$

$$x^2 + (y + 9)^2 = 4$$

(2) - окружность с центром в точке $(0; 0)$ и
радиусом 5

(3) - окружность с центром в точке $(0; -9)$ и
радиусом 2



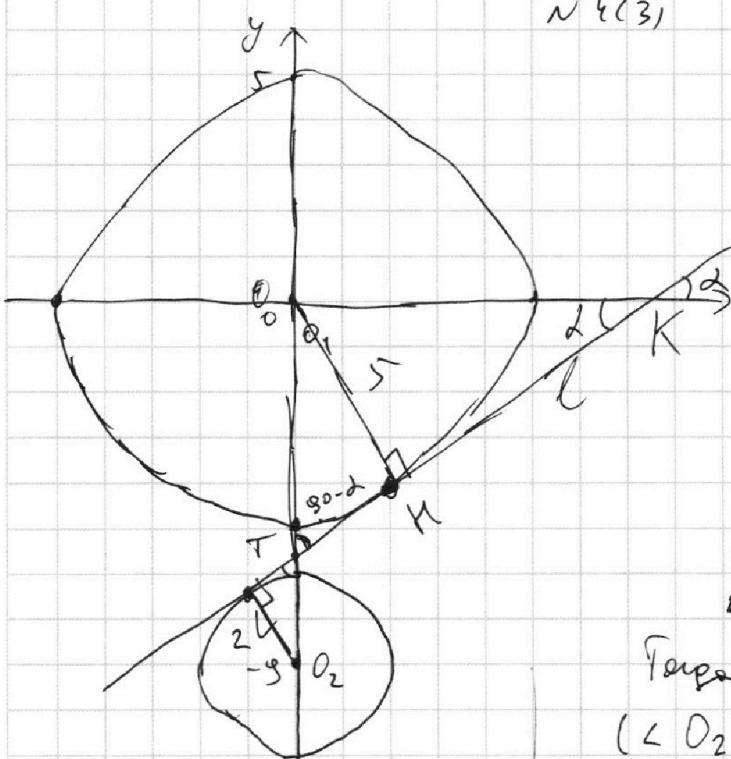
На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 4(3)

l - общая касательная.

l и K - точки касания

Через 1 окружность O_1 ,
2 окружности O_2

$$O_2 l \perp l, O_1 K \perp l$$

$$\Downarrow \\ O_2 l \perp O_1 K$$

Рассмотрим тангенс углов

$K \cdot l$ в основе $\kappa = T$

Тогда $\Delta O_2 LT \sim \Delta O_1 TH$

($\angle O_2 LT = 80^\circ$, $\angle THO_1 = 80^\circ$,
 $\angle LTO_2 \cong \angle O_1 TH$ (внешние углы))

$O_1 O_2 = 8$, Рассмотрим $O_1 T = x$, Тогда
 $O_2 T = 8 - x$. Но $O_2 T = 2$
(задание)

Но получаем:

$$O_1 H = 5 \text{ (задание)}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{8-x}; -5x + 45 = 2x \\ x = \frac{45}{7}$$

$$\tan \angle = c, \text{тогда } \angle O_1 KT = \\ = d \text{ (верт.)}, \angle O_1 TH = \\ = 80 - 2$$

$$\tan \angle = c \tan(80 - 2), \text{зная} \\ \text{изменение } \operatorname{ctg}(O_1 + K)$$

Из теоремы Пифагора по $\triangle O_1 TH$:

$$TH^2 = O_1 T^2 - OH^2 = \frac{45^2}{48} - 25^2 = \frac{45^2 - 25 \cdot 48}{48} = \frac{25 \cdot 81 - 25 \cdot 48}{48} = \frac{25 \cdot 32}{48}$$

$$TH = \frac{\sqrt{20 \cdot 32}}{7}, \operatorname{ctg} \angle O_1 TH = \frac{\sqrt{20 \cdot 32}}{7} : 5 = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Аналогичные выводы делаются
для другой стороны $\triangle O_1 TH$, в силу симметрии

точка K является центром симметрии
окружности O_2 , при этом $\angle K$ имеет значение $- \frac{4\sqrt{2}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

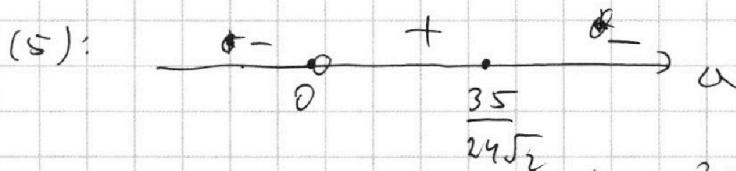
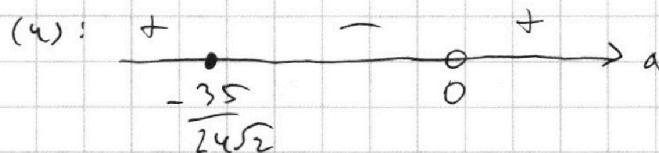
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4(4)

Задача как подходит все ~~кроме~~ a ,

кроме $-\frac{4\sqrt{2}}{7} \leq -\frac{5}{6a} \leq \frac{4\sqrt{2}}{7}$; $-4\sqrt{2} \leq -\frac{35}{6a} \leq 4\sqrt{2}$

$$\begin{cases} -\frac{35}{a} \leq 4\sqrt{2} \\ -\frac{35}{a} \geq -24\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{35}{a} \geq -24\sqrt{2} ; \frac{35+24\sqrt{2}a}{a} \geq 0 \text{ (4)} \\ \frac{35}{a} \leq 24\sqrt{2} ; \frac{35-24\sqrt{2}a}{a} \leq 0 \text{ (5)} \end{cases}$$



Другое решение: $\left[0; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right]$, то есть $a > 0$ подходит
Что, так, подходит все кроме этого то есть

Объяснение: $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty\right)$

Общее решение: $(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}] \cup [\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$

Подходит все кроме этого ~~кроме~~.

Ответ: ~~$(-\frac{35}{24\sqrt{2}}, 0) \cup (0, \frac{35}{24\sqrt{2}})$~~ .

$$\left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N512)

Значит возможны только $xt=1$, т.е. $xg=2$

Неправильно видеть, что при $xt=1$ ~~но~~, $t_0 = \frac{1}{x}$

(2) преобразуется ~~как~~ $\log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{16}{3} \log_{11}(11) - 5$;

$$\log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{16}{3} \log_{11}(11) - 5$$

$$\text{при этом (1)} \rightarrow \log_{11}^4(x) = \frac{16}{3} \log_{11}(11) - 5$$

т.е. $\log_{11}(x) = \log_{11}\left(\frac{1}{x}\right)$, откуда

$\log_{11} x = \log_{11}\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow$ имеем только решение $x=\pm 1$,
которые не годятся.

$\log_{11} x = -\log_{11}\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \log_{11} x = \log_{11} x$ верно

~~но~~ при любых $x > 0$, ~~но~~.

Значит xt действительное можно дальше
равно 1 и никаку больше

Ответ: 2

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Первое равенство: $\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} 11 = \frac{1}{3} \log_x \left(\frac{11^{11}}{11}\right) - 5$

$$\log_{11}^4 x = 6 \log_{11} 11 - \frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5 \quad (1)$$

Второе равенство ($0,5y=t$): $\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \log_t 3 (11^{13})$

Уз (1): левая часть > 0 (≥ 0 при $x=1$, но при $x=1$ $\log_{11} x$ не определен) $\log_{11}^4 t = -\frac{13}{3} \log_t 11 - \log_t 11 - 5$

Уз (2): левая часть > 0 (≥ 0 при $t=1$, но при $t=1$ $\log_{11} t$ не определен). Тогда правая часть тоже > 0 , тогда $-\frac{16}{3} \log_t 11 > 0$ $\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5 \quad (2)$

Тогда правая часть должна быть больше нуля
Тогда $\log_x 11$ обязательно > 0

Уз (2): левая часть > 0 (≥ 0 при $t=1$, но при $t=1$ $\log_{11} t$ не определен). Тогда правая часть тоже > 0 , тогда $-\frac{16}{3} \log_t 11 > 0$

С решением заменим $a = \log_{11} x > 0$
 $b = \log_{11} t < 0$

и вычтем из (1) (2), получим:

$$a^4 - b^4 = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = \frac{16}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = \frac{16(a+b)}{3ab}$$

$$1) a+b=0 ; a=-b ; \log_{11} x + \log_{11} t = 0 \Rightarrow \log_{11}(xt)=0, xt=1$$

$$2) a+b \neq 0. (a-b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3ab} \text{ правая часть } < 0$$

т.к. a и b разных знаков
При этом $a-b>0$, т.к. $a>0$
 $b<0$, $a^2 + b^2$ положение > 0 , значит
нашее равенство неверно



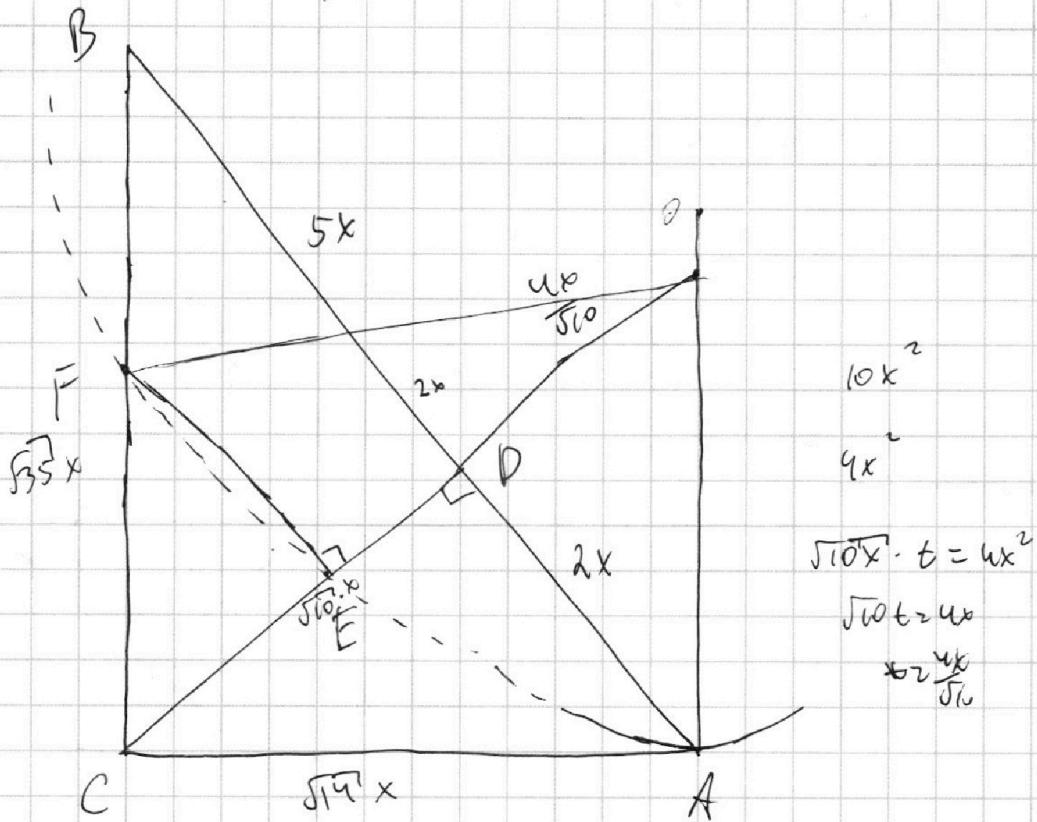
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 82



$$-\frac{2}{3} + 6 = \frac{10}{3} \Rightarrow \log_{11} t + \log_t 11 = \frac{1}{3} \log_t (11^{13}) - 5$$

$$\log_4 t + \log_{t+4} 11 = -\frac{13}{3} \log_t 11 - 5$$

$$\log_{11} x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5 \quad \log_{11} t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5$$

$$\log_{10} x + \log_{10} t = -10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11} x - 6 \log_{x} 11 = \frac{1}{3} \log \frac{1}{11} - 5$$

$$\log_{11} x = -\frac{2}{3} \log_x 11 + 6 \log_{x+11} 11 - 5$$

$$\log_{11} x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} t + \log_t 11 =$$

$$-\frac{13}{3} - 5$$

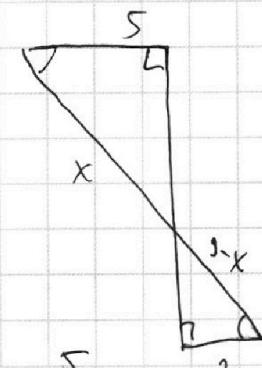
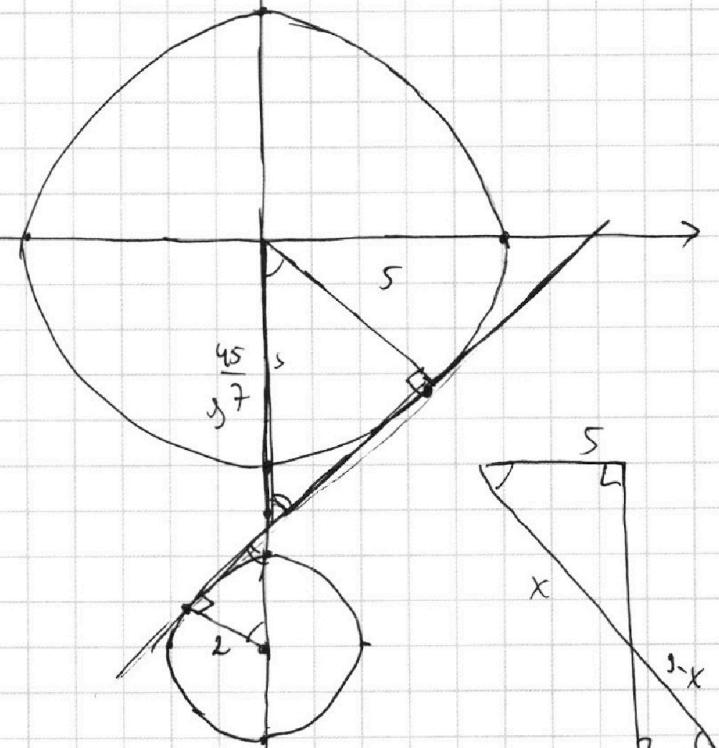
(~~0,5y~~)

$$(0,5y)^3$$

1

$$0,125^2 \cdot \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$(0,5y)^3$$



$$\frac{x}{3-x} = \frac{5}{2}$$

$$2k = -5x + 45$$

$$7k = 45$$

$$x = \frac{45}{7}$$

$$45 - 45 = 5 \cdot 8 \cdot 5 - 45 = 25 - 81$$

$$\frac{45}{7}^2$$

$$y = x - \frac{45}{7}$$

$$\frac{60}{32}$$

$$x^2 + \left(x - \frac{45}{7}\right)^2 =$$

$$\frac{45}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - \log_{11} t = \frac{16}{3} (\log_x 11 + \log_t 11) = \frac{16}{3} \left(\frac{\log_{11} x + \log_{11} t}{\log_{11} x \cdot \log_{11} t} \right)$$

$$a^4 - b^4 = \frac{16}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3} \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$\log_{11} x + \log_{11} t = 0$$

$$(a-b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3ab}$$

$$\log_{11}(x \cdot t) = 0$$

$$x \cdot t = 1$$

$$\frac{xy}{c} = 1$$

$$y = 2$$

$$\log_{11} x = \frac{16}{3} - 5 \log_{11} x$$

$$3 \log_{11} x + 15 \log_{11} x - \frac{16}{3} = 0$$

$$45t^4 + 15t^2 - 16 = 0$$

$$3(15t^4 + 5t^2 - \frac{16}{3}) = 0$$

$$3t^2 + 5t^2 - \frac{16}{3} = 0$$

$$t^2 = \frac{16}{24}$$

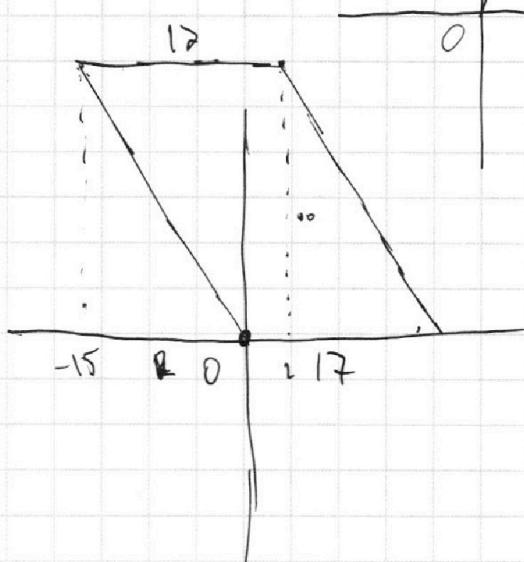
$$12$$

$$0$$

$$-15 \leq x_2 \leq 17$$

$$-15 \leq x_1 \leq 17$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 80$$



$$(2, 80)$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 80$$



$$(2, 80)$$

$$-15 \leq x_2 \leq 17$$

$$-15 \leq x_1 \leq 17$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 80$$

На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_{11}^4 x = -\frac{16}{3} \log_x 11 - 5 \quad x > ? \quad t = 0,5x \quad \log_x 11 > 0$$

$$2) \log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5 \quad t < 1 \quad x > 1 \quad x < 1 \\ t > 0 \quad t < 1 \quad \log_t 11 < 0$$

$$\alpha - b = \frac{16}{3} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} \right) \quad x > 1 \quad x < 1 \\ \alpha > 0 \quad b < 0 \quad x = \frac{1}{t}$$

$$(\alpha - b)(\alpha + b)(\alpha^2 + b^2) = \frac{16(\alpha + b)}{\alpha b} \quad x = t = \frac{1}{t} \quad \alpha = -b$$

$$(\alpha - b)(\alpha^2 + b^2) = \frac{16}{\alpha b} \quad \cancel{t = \frac{1}{t}}$$

$$\alpha b (\alpha - b)(\alpha^2 + b^2) = 16 \quad \alpha - b = 0 \quad \alpha = b \\ \alpha b = 2 \quad x = \frac{1}{t}$$

$$t^2 (t^2 + 2z) = 16$$

$$t^2 = 2 \quad z = \frac{2}{t} \quad t = 2 \quad t = 1$$

$$t^2 + 2z = 8 \quad \frac{4}{t^2} + \frac{4}{t} = 8 \quad \frac{4}{t} = v$$

$$t^2 + \frac{4}{t} = 8$$

$$t^3 - 8t + 4 = 0$$

$$v^2 + 2v = 8 \\ v^2 + 2v - 8 = 0$$

$$v = -4 \\ v = 2$$

$$t^2 = 8 \quad z = \frac{2}{t}$$

$$t^2 + 2z = 8$$

то

$$\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 \frac{2}{x}$$

$$\log_{11} x = -\log_{11} \frac{1}{x}$$

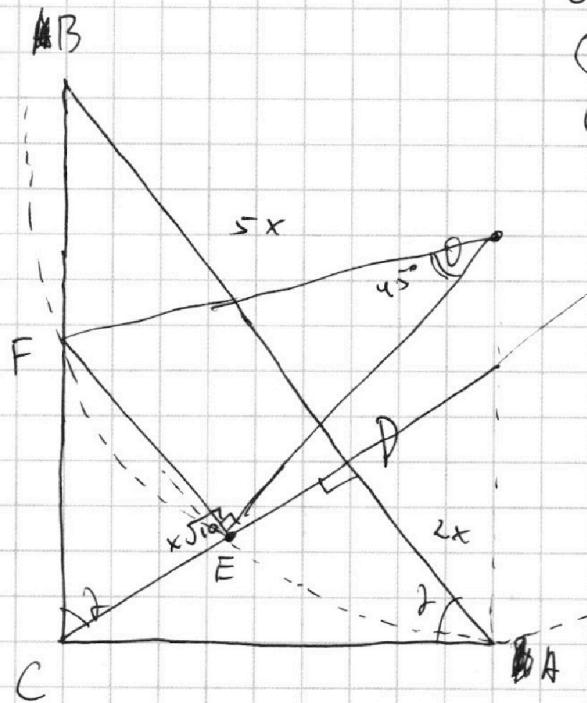
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CD^2 = \sqrt{BD \cdot DA}$$

$$CD^2 = 10x^2$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

10^{-2}

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x + \frac{1}{3} \log_x \frac{1}{11} = -5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 81 = 4$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$\alpha b : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$\beta c : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$\alpha c : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$(\alpha b c) : 2^{36} \cdot 3^{53} \cdot 5^{82}$$

$$\alpha = 2^{18} \cdot 3^4 \cdot 5^8$$

$$b = 2^{30} \cdot 3^5 \cdot 5^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$

$$\alpha = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^6$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

$$\begin{aligned} \log_{11}^4 x &= \frac{1}{3} \log(11^{-2}) - 5 \\ \log_{11}^4 x &= -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5 \end{aligned}$$

$$-\frac{5}{6} \alpha$$

$$\alpha b c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

$$Q = 2^4 \cdot 3^8$$

$$B = 2^2 \cdot 3^5$$

$$C = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. 0 \leq 8\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-8\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$8\pi \geq 2x \geq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4.5\pi$$

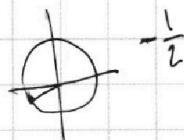


$$\arcsin(2x)$$

$$\arcsin(2x) = 0$$

$$\arcsin(\frac{3\pi}{4}) =$$

$$\approx \frac{\pi}{4}$$



$$1) 0 \leq x \leq \pi$$

~~$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) =$$~~

$$2.5\pi - 10\arcsin(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$10\arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

$$1) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] : (\log_{11}^2 x - \log_{11}^2 t)(\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 t)$$

$$10x = 2x - 4\pi$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = \frac{-4\pi}{8} = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) :$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2x - 4\pi$$

$$5\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$12x = 9\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

$$3) x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\log_{11}^4 x - \log_{11}^4 t = \\ = \frac{16}{3} (\log_{11}^{11} t + \log_{11}^{11} x)$$

$$-10\frac{\pi}{6} = 2\pi - 4\pi$$

$$1\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}$$

$$10\frac{\pi}{6} = 2x - 4\pi$$

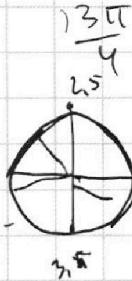
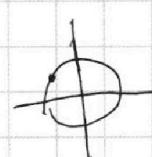
$$-\frac{1}{2} 10\frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{6} - 4\pi = \frac{17\pi}{6} - \frac{24\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$$

$$3\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$12x = 9\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$



$$A$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{10} \cdot 2x = x^2\sqrt{10}$$

$$= 5\pi$$

$$\frac{10\pi}{6} = \frac{34\pi}{6} - 4\pi$$

$$10x - 40\pi = 2x - 4\pi$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_{11} 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_{11} 11 - 5$$

$$\frac{1}{t} = x; x = t$$

$$t = x = 1$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{3}{5}$$

$$CD = 2\sqrt{10}$$

$$t = 0.15y$$

