



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1
Перенесли αb , $b c$ и $a c$ и получили, что:

$$(\alpha b c)^2 : 2^{36} \cdot 3^{50} \cdot 5^{52}$$

Значит $\alpha b c$ точно кратно $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Но $a c : 5^{28}$, значит $\alpha b c : 5^{28}$ тоже (т.к. 6-тичур)
следовательно $(\alpha b c) : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow \alpha b c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$$\text{При } \alpha = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$\alpha b c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{И при этом } \alpha b = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$b c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$a c = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 2^{28}$$

Значит $\alpha b c = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ наша установка

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

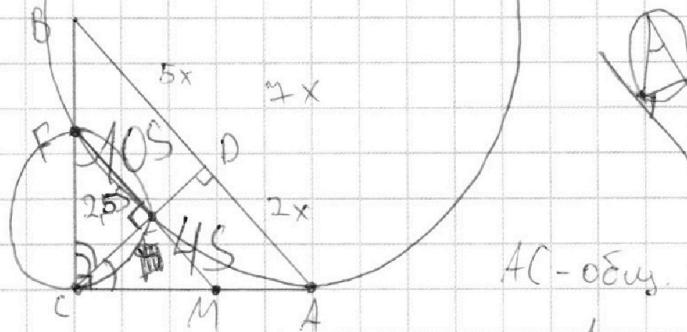
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{13} 3^{11}, bc: 2^{14} 3^{11} 5^{13}, ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

Перемножим ab, bc и ac и получим, что

$$(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

Значит (abc) точно делится на ~~1000~~ $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$



$$\frac{4}{2,5} = \frac{8}{5}$$

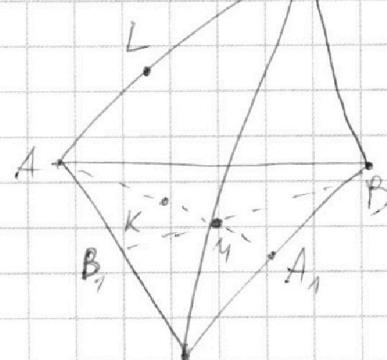
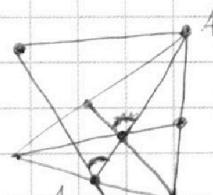
$$\begin{array}{r} 52 \\ \times 52 \\ \hline 2600 + 200 + 4 = 2704 \end{array}$$

AC - общ. касательная $s = 2704$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} n \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} n \leq \frac{\pi}{2}$$

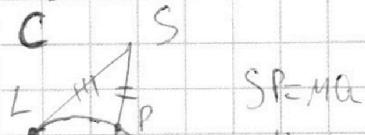
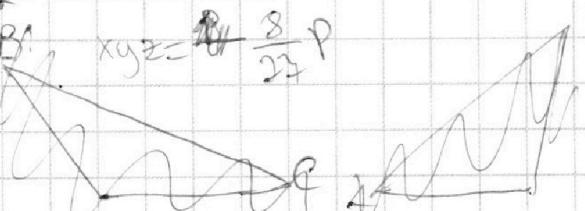
$$\frac{5}{3} n \geq \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{10}{3}$$



$$5n \geq -10 \quad n \geq -2$$



$$B_1 \quad xyz = \frac{8}{27} P$$

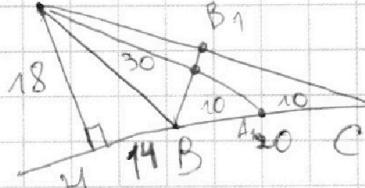
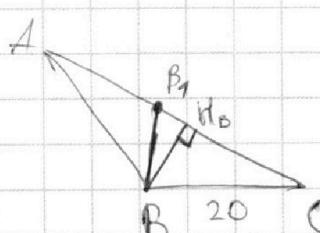


$$SP = MA$$

$$MK = LS$$

$$AS = AM$$

$$AH = 30 \quad 20$$



$$HA_1 = 24 \Rightarrow HA_1 B = 14 \Rightarrow HA_1 C = 34$$

$$AC^2 = 18^2 + 34^2 = 4(9^2 + 17^2) = 4/370$$

Установка 4. Всё доказано

$$180 = S = \frac{1}{2} \sqrt{370} \cdot h$$

$$h = \frac{180}{\sqrt{370}} = \frac{18\sqrt{370}}{37}$$

$$AC = 2\sqrt{370}$$

$$AB^2 = 4(9^2 + 17^2) = 4/370$$

$$AB = 2\sqrt{370}$$

$$50 - \frac{180^2}{370} =$$

$$= 520 - \frac{18^2 + 10^2}{37} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

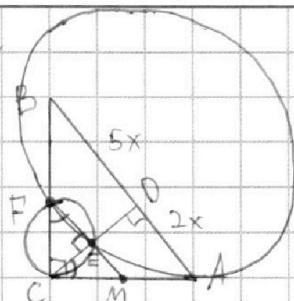
7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Нарча QR-кода недопустима!

~ 2



Решение:

Так как $\angle BDF$ -внешний, то $\angle BDF \geq \angle ABD$.
И т.к. $AB \parallel EF$, то $EF \perp CD \Rightarrow \angle FEC = 90^\circ$.
Т.к. $\triangle ABC$ -прямой.
 $\angle CFE = 90^\circ - \angle FCE = 90^\circ - (90^\circ - \angle DCA) =$
 $= \angle DCA$

Рассмотрим окр, описанную около $\triangle CFE$.
Прямая AC -касается этой окружности в т. С, т.к. как
 $\angle CFE = \angle DCA$. Значит AC -общая касательная этой окр
и заданной в условии. А FE - общая хорда \Rightarrow она же
радиальная ось этих окружностей.

Значит FE пересекает AC в середине (т.к. степень
точки M -середины AC равна отнесенному к ней окр, т.к.
касательные из нее радиусы; а радиусы - ГМТ, степени которых
равны отк глухих окр.)

Значит EF - средняя линия $\triangle ABC$ (т.к. $EF \parallel AB$ и
проходит через середину AC).

Следовательно $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CEF}} = 4$.

Тогда $AB = 2x \Rightarrow BD = 5x \Rightarrow AD = 2x$

Тогда $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{5}{2} \Rightarrow S_{\triangle BCD} = 2.5 S_{\triangle ACD}$ $S_{\triangle ACD} = \frac{2}{5} S_{\triangle BCD}$

Значит $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

13

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Пусть $\arccos(\sin x) = \alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi]$

$\cos \alpha = \sin x$ (но определено)

$$\cos \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$1) \sin\left(\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad 2) \sin\left(\frac{\alpha + x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \frac{\alpha + x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi K, K \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi K \quad \begin{matrix} \text{(последние)} \\ \text{в уравнение} \end{matrix}$$

$$10x - 5\pi + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi K = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi - 20\pi n$$

$$8x = -4\pi + 20\pi K$$

$$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$$

$$x = \frac{5}{2}\pi K - \frac{\pi}{2}$$

Со $\alpha \in [0; 4\pi]$, $2x = 9\pi - 10\alpha$ (из условия ур-я). $-10\alpha \in [-10\pi; 0]$

$$-10\alpha + 9\pi \in [-\pi; 9\pi] \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$1) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n \leq \frac{9\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{7}{6} - \frac{5}{3}n \leq \frac{9}{2} \quad | \cdot 6$$

$$\Rightarrow -3 \leq \frac{7}{6} - 10n \leq 27 \Rightarrow n \leq 1 \text{ и } n \geq -2 \Rightarrow n = -2; -1; 0; 1 \quad \begin{matrix} \text{т.к. } n \in \mathbb{Z} \\ \text{т.к. } K \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$2) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi K - \frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}K - \frac{1}{2} \leq \frac{9}{2} \quad | \cdot 2$$

т.к. $K \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow -1 \leq 5K - 1 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq 5K \leq 10 \Rightarrow 0 \leq k \leq 2 \Rightarrow K = 0; 1; 2$$

ОТВЕТ: $x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$ при $n = -2; -1; 0; 1$
 $x = \frac{5}{2}\pi K - \frac{\pi}{2}$ при $K = 0; 1; 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

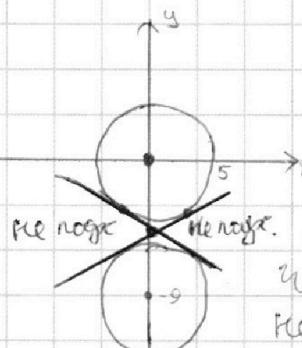
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \quad (1) \\ (x^2 + y^2 - 25) / (x^2 + y^2 + 18y + 75) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \quad \text{- окр с центром } (0; 0) \text{ и } r = 5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 14 \quad \text{- окр с центром } (0; -9) \text{ и } r = \sqrt{14} < 4 \quad (\overset{\text{окр}}{\cancel{\text{не перес}}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \quad \text{- окр с центром } (0; 0) \text{ и } r = 5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 14 \quad \text{- окр с центром } (0; -9) \text{ и } r = \sqrt{14} < 4 \quad (\overset{\text{окр}}{\cancel{\text{не перес}}}) \end{cases}$$

при $a=0$: $5x=b \Rightarrow$ можно подобрать такое b , чтобы (2) имело 4 решения $\Rightarrow a=0$ подходит. При $a \neq 0$:

$$y = \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$



К пачеона прямой прикасаюваць, а члены
в "поджатии" можно менять, изменяя b

Проведем 2 оси вектором каким к окр.
не подж. не подж. Для того чтобы сдвинуть прямую так,
чтобы она пересекала пачеона окр в 2-х т.
необходимо, чтобы ее касание было
между 2 пачеона касающимися.

Пусть насам $y = kx + l$: $\begin{cases} x^2 + (kx + l)^2 = 25 \quad -1 \text{ реш} \\ x^2 + (kx + l + 9)^2 = 14 \quad -1 \text{ реш.} \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2(1+k^2) + x \cdot 2kl + l^2 - 25 = 0 \\ x^2(1+k^2) + x \cdot 2k(l+9) + l^2 + 2l + 81 - 14 = 0 \end{cases} \quad D_1 = 4k^3l^2 + 4(l^2 - 25) / (k^2 + 1) = 0$$

$$D_2 = 4k^3(l+9)^2 - 4(k^2 + 1)(l+9)^2 - 4(l+9)^2 + 56 + 56k^2 = 0$$

$$100k^2 - 4l^2 + 100 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{l^2}{25} - 1$$

$$56k^2 - 4(l+9)^2 + 56 = 0$$

$$\frac{56}{25}l^2 - 4l^2 - 72l - 324 + 56 = 0 \Rightarrow \frac{44}{25}l^2 - 72l - 268$$

$$D_2 = l = -4,5$$

Насогдич k_1 и $k_2 \Rightarrow k_1 \leq \frac{-5}{6a} < k_2$

(корни исчезают)

$$k^2 = 82$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \log_{11}^4 x - 6 \log_{x} 11 = \log_{x^3} 11^2 - 5 \quad | \text{ 083: } \\ x > 0, x \neq 1$$

$$(2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)^3} 11^2 - 5 \quad | \text{ y > 0, y \neq 2}$$

$$(1) \log_{11}^4 x - 6 \log_{x} 11 = \frac{-2}{3} \log_{x} 11 - 5 \\ \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{x} 11 + 5 = 0$$

$$(2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \frac{-13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{3} \log_{0,5y} 11 + 5 = 0$$

Пусть $\log_{11} x = a$, $\log_{11} (0,5y) = b$, тогда получим

$$(1) a^4 - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad | \cdot 3a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$(2) b^4 + \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{b} + 5 = 0 \quad | \cdot 3b \neq 0, \text{ т.к. } 0,5y \neq 1$$

$$(1) 3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$(2) 3b^5 + 15b + 16 = 0$$

произвднос:

$$(1)' = a^4 + 15 \text{ произвда} > 0$$

Значит оба уравнения имеют по 1 корню (не больше 1, т.к. такие x есть, то равны 1), так как функции монотонны

$$(1) + (2) : 3(b^5 + a^5) + 15(a + b) = 0 \quad \text{Заметим, что } a = -b$$

здесь решением и т.к. решение одно, то это оно есть (если a подходит - корень (1), то $b = -a$ - корень (2)).

$$\text{Видим } \log_{11} x = -\log_{11} (0,5y) \Rightarrow \log_{11} (0,5xy) = 0$$

$$\Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2. \quad (\text{так как } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0, \text{ то } x \neq 1 \text{ и } y \neq 2 \text{ и } xy = 2 \text{ получилось не при } x=1 \text{ и } y=2)$$

$$\text{Отвем: } xy = 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~6

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48 \Rightarrow y_2 - y_1 : 6 \Rightarrow y_2 = y_1 + 6k$$
$$0 \leq y_1, y_2 \leq 90$$

Все точки внутри карты е прямые с наклоном $-6x$

$$OP: -6x; RQ: -6x + 102$$

$$\text{Пусть } A \in \alpha: y = -6x + l_1 \Rightarrow y_1 = -6x_1 + l_1$$

$$B \in \beta: y = -6x + l_2 \Rightarrow y_2 = -6x_2 + l_2$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 6x_2 - 6x_1 - 6x_2 + l_2 + 6x_1 - l_1 = 48$$

$$\Rightarrow l_2 - l_1 = 48 \Rightarrow \alpha: y = -6x + l_1$$

$$\beta: y = -6x + l_1 + 48$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

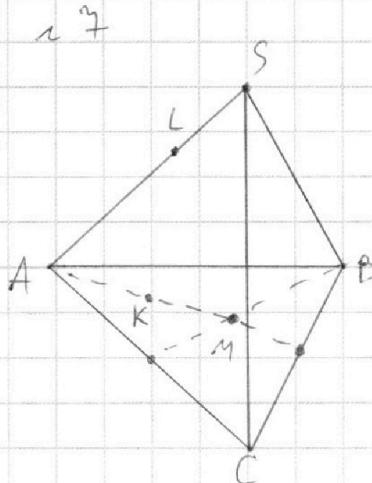
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

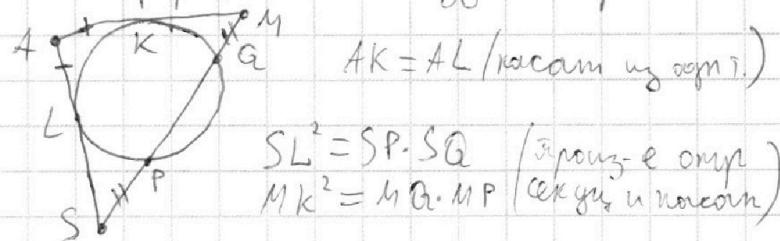
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Демонстрация:

Две окружности пересекутся в A и S (AMS)
т.к. L -секуща, то это будет окр



$AK = MG = SP$, т.к. $SG = MP \Rightarrow SL = MK \Rightarrow AS = AM$ (т.к. $AK = AL$) \Rightarrow
 $AA_1 = 1,5 AM = 30$, (т.к. сб-бы т.перес. между окн).

$$h_a = \frac{2S}{BC} = 18 \Rightarrow AA_1 = 24 \quad (\text{т.к. } \text{окр}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle B\text{-тупой} \Rightarrow H_A B = 14, H_A C = 34$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{350}, AC = 2\sqrt{370} \quad (\text{т.к. } \text{окр})$$

$$h_B = \frac{2S}{AC} = \frac{180}{\sqrt{370}} = \frac{18\sqrt{370}}{37}, h_C = \frac{2S}{AB} = \frac{180}{\sqrt{350}} = \frac{18\sqrt{350}}{35}$$

$$AB_1 = \sqrt{370}; AH_B = \sqrt{520 - \frac{18^2 \cdot 10}{37}} = \sqrt{\frac{520^2 - 3240}{37}} = \sqrt{\frac{270400 - 3240}{37}}$$

=



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

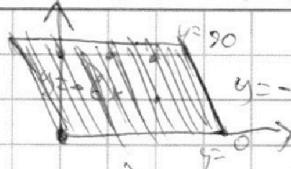
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 90 \text{ град}$$

~~около 60°~~
~~около 70°~~



$$-15 \leq x_1, x_2 \leq 14$$

33 б-ма

все точки \in какой-то прямой
с коэффициентом $-6x$ и сдвигом от

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$\therefore y_2 - y_1 = 6$$

$$y_2 - y_1 = 6k$$

$$y = -6x + L$$

$$0 \leq L \leq 102$$

$$y_2 = -6x_2 + L_2 \quad y_1 = -6x_1 + L_1$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 6x_2 - 6x_1 - 6x_2 + L_2 + 6x_1 + L_1 = 48$$

$$x_2 - x_1 + k = 8$$

$$k \in [0, 15]$$

16 вариантов для k

$$L_2 = L_1 + 48$$

$$A \in y = -6x + L$$

$$B \in y = -6x + L + 48$$

$$k = 8 \quad L = 48$$

$$L = 48$$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_{11} x - 6 \log_{x^2} 11 = \log_{x^2/121} 5 \quad | \quad \text{Og3: } x > 0, x \neq 1$$

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)^3} (11^{-2}) - 5 \quad | \quad y > 0, y \neq 2$$

$$3) \log_{11} x - \frac{16}{\log_{11} x} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{-2}{3} \log_{x^2} 11 - 5$$

$$\log_{11} x - \frac{16}{3} \log_{x^2} 11 + 5 = 0 \quad \log_{11} x = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \quad | \cdot 3a \neq 0 \quad \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6} \textcircled{7}$$

$$f(a) = 3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$f'(a) = 15a^4 + 15$ всегда $\geq 15 \Rightarrow f(a)$ монотонна \Rightarrow 1 корень
после подбора 1 корень

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \frac{-2}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$$

$$\log_{11} (0,5y) + \frac{16}{3} \log_{0,5y} 11 + 5 = 0 \quad \log_{11} (0,5y) = b$$

$$f(b) = b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \quad | \cdot 3b \Rightarrow 3b^5 + 16 + 15b = 0$$

$$f'(b) = 75b^4 + 15 \geq 15$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0 \quad | \quad a = -b$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$3b^5 + 3a^5 + 15b + 15a = 0 \quad | : 3 \quad \log_{11} x = -\log_{11} 0,5y$$

$$b^5 + a^5 + 5(b+a) = 0$$

$$b^5 + a^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0$$

$$= a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + b^5 \quad | \quad \log_{11} 0,5xy = 0$$

$$-ab^4 + b^5$$

$$0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$$

$$(0;0), P(-15;90) Q(2;90) R(12;0)$$

все 60 нап

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

x_1, x_2, y_1, y_2
чтобы

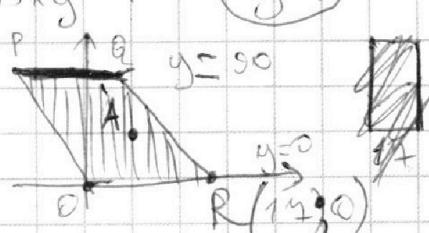
$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$OP: \frac{x}{-15} = \frac{y}{90} \quad | \cdot 90$$

$$y = -6x$$

$$RQ: \frac{x-2}{15} = \frac{y-90}{-90} \quad | \cdot (-90)$$

$$-6x + 12 = y - 90 \quad y = -6x + 102$$



$$0 \leq y_1, y_2 \leq 90$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1 \quad ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\downarrow \\ a^2 b^2 c^2 : (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52})$$

$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \text{ но } ac : 5^{28} \Rightarrow abc \text{ тоже}$$

Более простой пример $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

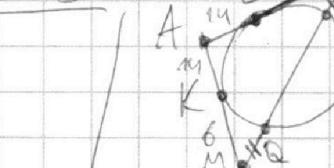
$$a = 2^{4 \cdot 3^0} \cdot 5^1$$

$$b = 2^{2 \cdot 3^5} \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12 \cdot 3^{16}} \cdot 5^{14}$$

$$2x = 9\pi - 10.2 \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$



$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$MK^2 = MG \cdot MP$$

$$SL^2 = MK^2 \text{ или}$$

$$SL = MK$$

$$S_{ABC} = 180 \quad S_{ABE} = 90$$

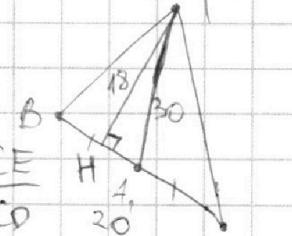
$$SA = AM \quad SB = BM \quad SC = CM$$

$$5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x \quad 20$$

$$8x = 20\pi n - 4\pi$$

$$x = \frac{5}{2}\pi n - \frac{\pi}{2}$$

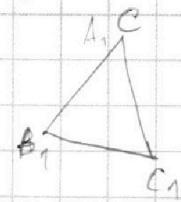
$$AA = 90$$



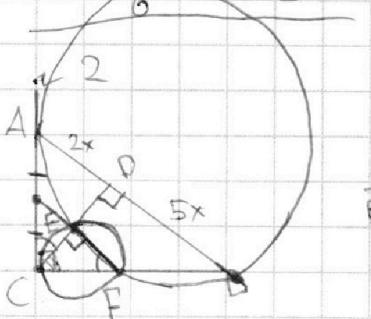
$$\frac{CE}{CD} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{ACB}}{S_{CEF}} = \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \quad S_{ACD} = S_{BCD}$$

$$\frac{S_{ACB}}{S_{CEF}} = \frac{1}{1} = \frac{5}{2} \quad n = 10$$



$$1) x =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 12) = 0 \end{cases}$$

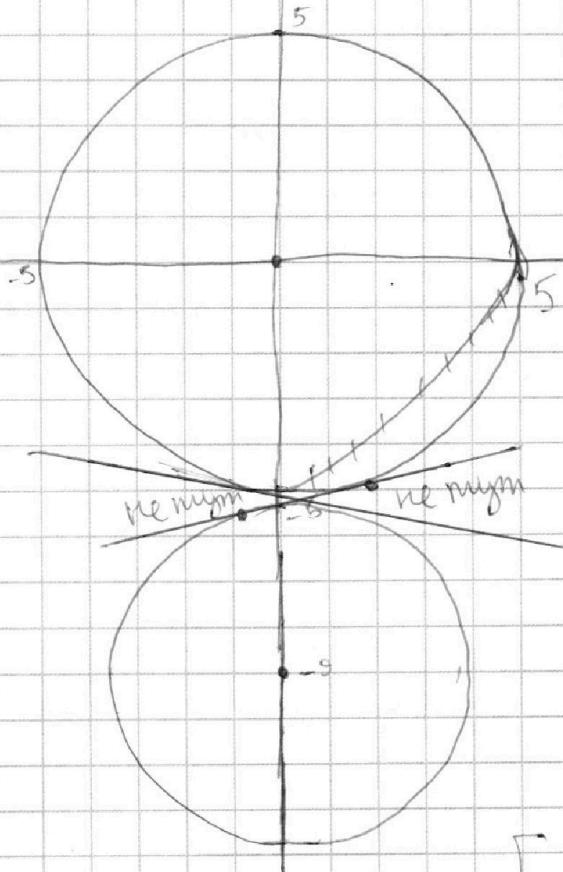
Чтобы найти корень $a \neq 0$: реш.

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 14 \end{cases}$$

- центр $(0; 0)$ $r=5$
- центр $(0; -9)$ $r=\sqrt{14} < 4$

$$6ay = b - 5x$$

при $a \neq 0$:
 $y = \frac{b-5x}{6a} = \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ - прямая



прямая должна иметь
коэф. наклона между коэф.
Како найти коэф наклона
этых касательных!!!

$$\begin{aligned} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} &= \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \\ x-x_1 &= \frac{y-y_1}{y_2-y_1}(x_2-x_1) \\ x-x_2 &= \frac{y-y_2}{y_2-y_1}(x_1-x_2) \quad x_1^2 + y_1^2 = 25 \\ \frac{x-x_2}{-x_1} &= \frac{y-y_2}{-y_1-y_2} \quad x_2^2 + (y_2+9)^2 = 14 \end{aligned}$$

$$y = kx + l \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \text{ 1п.} \\ x^2 + (y+9)^2 = 14 \text{ 1п.} \end{cases}$$

$$x^2 + (kx+l)^2 = 25 \text{ 1п.}$$

$$x^2 + (kx+0+l)^2 = 14 \text{ 1п.}$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 2kx(l+0) + (l^2 - 25) = 0 \quad D_1 = 4k^2l^2 - 4(l^2 - 25)/(k^2 + 1) = 0$$

$$x^2(k^2 + 1) + 2kx(l+0) + (l^2 - 25) = 0 \quad k^2 = \frac{l^2}{25} + 1$$