



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку $a, b, c \in \mathbb{N}$, то ab минимум $= 3^{14} \cdot 7^{13}$,
 bc минимум $= 3^{19} \cdot 7^{17}$, ac минимум $= 3^{23} \cdot 7^{42}$.

Для минимального значения abc мы и будем рассматривать эти минимумы, поскольку при них достигается $\min abc$ (если рассматривать не минимумы, то и abc будет больше).

Имеем:

$$\begin{aligned} ab &= 3^{14} \cdot 7^{13} & b &= \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{a} \\ bc &= 3^{19} \cdot 7^{17} & c &= \frac{3^{19} \cdot 7^{17}}{b} \\ ac &= 3^{23} \cdot 7^{42} \end{aligned}$$

$$\frac{3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}}{a^2} = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{a^2} = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$\frac{3^{18} \cdot 7^{38}}{a^2} = 1$$

$$a = 3^9 \cdot 7^{19} \text{ (без минуса, т.к. } a \in \mathbb{N})$$

$$\text{Тогда } b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = \frac{3^5}{7^6}$$

$$c = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$abc = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot \frac{3^5}{7^6} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{9+5+14} \cdot 7^{19-6+23} = 3^{38} \cdot 7^{36}$$

Это минимум, т.к. мы брали минимальные ab, bc, ac .

Ответ: $3^{38} \cdot 7^{36}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-11ab}$. Если дроби сократима
на m , то $a+b \div m$ и $(a+b)^2-11ab \div m$

$a+b \div m \Rightarrow (a+b)^2 \div m \Rightarrow 11ab \div m$. Поскольку $\frac{a}{b}$ — несократима, то a и b — взаимно простые.
Без ограничения общности $a \div m$ (с $b \div m$ аналогично). Тогда
 $b \div m \Rightarrow a+b \div m \Rightarrow$ сократить не можем $\Rightarrow$ ни a , ни b не могут $\div m$. $11ab \div m$
 $\{a, b \div m \Rightarrow \max m = 11$.

Ответ: $m = 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

Сначала проверим ОДЗ: $3x^2-5x+6 \geq 0$

$$D = -47 < 0, 3 > 0 \Rightarrow \text{подходят любые } x$$

$$3x^2+x+1 \geq 0$$

$$D = 1-4 \cdot 3 = -11 < 0, 3 > 0 \Rightarrow \text{подходят любые } x$$

Далее рассмотрим часть уравнения на

$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1}$, но для начала докажем
что оно $\neq 0$. Если равно, то $\begin{cases} 3x^2-5x+6=0 \\ 3x^2+x+1=0 \end{cases}$
но у них нет корней $\Rightarrow$ они не равны 0.

$$3x^2-5x+6 - 3x^2-x-1 = (5-6x)(\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1})$$

$$5-6x = (5-6x)(\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1})$$

Можно сократить на $5-6x$, если $x \neq \frac{5}{6}$.

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = \sqrt{\frac{349}{36}} - \sqrt{\frac{149}{36}} =$$

$$= 0 = 5-6x \Rightarrow x = \frac{5}{6} - \text{корень}$$

$$x \neq \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$$

$$2\sqrt{3x^2+x+1} = 6x-4$$

$$\sqrt{3x^2+x+1} = 3x-2 \quad (3x-2 \geq 0)$$

$$3x^2+x+1 = 9x^2-12x+4$$

$$6x^2-13x+3=0$$

$$D = 97$$

$$x_1 = \frac{13+\sqrt{97}}{12}, x_2 = \frac{13-\sqrt{97}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверим на $3x - 2 \geq 0$ эти корни.

$$3 \cdot \frac{5 + \sqrt{97}}{12} - 2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{4} > 0$$

$$3 \cdot \frac{5 - \sqrt{97}}{12} - 2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{4} (\sqrt{97} > \sqrt{25}) < 0 \text{ — не кор}$$

Получается, у уравнения два корня: $x = \frac{5}{6}$

$$\text{и } x = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}; \quad x = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

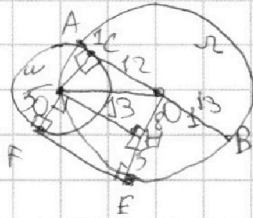
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Δ - треугольник



Найти: EF

$$AB = 1 + 25 = 26 \Rightarrow D \Rightarrow r = AO_1 = BO_1 = 13 \Rightarrow CO_1 = AO_1 - AC = 12$$

$$CO_1 = r = 13$$

В прямоугольном $\triangle OCO_1$:

$$OC^2 = 169 - 144 = 25$$

$$OC = r_1 = 5$$

Из O опустим перпендикуляр OH на O_1E . $OH \parallel FE \Rightarrow$ по теореме Фалеса $OF = HE = 5$.

$$O_1E = 13 \Rightarrow O_1H = 8$$

В прямоугольном $\triangle O_1OH$:

$$OH^2 = 169 - 64 = 105$$

$$OH = \sqrt{105}$$

$$OH^2 = 169 - 64 = 105$$

$$OH = \sqrt{105}$$

$$\angle FOH$$

$$\angle FOH = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

$$OH \parallel FE$$

$$FO \parallel HE$$

Все углы в четырехугольнике

$OHFE$ - прямые

$\Rightarrow OHFE$ - прямоугольник $\Rightarrow HE = OH = \sqrt{105}$

$$\text{Ответ: } \sqrt{105}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\frac{25z^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &= \frac{(5z-y)(5z+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5z+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} \\ &= \frac{3z(3z+y+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 2(5z-y)y}{y^2 + 3z^2} \\ &= \frac{8z^2 + 10zy - 2y^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{6z^2 + 2y^2 + 10zy - 4y^2}{y^2 + 3z^2} \\ &= 2 + \frac{10zy - 4y^2}{y^2 + 3z^2} = 2 + \frac{6z + 2y - 4y^2}{y^2 + 3z^2}\end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

x км/ч — скорость велосипедиста, y км/ч — скорость мотоциклиста, S км — расстояние между А и В.
 Т.к. мотоциклист приезжает раньше, то $y > x$

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = -1 \Rightarrow \frac{Sx - Sy}{xy} = -1 & (1) \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{x} = -49 \Rightarrow \frac{Sx^2 - Sy^2}{xy} = -49 & (2) \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = -0,6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) : \frac{Sx^2 - Sy^2}{Sx - Sy} &= \frac{S(x-y)(x+y)}{S(x-y)} = x+y = 49 \\ (1) : \frac{Sx - Sy}{S(x-y)} &= -1 \Rightarrow x = 49 - y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{49-y} = -1 \Rightarrow S\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y}\right) = -1 & (3) \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{49-y} = -49 \Rightarrow S\left(\frac{49-y}{y} - \frac{y}{49-y}\right) = -49 \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{56-y} = -0,6 \Rightarrow S\left(\frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y}\right) = -0,6 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (4) : \frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y} &= -0,6 \\ (3) : \frac{1}{y} - \frac{1}{49-y} &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{49-2y}{49y-y^2+2352} &= -0,6 \\ \frac{49-2y}{49y-y^2} &= -0,6 \\ \frac{49y-y^2}{49y-y^2+2352} &= 0,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29,4y - 0,6y^2 + 235,2 &= 49y - y^2 \quad | -10 \\ 294y - 6y^2 + 2352 &= 490y - 10y^2 \\ y^2 - 196y + 2352 &= 0 \\ y^2 - 49y + 588 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 2401 - 4 \cdot 588 = 49 = 7^2$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{49+7}{2} = 28 \text{ км/ч} & y_2 &= \frac{49-7}{2} = 21 \text{ км/ч} \\ x_1 &= \frac{49-28}{1} = 21 \text{ км/ч} & x_2 &= \frac{49-21}{1} = 28 \text{ км/ч} \end{aligned}$$

$$\frac{S}{28} - \frac{S}{21} = -1$$

$$\frac{-S}{84} = -1$$

$$S = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

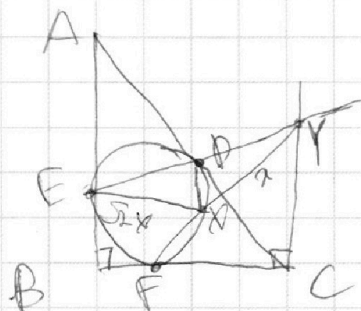
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{15xz + 3yz - z^2}{25x^2 - 6yz + 3z^2}$$



$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

AD:DC = ?

$$\frac{8y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8y + x}{xy} = \frac{15}{z}$$

$$8xz + xz = 15xy$$

~~8xz + xz = 15xy~~

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$(5x-y)(5x+y) - z^2 =$$

$$= 3z(5x+y) - z^2$$

$$3z(5x-y)$$

$$(5x-y)(5x+y) - z^2 =$$

$$\frac{3z(5x-y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{15xz + 15xz + 9z^2 - z^2}{8z^2 + 30xz} =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a, b - взаимно простые

$$a+b = m$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = m$$

$$(a+b) = m$$

$$(a+b)^2 - 4ab = m$$

$$y = 5x + 3z$$

$$\frac{15x}{2} - \frac{8z}{2}$$

$$\frac{15x - 8z}{2}$$

$$m = (a+b)^2 \quad m =$$

$$\Rightarrow 15x - 8z = m$$

ab - взаимно простые

$$m \neq m \Rightarrow m = 13$$



8 9

$$x = \frac{3z + y}{5}$$

$$\frac{25x^2 - 25z^2 - 30xz - 9z^2 - 7}{25x^2 + 30xz + 9z^2 + 3z^2} = \frac{-30xz - 10z^2}{25x^2 + 30xz + 12z^2}$$

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{8}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

? найм.

$$\frac{40x + 5x + \frac{8y}{x} - \frac{8y}{x} = 45}{40x + \frac{8y}{x} - \frac{8y}{x} = 46} \quad \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(3z+2y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2}$$

$$25x^2 - 10xy + y^2 = 9z^2$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} \cdot \frac{8}{y} = \frac{15}{2} - \frac{8}{x} = \frac{15x - 8z}{2x}$$

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{8}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} \cdot \frac{8}{y} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{5x-y)^2 - 2y^2 + 10xy - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + 10xy - 2y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{8z^2 + 10xy - 2y^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 10xy - 2y^2}{y^2 + 3z^2} + \frac{10xy - 4y^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\pm \frac{10xy - 4y^2}{y^2 + 3z^2} = 2 + \frac{10xy - 4y^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$5x = 3z + y$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_{\text{min}}/z = 0,6, \quad y_{\text{min}}/z = 0,6.$$

$$\frac{S}{y} + 1 = \frac{S}{z}$$

$$1 \cdot \frac{S}{y} = \frac{S}{z} - 49$$

$$\frac{S}{y+7} + 0,6 = \frac{S}{z+7}$$

$$S \left(\frac{1}{y+7} - \frac{1}{z+7} \right) = 0,6$$

$$S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z-y} \right)$$

$$56-y-y-7$$

$$(y+7)(56-y)$$

$$49-y-y-7$$

$$y(49-y)$$

$$49-2y$$

$$\frac{56y-y^2+392-7y}{49-2y} = 0,6$$

$$49y-y^2$$

$$\frac{S}{y} - \frac{S}{49-y} = 1$$

$$\frac{S(49-y) - S_y}{y} = -49$$

$$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{56-y} = -0,6$$

$$49y-y^2$$

$$49y-y^2+392 = 0,6$$

$$28,4y - 0,6y^2 + 235,2 =$$

$$= 49y - y^2$$

$$294y - 6y^2 - 235,2 =$$

$$= 490y - 10y^2$$

$$4y^2 - 186y + 235,2 = 0$$

$$4y^2 - 186y + 588$$

$$D = 2108 - 2352 =$$

$$\frac{S}{y} - \frac{S}{z} = -1$$

$$\frac{S_z - S_y}{y} = -49$$

$$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{z+7} = -0,6$$

$$S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) = -49$$

$$S_x - S_y$$

$$\frac{S_x - S_y}{xy} = -1$$

$$\frac{S_x^2 - S_y^2}{xy} = -49$$

$$\frac{S_x^2 - S_y^2}{xy} = -49$$

$$\frac{S_x^2 - S_y^2}{S_x - S_y} = 49$$

$$S(2xy)(x+y)$$

$$\frac{S(2xy)}{S(2xy)} = 49$$

$$x+y = 49$$

$$x = 49 - y$$

$$S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right) = -1$$

$$\frac{588}{2}$$

$$\frac{392}{6}$$

$$2352$$

$$\frac{2352}{4}$$

$$\frac{20}{35}$$

$$\frac{32}{32}$$

$$\frac{32}{32}$$

$$\frac{32}{32}$$

$$S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y} \right) = -1$$

$$S \left(\frac{49-y}{y} - \frac{y}{49-y} \right) = -49$$

$$S \left(\frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y} \right) = -0,6$$

$$\frac{49-y}{y} - \frac{y}{49-y}$$

$$\frac{148-y}{y} - \frac{y}{49-y}$$

$$\frac{2408-98y+y^2-y^2}{y(49-y)}$$

$$\frac{49-y-y}{y(49-y)}$$

$$\frac{49-y-y}{y(49-y)}$$

$$= 49$$

$$= 49$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

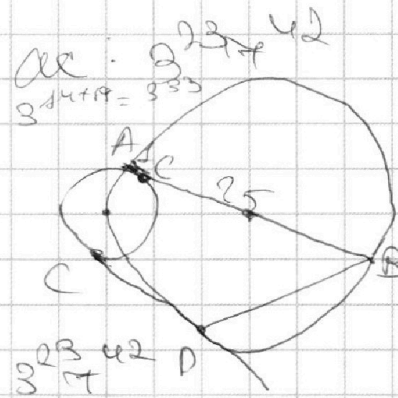
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$ab: 3^{14} \cdot 13$ $bc: 3^{19} \cdot 17$
 $a^2b^2c^2: 3^{56} \cdot 7^2$
 $abc: 3^{28} \cdot 36$
 $ab \min = 3^{14} \cdot 13$
 $bc \min = 3^{19} \cdot 17$
 $ac \min = 3^{23} \cdot 42$



$a = 3^{24} \cdot 2$ $b = 3^{12} \cdot 11$ $c = 3^{11}$
 a, b, c
 $3^{14} \cdot 13$ $3^{19} \cdot 17$ $3^{23} \cdot 42$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 11ab = (a+b)^2 - 11ab$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$D = 25 - 24 \cdot 3 = -47$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 3 = -11$$

$$x = \frac{1}{6}$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 2$$

$$(3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1) = 5 - 6x (\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6 = \frac{75}{36} - \frac{25}{6} + 6 = \frac{75 - 150 + 216}{36} = \frac{141}{36}$$

$$3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1 = \frac{75 + 30 + 36}{36} = \frac{141}{36}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Начина проверку ОДЗ: $3x^2 - 5x + 6 \geq 0$ у параболы ветви вверх
 $D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = -47 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ подходит

$3x^2 + x + 1 \geq 0$ у параболы ветви вверх (а) $\Rightarrow$ подходит
 $D = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow$ подходит

ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$,
но для начала докажем, что оно $\neq 0$. Если равно,
то $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 3x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$ но мы уже доказали, что у
параболы ветви вверх и $D < 0 \Rightarrow$ они не равны, т.к. нет
корней.

$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$5 - 6x = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

Можно сократить на $5 - 6x$, но для начала проверим
сводится ли к корню $x = \frac{5}{6}$ (т.е. может ли быть $5 - 6x = 0$).

$$\begin{aligned} \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} &= \sqrt{\frac{75}{36} - \frac{25}{6} + \frac{216}{36}} - \\ &= \sqrt{\frac{75}{36} + \frac{80}{36} - \frac{216}{36}} = \sqrt{\frac{75}{36} - \frac{150}{36} + \frac{216}{36}} - \sqrt{\frac{75}{36} + \frac{30}{36} + \frac{36}{36}} = \\ &= \sqrt{\frac{141}{36}} - \sqrt{\frac{141}{36}} = 0 = 5 - 6x \text{ при } x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Т.е. $x = \frac{5}{6}$ является корнем уравнения.

При $x \neq \frac{5}{6}$:

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1$$

Тогда составим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 6x - 4$$

$$\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2 \quad (3x - 2 \geq 0)$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0 \quad D = 169 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 97$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \quad x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нужно проверить эти корни на $3x-2 \geq 0$

$$3. \frac{13+\sqrt{97}}{124} - 2 = \frac{13+\sqrt{97}-8}{4} = \frac{5+\sqrt{97}}{4} > 0 \quad \checkmark$$

$$3. \frac{13-\sqrt{97}}{124} - 2 = \frac{13-\sqrt{97}-8}{4} = \frac{5-\sqrt{97}}{4} \quad (\sqrt{97} > 5) \Rightarrow \frac{5-\sqrt{97}}{4} < 0$$

Получается, у уравнения два корня: $x = \frac{5}{6}$ и $x = \frac{5+\sqrt{97}}{4}$

Ответ: $x = \frac{5}{6}$; $x = \frac{5+\sqrt{97}}{4}$