



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку $a, b, c \in \mathbb{N}$, то ab минимум $= 3^{14+13}$;
 bc минимум $= 3^{19+17}$, ac минимум $= 3^{23+42}$.

Для минимального значения abc мы и будем рассматривать эти минимумы, поскольку при них достигается $\min abc$ (если рассматривать не минимумы, то и abc будут больше).

Имеем:

$$\begin{aligned} ab &= 3^{14+13} & b &= \frac{3^{14+13}}{a} \\ bc &= 3^{19+17} & c &= \frac{3^{23+42}}{a} \\ ac &= 3^{23+42} \\ \frac{3^{14+13} \cdot 3^{23+42}}{a^2} &= 3^{19+17} \end{aligned}$$

$$\frac{3^{37+55}}{a^2} = 3^{19+17}$$

$$\frac{3^{18+38}}{a^2} = 1$$

$$a = 3^9 \cdot 7^{19} \text{ (без шестерки, т.к. } a \in \mathbb{N})$$

$$\text{Тогда } b = \frac{3^{14+13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = \frac{3^5}{7^6}$$

$$c = \frac{3^{23+42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$abc = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot \frac{3^5}{7^6} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{9+5+14} \cdot 7^{19+23-6} =$$

$$= 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Это минимум, т.к. все
факторы минимальные ab, bc, ac .

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{36}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$. Если дроби сократима
на m , то $a+b \div m$ и $(a+b)^2-9ab \div m$

$a+b \div m \Rightarrow (a+b)^2 \div m \Rightarrow 9ab \div m$. Поскольку $\frac{a}{b}$ — несократима,
то a и b — взаимно простые.

Без ограничения общности $a \div m$ (с b взаимно просто). Тогда
 $b \div m \Rightarrow a+b \div m \Rightarrow$ сократить не можем \Rightarrow ни a , ни
 b не могут $\div m$. $9ab \div m$
 $\{a, b \div m \Rightarrow$ макс. $m = 1$.

Ответ: $m = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

Сначала проверим ОДЗ: $3x^2-5x+6 \geq 0$

$$D = -47 < 0, 3 > 0 \Rightarrow \text{подходят любые } x$$

$$3x^2+x+1 \geq 0$$

$$D = 1-4 \cdot 3 = -11 < 0, 3 > 0 \Rightarrow \text{подходят любые } x$$

Далее рассмотрим часть уравнения на

$$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1}, \text{ но для начала докажем что оно } \neq 0. \text{ Если равно, то } \begin{cases} 3x^2-5x+6=0 \\ 3x^2+x+1=0 \end{cases}$$

но у них нет корней \Rightarrow они не равны 0.

$$3x^2-5x+6 - 3x^2-x-1 = (5-6x) (\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1})$$

$$5-6x = (5-6x) (\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1})$$

Можно сократить на $5-6x$, если $x \neq \frac{5}{6}$.

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = \sqrt{\frac{349}{36}} - \sqrt{\frac{149}{36}} =$$

$$= 0 = 5-6x \Rightarrow x = \frac{5}{6} - \text{корень}$$

$x \neq \frac{5}{6}$.

$$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$$

$$2\sqrt{3x^2+x+1} = 6x-4$$

$$\sqrt{3x^2+x+1} = 3x-2 \quad (3x-2 \geq 0)$$

$$3x^2+x+1 = 9x^2-12x+4$$

$$6x^2-13x+3=0$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{13^2 - 72}}{12}, x_2 = \frac{13 - \sqrt{13^2 - 72}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверим на $3x - 2 \geq 0$ этот корень.

$$3 \cdot \frac{5 + \sqrt{97}}{12} - 2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{4} > 0$$

$$3 \cdot \frac{5 - \sqrt{97}}{12} - 2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{4} (\sqrt{97} > \sqrt{25}) < 0 \text{ - не корень}$$

Получается, у уравнения два корня: $x = \frac{5}{6}$

и $x = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$

Ответ: $x = \frac{5}{6}; x = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

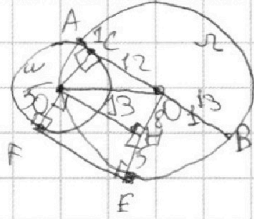
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Δ - треугольник



Найти: EF

$$AB = 1 + 25 = 26 = D \Rightarrow r = AO_1 = BO_1 = 13 \Rightarrow CO_1 = AO_1 - AC = 12$$

$$CO_1 = r = 13$$

В прямоугольном $\triangle OCO_1$:

$$OC^2 = 169 - 144 = 25$$

$$OC = r_1 = 5$$

Из центра O опустим перпендикуляр OH на O_1E . $OH \parallel FE \Rightarrow$ по теореме Пифагора $OF = HE = 5$.

$$O_1E = 13 \Rightarrow O_1H = 8$$

В прямоугольном $\triangle O_1OH$:

$$OH^2 = 169 - 64 = 105$$

$$OH = 5\sqrt{5}$$

$$OH^2 = 169 - 64 = 105$$

$$OH = \sqrt{105}$$

$\angle FOH$

$$\angle FOH = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

$OH \parallel FE$

$FO \parallel HE$

Все углы в четырехугольнике

O_1HFE - прямые

$\Rightarrow O_1HFE$ - прямоугольник $\Rightarrow FE = OH = \sqrt{105}$

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \frac{25z^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &= \frac{(5z-y)(5z+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5z+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} \\ &= \frac{3z(3z+y+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 2(5z-y)y}{y^2 + 3z^2} \\ &= \frac{8z^2 + 10z - 2y^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{6z^2 + 2y^2 + 10z - 4y^2}{y^2 + 3z^2} \\ &= 2 + \frac{10z - 4y^2}{y^2 + 3z^2} = 2 + \frac{6z + 2y - 4y^2}{y^2 + 3z^2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

x км/ч — скорость велосипедиста, y км/ч — скорость мотоциклиста, S км — расстояние между А и В
т.к. мотоциклист приезжает раньше, то $y > x$

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = -1 \Rightarrow \frac{Sx - Sy}{xy} = -1 & (1) \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{x} = -49 \Rightarrow \frac{Sx^2 - Sy^2}{xy} = -49 & (2) \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = -0,6 \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{Sx^2 - Sy^2}{Sx - Sy} = \frac{S(x-y)(x+y)}{S(x-y)} = x+y = 49$$

$y = 49 - x$

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{49-y} = -1 \Rightarrow S\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y}\right) = -1 & (3) \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{49-y} = -49 \Rightarrow S\left(\frac{49-y}{y} - \frac{y}{49-y}\right) = -49 \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{56-y} = -0,6 \Rightarrow S\left(\frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y}\right) = -0,6 & (4) \end{cases}$$

$$\frac{(4)}{(3)} = \frac{\frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y}} = 0,6$$

$$\frac{49-2y}{49y-y^2+392} = 0,6$$

$$\frac{49-2y}{49y-y^2} = 0,6$$

$$\frac{49y-y^2}{49y-y^2+392} = 0,6$$

$$29,4y - 0,6y^2 + 392 = 49y - y^2 \quad | -10$$

$$294y - 6y^2 + 392 = 490y - 10y^2$$

$$4y^2 - 196y + 392 = 0$$

$$y^2 - 49y + 98 = 0$$

$$D = \frac{2401 - 392}{49 + 49} = 49 = 7^2$$

$$y_1 = \frac{49+7}{2} = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow x = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$y_2 = \frac{49-7}{2} = 21 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \Rightarrow x = 28 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$\frac{S}{28} - \frac{S}{21} = -1$$

$$\frac{-S}{84} = -1$$

$$S = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

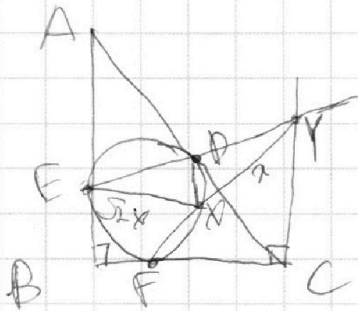
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{15xz + 3yz - z^2}{25x^2 - 6yz + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$



AD:DC = ?

$$\frac{8y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8y + x}{8xy} = \frac{15}{z}$$

$$8zy + xz = 15xy$$

~~8zy + xz = 15xy~~

$$\frac{8}{z} + \frac{1}{y} = \frac{15}{x}$$

$$(5x-y)(5x+y) - z^2 =$$

$$= 3z(5x+y) - z^2$$

$$3z(5x-y)$$

$$\frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{3z(5x+y) - z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{3z(5x+y) - z^2}$$

$$= \frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{15xz + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{15xz + 15xz + 9z^2 - z^2}{25x^2 - 30xz + 9z^2} =$$

=

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b - взаимно простые
 $a+b = m$
 $a^2 - 2ab + b^2 = m$
 $(a+b) \cdot m$
 $(a+b)^2 - 2ab = m$
 ab - взаимно простое
 $m \neq m \Rightarrow m = 13$

$x = \frac{3z + y}{5}$

$$\frac{25x^2 - 25z^2 - 30xz - 9z^2 - 7}{25x^2 + 30xz + 9z^2 + 3z^2} = \frac{-30xz - 10z^2}{25x^2 + 30xz + 12z^2}$$

$5x - y = 3z$
 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$? камен.

$$\frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(3z+2y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2}$$

$25x^2 - 10xy + y^2 = 9z^2$

$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{15}{z} - \frac{8}{x} = \frac{15z - 8z}{z}$
 $y = 5x - 3z$

$5x - y = 3z$
 $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$\frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2}$

$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2}$

$\frac{(5x-y)^2 - 2y^2 + 10xy - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + 10xy - 2y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$

$\frac{8z^2 + 10xy - 2y^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 10xy - 2y^2}{y^2 + 3z^2} \Rightarrow x = 3z + y$

$\frac{10xy - 4y^2}{y^2 + 3z^2} = 2 + \frac{10xy - 4y^2}{y^2 + 3z^2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_{max} = 0,6, \quad y_{max} = 0,6$$

$$\frac{S}{y} + 1 = \frac{S}{x}$$

$$x \cdot \frac{S}{y} = y \cdot \frac{S}{x} - 49$$

$$\frac{S}{y+7} + 0,6 = \frac{S}{x+7}$$

$$S \left(\frac{1}{y+7} - \frac{1}{x+7} \right) = 0,6$$

$$S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x-y} \right)$$

$$\frac{56-y-y-7}{(y+7)(56-y)} = 0,6$$

$$\frac{49-y-y}{y(49-y)}$$

$$\frac{49-2y}{56y-y^2+392-7y} = 0,6$$

$$\frac{49-2y}{49y-y^2} \cdot \frac{S}{y} - \frac{S}{49-y} = 1$$

$$\frac{S(49-y) - S_y}{y} = -49$$

$$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{56-y} = -0,6$$

$$\frac{49y - y^2}{49y - y^2 + 392} = 0,6$$

$$28,4y - 0,6y^2 + 235,2 =$$

$$= 49y - y^2$$

$$294y - 0,6y^2 + 235,2 =$$

$$= 490y - 10y^2$$

$$4y^2 - 186y + 235,2 = 0$$

$$y^2 - 46,5y + 58,8 = 0$$

$$D = 2108 - 2352 =$$

$$\frac{S}{y} - \frac{S}{x} = -1$$

$$\frac{Sx}{xy} - \frac{Sy}{xy} = -1$$

$$\frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = -0,6$$

$$S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = -49$$

\otimes

$$\frac{Sx - Sy}{xy} = -1$$

$$\frac{Sx^2 - Sy^2}{xy} = -49$$

$$\frac{Sx^2 - Sy^2}{Sx - Sy} = 49$$

$$S(x+y)(x-y)$$

$$S(x-y) = 49$$

$$x+y = 49$$

$$x = 49 - y$$

$$S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = 1$$

$$\frac{56y}{2}$$

$$\frac{392}{6}$$

$$\frac{2352}{4}$$

$$S \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x-y} \right) = -1$$

$$S \left(\frac{49-y}{y} - \frac{1}{49-y} \right) = -49$$

$$S \left(\frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y} \right) = -0,6$$

$$\frac{49-y}{y} \cdot \frac{49-y}{49-y} = 49$$

$$\frac{2408 - 98y + y^2 - y^2}{y(49-y)} = 49$$

$$\frac{49-y-y}{y(49-y)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

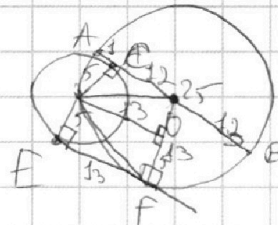
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

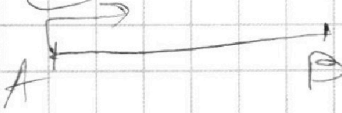


$ab: 3^{14} \cdot 3$
 $bc: 3^{19} \cdot 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^4 \cdot \min abc - ?$
 $ac: 3^{23} \cdot 3^2 \cdot 3^9 \cdot 3^8 \cdot 3^6$



$a = 3^5 \cdot 7^4$
 $b = 3^4 \cdot 7^{25}$
 $c = 3^9 \cdot 7^{29}$

$\frac{1}{x} = 2$
 $\frac{1}{x} = -49$
 $\frac{1}{x} = -0,6$
 $\frac{1}{x} = -1$
 $\frac{1}{x} = -49$
 $\frac{1}{x} = -0,6$



$x_{route} = 0,6$
 $y_{route} = 2,1$

$a^2 b^2 c^2 = 3^{19} \cdot 7^{17}$
 $abc = 3^{12} \cdot 7^{13}$
 $b = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{a}$
 $c = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{a}$

$y - x = -1$
 $y = x - 1$
 $\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+4} = -0,6$

$\frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{x}$
 $x \cdot \frac{1}{y} = y \cdot \frac{1}{x} - 49$
 $\frac{1}{y} + 0,6 = \frac{1}{x}$

$\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{a^2} = 3^{19} \cdot 7^{17}$
 $\frac{3^{18} \cdot 7^{38}}{a^2} = 1$
 $a = 3^9 \cdot 7^{19} \Rightarrow b = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$
 $c = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$
 $abc = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23}$
 $= 3^{9+14+14} \cdot 7^{19+23+23} = 3^{28} \cdot 7^{36}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$ $bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$

~~$a^2 b^2 c^2 = 3^{56} \cdot 7^{72}$~~

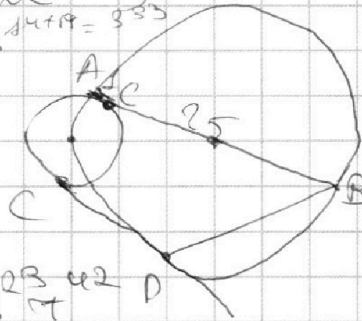
~~$abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$~~

$ab \min = 3^{14} \cdot 7^{13}$

$bc \min = 3^{19} \cdot 7^{17}$

$ac \min = 3^{23} \cdot 7^{42}$

$ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$
 $3^{14+9} = 3^{23}$



~~$a = 3^{27} \cdot 7^2$ $b = 3^{12} \cdot 7^{11}$ $c = 3^{11} \cdot 7^{19}$~~

~~$a = 3^{14} \cdot 7^{13}$~~

~~$b = 3^{19} \cdot 7^{17}$~~

~~$c = 3^{23} \cdot 7^{42}$~~

$a^2 + 2ab + b^2 - 11ab = (a+b)^2 - 11ab$

$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$D = 25 - 24 \cdot 3 = -47$

$3x^2 + x + 1 \geq 0$

$D = 1 - 4 \cdot 3 = -11$

~~$x = \frac{1}{6}$~~

~~$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1$~~

~~$3x^2 - 5x + 6 = 2$~~

~~$(3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1) = 5 - 6x \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$~~

$3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6 = \frac{75}{36} - \frac{25}{6} + 6 = \frac{75 - 150 + 216}{36} = \frac{141}{36}$

$3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1 = \frac{75 + 30 + 36}{36} = \frac{141}{36}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Начала проверим ОДЗ: $3x^2 - 5x + 6 \geq 0$ у параболы ветви вверх
 $D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = -47 < 0 \Rightarrow$ \Rightarrow подходит

$3x^2 + x + 1 \geq 0$ у параболы ветви вверх (а>0) \Rightarrow подходит
 $D = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow$ подходит

ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$

Далее обе части уравнения на $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$,
 но для начала докажем, что оно $\neq 0$. Если равно,
 то $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 3x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$ но мы уже доказали, что у
 этой параболы ветви вверх и $D < 0 \Rightarrow$ они не равны, т.к. нет
 корней.

$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$5 - 6x = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

Можно сократить на $5 - 6x$, но для начала проверим
 выполняется ли корнем $x = \frac{5}{6}$ (т.е. может ли быть $5 - 6x = 0$).

$$\begin{aligned} \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} &= \sqrt{\frac{75}{36} - \frac{25 \cdot 216}{6 + 36}} - \\ &= \sqrt{\frac{75}{36} + \frac{80}{36} - \frac{36}{36}} = \sqrt{\frac{75}{36} - \frac{150 \cdot 216}{36 + 36}} - \sqrt{\frac{75}{36} + \frac{30 \cdot 36}{36}} = \\ &= \sqrt{\frac{141}{36}} - \sqrt{\frac{141}{36}} = 0 = 5 - 6x \text{ при } x = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Т.е. $x = \frac{5}{6}$ является корнем уравнения.

При $x \neq \frac{5}{6}$:

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1$$

Тогда составим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3x^2 + x + 1} &= 6x - 4 \\ \sqrt{3x^2 + x + 1} &= 3x - 2 \quad (3x - 2 \geq 0) \end{aligned}$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0 \quad D = 169 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 97$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \quad x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нужно проверить эти корни на $3x-2 \geq 0$

$$3 \cdot \frac{13 + \sqrt{97}}{124} - 2 = \frac{13 + \sqrt{97} - 8}{4} = \frac{5 + \sqrt{97}}{4} > 0 \quad \checkmark$$

$$3 \cdot \frac{13 - \sqrt{97}}{124} - 2 = \frac{13 - \sqrt{97} - 8}{4} = \frac{5 - \sqrt{97}}{4} \quad (\sqrt{97} > 5) \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{97}}{4} < 0$$

Получается, у уравнения два корня: $x = \frac{5}{6}$ и $x =$
 $= \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$

Ответ: $x = \frac{5}{6}$; $x = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$