



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Произведения чисел  $a^m, b^m, c^m$  и  $a^m$  равно:

$(a^m \cdot b^m \cdot c^m) = a^m b^m c^m = (abc)^m$  и оно может делиться  
на произведения  $a^m, b^m$  и  $c^m$ .

$$(abc)^2 = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot 2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^{22} \cdot 3^6 \cdot 5^8 \cdot 5^2$$

Тогда  $\min(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$ , но в квадратах  
степени ~~для~~ натуральных чисел степени  
прочих множителей обязательно четные,  
значит в  $(abc)^2$  не может входить 3, но т.к.  
оно делится на него по крайней мере 3 в нем  
как минимум в 60 степени, значит  
 $\min(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$ , а  $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Доказательство, найденное при  
Но  $a, b, c$  и  $a^m, b^m, c^m$  значит в  
 $a, b, c$  с теми входит минимум в 28 степени  
т.е.  $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ , достигается при

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пошагово по теореме Пифагора в  $\triangle ACD$ :

$$(2x)^2 + (\sqrt{10}x - \sqrt{14}t)^2 = (\sqrt{14}x - 7t)^2$$

$t$  выражается через  $x$ , а наименьшая площадь и все находится

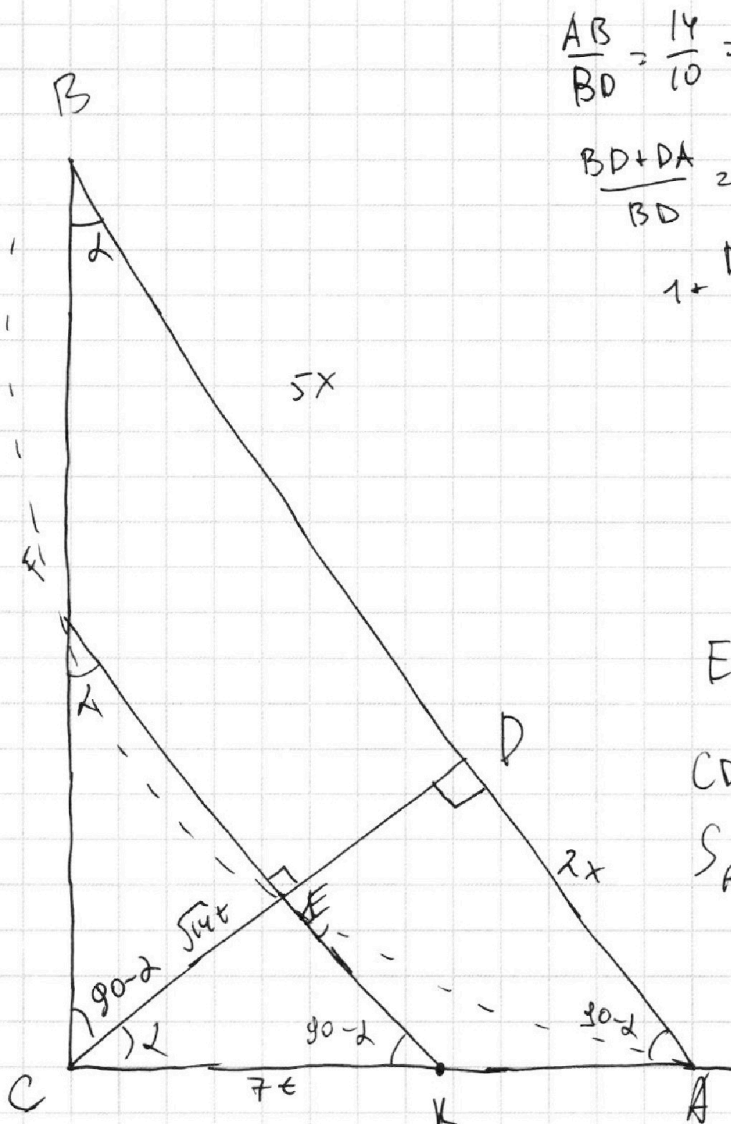
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{BD+DA}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$1 + \frac{DA}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{DA}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$DA = 2x$$

$$BD = 5x$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow CD \perp EF$$

$$CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10}x$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD^2 = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10}x = \sqrt{10}x^2$$

Продлим FE до пересечения с AC, перпендикулярная  
по теореме о касательной и секущей:

$$AK^2 = KE \cdot KF$$

$$CE^2 = KE \cdot EF \text{ (из прямоугольного } \triangle CFK \text{)}$$

$$\frac{AK^2}{CE^2} = \frac{KF}{EF} = \frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \text{ (т.к. } \triangle ABC \sim \triangle CFK \text{ (FK} \parallel AB \text{))}$$

$$AC^2 = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}x, \quad \frac{CK}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$CK = 7t$   
 $CE = \sqrt{14}t$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$\arccos(y)$  принимает значения от 0 до  $\pi$ , следовательно  
также  $10 \arccos(\sin x)$  принимает значения  
от 0 до  $10\pi$ . Значит и правая часть  
функции имеет от 0 до  $10\pi$ :

$$0 \leq 8\pi - 2x \leq 10\pi; \quad -8\pi \leq -2x \leq \pi; \quad 4,5\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{2}.$$

Зная что  $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$  преобразуем уравнение:

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 8\pi - 2x; \quad 5\pi - \arcsin(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

1)  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , тогда  $\arcsin(\sin x) = x$ ;

$$10x = 2x - 4\pi$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \checkmark$$

2)  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ , тогда  $\arcsin(\sin x) = \pi - x$

$$10(\pi - x) = 2x - 4\pi$$

$$10\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} \checkmark$$

3)  $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ ; тогда  $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$$10(x - 2\pi) = 2x - 4\pi$$

$$8x = 16\pi$$

$$x = 2\pi \checkmark$$

4)  $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$ ; тогда  $\arcsin(\sin x) = 3\pi - x$

$$10(3\pi - x) = 2x - 4\pi$$

$$12x = 34\pi$$

$$x = \frac{17\pi}{6} \checkmark$$

5)  $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$ , тогда  $\arcsin(\sin x) = x - 4\pi$

$$10(x - 4\pi) = 2x - 4\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2} \checkmark$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение 1/4 (2)

Первое ур-ие задает прямую, которая может иметь с окружностью максимум 2 точки пересечения. Значит прямая может пересекать обе окружности. Преобразуем 1 ур-ие:

$$6ay = b - 5x$$

при  $a=0$  ур-ие задает <sup>вертикальную</sup> ~~горизонтальную~~ прямую которая ~~не~~ может пересекать ~~обе~~ ~~обе~~ окружности. При  $a \neq 0$ :

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

Для всех таких  $a$ , при которых ~~прямая~~ не существует  $b$ , при которых прямая является ~~касательной~~ ~~касательной~~ \*1, \*2 или прямой между окружностями, не имеющей общих точек. Найдется  $b$ , что прямая пересекет обе окружности. Найдём такие  $c$ , что прямая  $y = cx + d$  является касательной к обеим окружностям

$$x^2 + (cx + d)^2 = 25$$

должно иметь решение

$$x^2 + c^2x^2 + 2cxd + d^2 = 25$$

$$(c^2 + 1)x^2 + 2cdx + d^2 - 25 = 0$$

$$(c^2 + 1)d^2 - (c^2 + 1)(d^2 - 25) = 0$$

$$x^2 + (cx + d + 9)^2 = 4$$

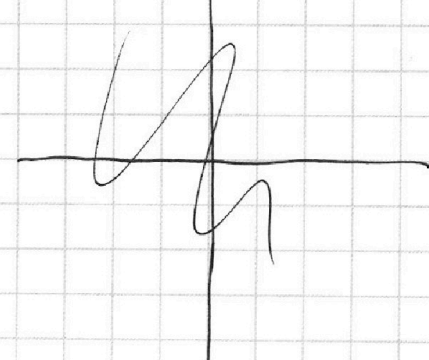
должно иметь решение

$$x^2 + c^2x^2 + d^2 + 81 + 2cxd + 18cx + d^2 + 18d = 4$$

$$(c^2 + 1)x^2 + (2cd + 18c)x + 18d + 77 = 0$$

$$(c^2 + 1)(d + 9c)^2 - (c^2 + 1)(d^2 + 18d + 77) = 0$$

Найдём такие  $c$  которые существуют:



см. см. лист

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (1)

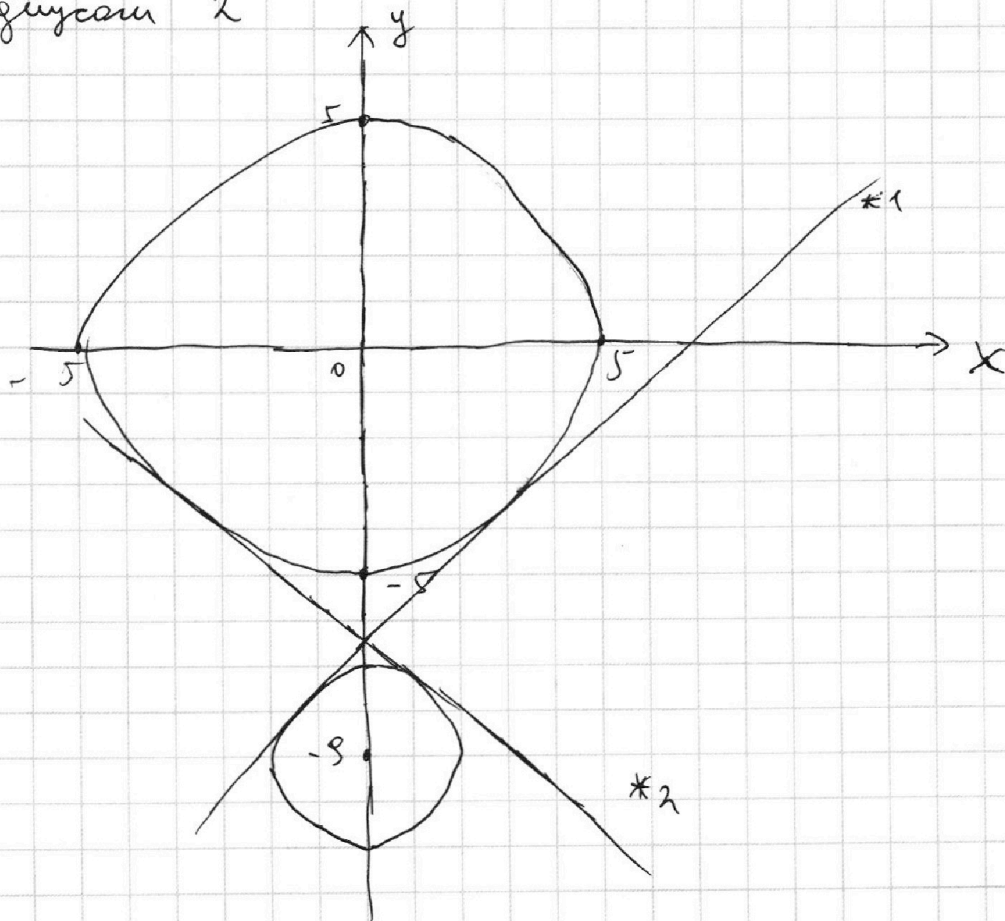
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 (1) \\ x^2 + y^2 = 25 (2) \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3): x^2 + y^2 + 18y + 77 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 &= 9 \\ x^2 + (y + 9)^2 &= 9 \end{aligned}$$

(2) - окружность с центром в точке  $(0; 0)$  и радиусом 5

(3) - окружность с центром в точке  $(0; -9)$  и радиусом 3



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

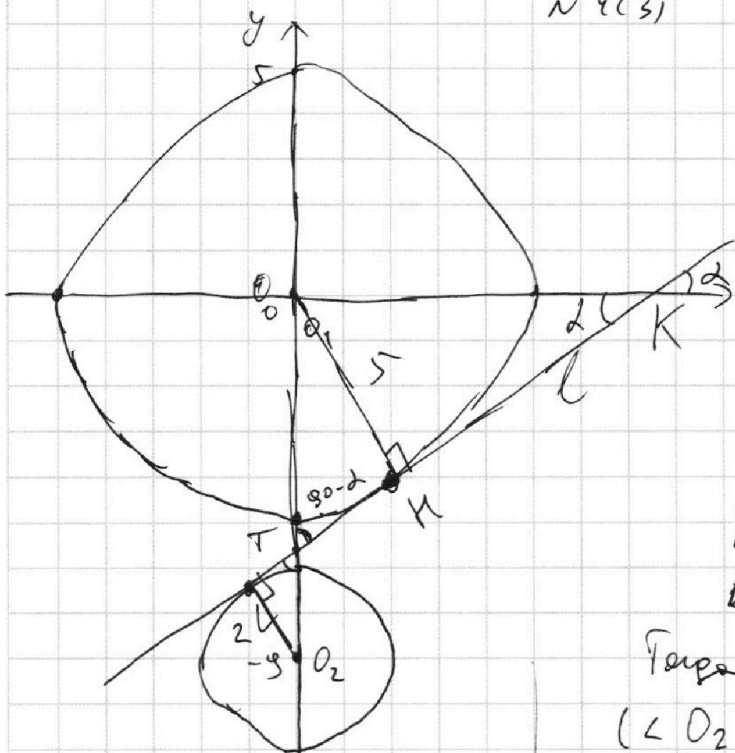
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4(3)



$l$  - общая касат.

$L$  и  $H$  - точки касания

центр 1 окружности  $O_1$ ,  
2 окружности  $O_2$

$O_2L \perp l$ ,  $O_1H \perp l$

$\Downarrow$   
 $O_2L \parallel O_1H$

Пучок точек пересечения

$KL$  и  $OH$  ось  $x$   $K=O$

Треугольники  $\triangle O_2LT \sim \triangle O_1TH$

( $\angle O_2LT = 90^\circ$ ,  $\angle THO_1 = 90^\circ$ ,  
 $\angle LTO_2 = \angle O_1TH$  (вершины касания))

$O_1O_2 = 8$ , Пучок  $O_1T = x$ , тогда

$O_2T = 8 - x$ . По теореме Пифагора  $O_2T = 2$  (радиус)

По теореме Пифагора:  $O_1H = 5$  (радиус)

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{8-x}; \quad -5x + 45 = 2x$$

$$x = \frac{45}{7}$$

$\operatorname{tg} \alpha = c$ , тогда  $\angle O_1KT =$   
 $= \alpha$  (верт.),  $\angle O_1TH =$   
 $= 90 - \alpha$

$\operatorname{tg} \alpha = c \operatorname{tg}(90 - \alpha)$ , значит  
мысли  $\operatorname{ctg}(\angle O_1TH)$

Итак по т. Пифагора в  $\triangle O_1TH$ :

$$TH^2 = O_1T^2 - O_1H^2 = \frac{45^2}{49} - 25 = \frac{45^2 - 25 \cdot 49}{49} = \frac{25 \cdot 81 - 25 \cdot 49}{49} = \frac{25 \cdot 32}{49}$$

$$TH = \frac{20\sqrt{2}}{7}, \quad \operatorname{ctg} \angle O_1TH = \frac{20\sqrt{2}}{7} : 5 = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

Аналогично найдем угол касания

прямой \* 2 окружко, в силу симметрии  
от ос. отк. касания окружностей

оси  $y$ , прямая \* 2 имеет угол наклона  $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

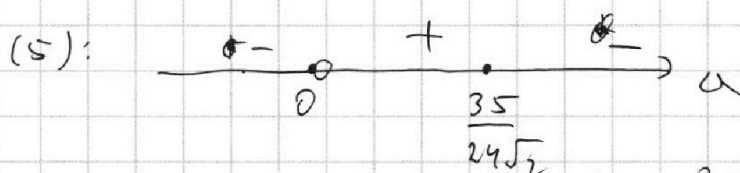
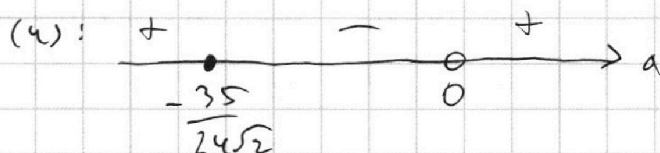
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4(4)

Знакомим или незнакомим все ~~кроме~~  $a$ ,  
кроме  $-\frac{4\sqrt{2}}{7} \leq -\frac{5}{6a} \leq \frac{4\sqrt{2}}{7}$ ;  $-4\sqrt{2} \leq -\frac{35}{6a} \leq 4\sqrt{2}$

$$\begin{cases} -\frac{35}{a} \leq 24\sqrt{2} \\ -\frac{35}{a} \geq -24\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} \frac{35}{a} \geq -24\sqrt{2}; & \frac{35+24\sqrt{2}a}{a} \geq 0 \quad (4) \\ \frac{35}{a} \leq 24\sqrt{2}; & \frac{35-24\sqrt{2}a}{a} \leq 0 \quad (5) \end{cases}$$



Дальше решение  $(0; \frac{35}{24\sqrt{2}}]$ ,  $a \neq 0$  помним  
Итак, знакомим все кроме этого т.е.  
Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$

Общее решение:  $(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}] \cup [\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$

Подходим все кроме этого ~~кроме~~.

Ответ:  ~~$(-\infty; 0) \cup (\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$~~   
 $(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5(2)

Знаем, возможно только  $x^t = 1$ , т.е.  $xy = 2$

Контроль зрения, что при  $x^t = 1$  ~~тогда~~  $t = \frac{1}{x}$

$$(2) \text{ превращается в } \log_{11}^4 \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{16}{3} \log_x (11) - 5;$$

$$\log_{11}^4 \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\text{при этом (1)} \rightarrow \log_{11}^4 (x) = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\text{т.е. } \log_{11}^4 (x) = \log_{11}^4 \left( \frac{1}{x} \right), \text{ откуда}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \log_{11} x = \log_{11} \left( \frac{1}{x} \right) \rightarrow \text{имеет только решения } x = \pm 1, \\ \text{которые не годятся.} \\ \log_{11}^4 x = -\log_{11}^4 \left( \frac{1}{x} \right) \rightarrow \log_{11} x = \log_{11} x \text{ верно} \\ \text{для любых } x > 0, \end{array} \right.$$

Значит  $x^t$  действительно может быть равно 1 и ничего больше

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Первое уравнение:  $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \frac{1}{3} \log_x \left( \frac{1}{121} \right) - 5$

$$\log_{11}^4 x = 6 \log_x 11 - \frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5 \quad (1)$$

Второе уравнение ( $0,5y=t$ ):  $\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \log_t \left( \frac{1}{121} \right) - 5$

Уз (1): левая часть  $> 0$  ( $= 0$  при  $x=1$ , но при  $x=1$   $\log_x 11$  не определен)

$$\log_{11}^4 t = -\frac{13}{3} \log_t 11 - \log_t 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5 \quad (2)$$

Тогда правая часть левая часть больше нуля  
 Тогда  $\log_x 11$  обязательно  $> 0$

Уз (2): левая часть  $> 0$  ( $= 0$  при  $t=1$ , но при  $t=1$   $\log_t 11$  не определен). Тогда правая часть тоже  $> 0$ , тогда  $-\frac{16}{3} \log_t 11 > 0$

Сделаем замены  $\log_t 11 < 0$

$$a = \log_{11} x > 0$$

$$b = \log_{11} t < 0$$

и вычтем из (1) (2), получим:

$$a^4 - b^4 = \frac{16}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = \frac{16}{3} \left( \frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = \frac{16(a+b)}{3ab}$$

1)  $a+b=0$ ;  $a=-b$ ;  $\log_{11} x + \log_{11} t = 0$   $\log_{11}(xt) = 0$ ,  $xt=1$

2)  $a+b \neq 0$ .  $(a-b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3ab}$  правая часть  $< 0$

При этом  $a-b > 0$ , т.к.  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $a^2 + b^2$  также  $> 0$ , значит левая часть  $> 0$ , значит левая часть  $> 0$ , правая часть  $< 0$ , т.к.  $a$  и  $b$  разных знаков  
 левая часть  $> 0$ , правая часть  $< 0$ , значит равенство невозможно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

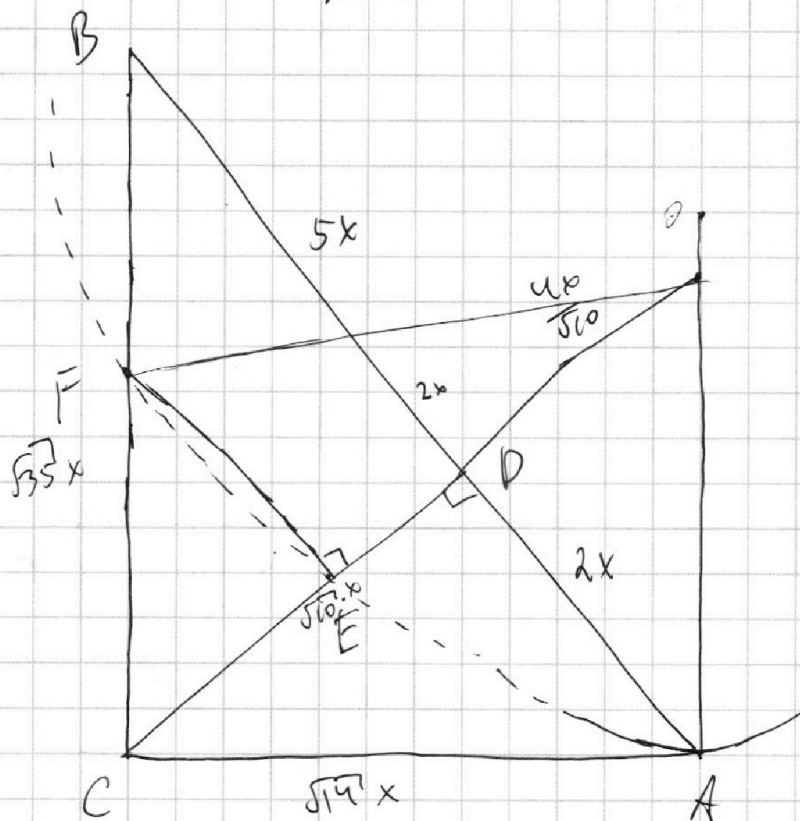
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2



$$10x^2$$

$$4x^2$$

$$\sqrt{10}x \cdot t = 4x^2$$

$$\sqrt{10}t = 4x$$

$$t = \frac{4x}{\sqrt{10}}$$

$$0,5y = t$$

$$-\frac{2}{3} + 6 = \frac{10}{3} \Rightarrow \log_{11}^4 t + \log_t 11 = \frac{1}{3} \log_t (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 t + \log_t 11 = -\frac{13}{3} \log_t 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5 \quad \log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x + \log_{11}^4 t = -10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \frac{1}{3} \log \frac{1}{11} - 5$$

$$\log_{11}^4 x = -\frac{2}{3} \log_x 11 + 6 \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \frac{16}{3} - 5$$

~~(0,5)~~

$$(0,5y)^3$$

$$0,125 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$(0,5y)^3$$

$$\frac{45}{7^2}$$

$$y = x - \frac{45}{7}$$

$$x^2 + \left(x - \frac{45}{7}\right)^2 =$$

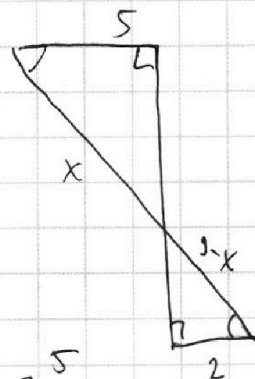
$$45 \cdot 45 = 5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 9 = 25 \cdot 81$$

$$\frac{x}{9-x} = \frac{5}{2}$$

$$2x = -5x + 45$$

$$7x = 45$$

$$x = \frac{45}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - \log_{11}^4 t = \frac{16}{3} (\log_x 11 + \log_t 11) = \frac{16}{3} \left( \frac{\log_{11} x + \log_{11} t}{\log_{11} x \cdot \log_{11} t} \right)$$

$$a^4 - b^4 = \frac{16}{3} \left( \frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3} \left( \frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3} \left( \frac{a+b}{ab} \right)$$

$$(a-b)(a^2 + b^2) = \frac{16}{3ab}$$

$$\log_{11} x + \log_{11} t = 0$$

$$\log_{11}(xt) = 0$$

$$xt = 1$$

$$x \cdot y = 1$$

$$y = 2$$

$$\log_{11}^5 x = \frac{16}{3} - 5 \log_{11} x$$

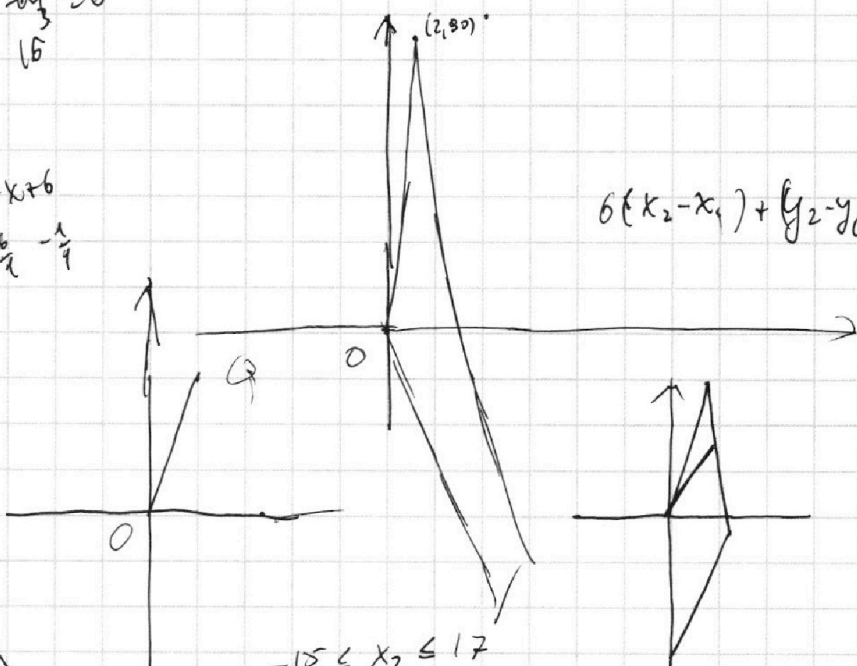
$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x = \frac{16}{3} \cdot 3 = 16$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0 \quad x^2 + 7x + 6$$

$$3t^5 + 15t - 16 = 0$$

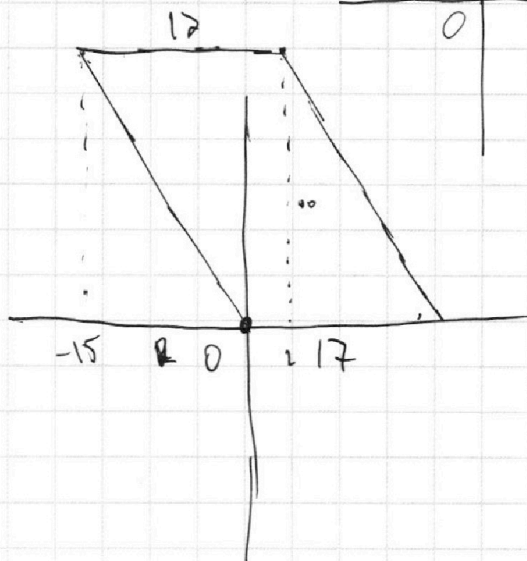
$$t = \frac{2}{3}$$



$$-15 \leq x_2 \leq 17$$

$$-15 \leq x_1 \leq 17$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 30$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_x 11 - 5$   $x \neq -1$   $t = 0,5y$   $\log_x 11 > 0$   
 2)  $\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_t 11 - 5$   $x < 1$   $\log_t 11 < 0$   
 $x \neq -1$   $x t = 1$   $x = \frac{1}{t}$

$a^4 - b^4 = \frac{16}{3} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$   $a > 0$   $b < 0$   $x > 10$   $x \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$   $a = -b$   
 $(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = \frac{16(a+b)}{ab}$   $\log_{11} t x = -\log_{11} b$

$(a-b)(a^2+b^2) = \frac{16}{ab}$   $ab = z$   $xt = 1$

$ab(a-b)(a^2+b^2) = 16$   $a-b = t$   $x = \frac{1}{t}$   
 $ab = z$

$t z (t^2 + 2z) = 16$

$tz = 2$   $z = \frac{2}{t}$   $z = 2$   $t = 1$   
 $t^2 + 2z = 8$   $\frac{2}{t} = 8$   $\frac{2}{t} = v$   
 $z = \frac{2}{t}$   $\frac{2}{t} = 8$   $v^2 + 2v = 8$   
 $t^2 + \frac{4}{t} = 8$   $v^2 + 2v - 8 = 0$   
 $t^3 - 8t + 4 = 0$   $v = -4$   $v = 2$

$tz = 2$   $z = \frac{2}{t}$   
 $t^2 + 2z = 8$

$\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 \frac{1}{x}$   
 $\log_{11} x = -\log_{11} \frac{1}{x}$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3. 0 \leq 8\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$1) \arcsin x \leq \pi$$

$$-8\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$8\pi \geq 2x \geq -\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5\pi$$

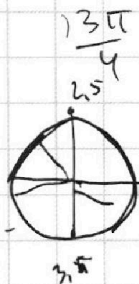
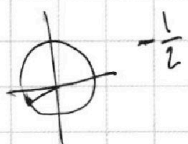


$$\arcsin(\sin(2\pi))$$

$$\arcsin(\sin 0) = 0$$

$$\arcsin(\sin(\frac{9\pi}{4})) =$$

$$= \frac{\pi}{4}$$



~~10~~

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) =$$

$$= 5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 8\pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

$$1) x \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]: (\log_{11}^2 x - \log_{11}^2 t) (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 t)$$

$$10x = 2x - 4\pi$$

$$8x = -4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) x \in \left( \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right):$$

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 2x - 4\pi$$

$$5\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$12x = 9\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

$$3) x \in \left[ \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right)$$

$$\log_{11}^4 x - \log_{11}^4 t =$$

$$= \frac{16}{3} (\log_{11} 11 + \log_{11} 11)$$

$$-\frac{10\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} - 4\pi$$

$$\frac{17\pi}{6} = \frac{24\pi}{6}$$

$$\frac{10\pi}{6} = 2x - 4\pi$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{10\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{12} - 4\pi = \frac{17\pi}{12} - \frac{48\pi}{12} = -\frac{31\pi}{12}$$

$$\frac{10\pi}{6} = \frac{34\pi}{6} - 4\pi$$

$$10x - 40\pi = 2x - 4\pi$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3} \log_{11} 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3} \log_{11} 11 - 5$$

$$t = x = 1$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{10} \cdot 2x = x^2 \sqrt{10} = 5\pi$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{5}{5}$$

$$CD = x \sqrt{10}$$

$$t = 0,5y$$

$$\frac{1}{t} = x; x = t$$

