



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклиstu на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку $a, b, c \in N$, то ab меньше или $= 3^{14} \cdot 7^{13}$

bc меньше или $= 3^{19} \cdot 7^{17}$, ac меньше или $= 3^{23} \cdot 7^{42}$.

Для дальнейшего рассмотреть эти числа, поскольку при них достигается минимум (если рассматривать не числа, то и abc будет больше).

Числа:

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{a}$$

$$c = \frac{3^{19} \cdot 7^{17}}{a}$$

$$\frac{3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{23} \cdot 7^{42}}{a^2} = 3^{89} \cdot 7^{87}$$

$$\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{a^2} = 3^{89} \cdot 7^{87}$$

$$\frac{3^{18} \cdot 7^{38}}{a^2} = 1$$

$$a = 3^5 \cdot 7^{19} \text{ (это минимально, т.к. } a \in N)$$

$$\text{Тогда } b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^5 \cdot 7^{19}} = \frac{3^9}{7^6}$$

$$c = \frac{3^{19} \cdot 7^{17}}{3^5 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$abc = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot 7^5 \cdot 3^{14} \cdot 7^{13} = 3^{45+14+23} \cdot 7^{19+14+6} =$$

$$= 3^{88} \cdot 7^{36}$$

Это минимально, т.к. нет
других минимальных ab, bc, ac .

Ответ: $3^{88} \cdot 7^{36}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} \cdot \text{ Если } a \neq b \text{ сократим}$$

на m , то $a+b : m$ и $(a+b)^2 - 3ab : m$

$a+b : m \Rightarrow (a+b)^2 : m \Rightarrow 3ab : m$. Поскольку a -нечетное, то a и b - взаимно простые.
Без ограничения общности $a : m$ ($a : m$ максимум). Тогда
 $b : m \Rightarrow a+b : m \Rightarrow$ Сократить не можем \Rightarrow что a и b не могут быть $: m$. $3ab : m \Rightarrow$ макс. $m = 18$.

Ответ: $m = 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Сначала проверим ОДЗ: $3x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$$D = -47 < 0, \quad 3 > 0 \Rightarrow \text{ногодят любые числа}$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow \text{подходят любые числа}$$

Дано равенство частей уравнения на

$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$ нет для решения доказательство оно $\neq 0$. Если равно, то $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 3x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$ но у них нет корней \Rightarrow они не равны 0.

$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 8 = (5 - 6x) (\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$5 - 6x = (5 - 6x) (\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

Можно сократить на $5 - 6x$, если $x \neq \frac{5}{6}$.

$$x = \frac{5}{6}.$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{25}{36} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = \sqrt{\frac{348}{36}} - \sqrt{\frac{145}{36}} =$$

$$= 0 = 5 - 6x \Rightarrow x = \frac{5}{6} - \text{корень}$$

$$x \neq \frac{5}{6}.$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 8 \end{array} \right.$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 8$$

$$2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 6x - 4$$

$$\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2 \quad (3x - 2 \geq 0)$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0 \quad D = 97$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}, \quad x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверим на $3x - 2 \geq 0$ зоне корней.

$$3. \frac{\sqrt{3} + \sqrt{9x}}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{5 + \sqrt{9x}}{4} \geq 0$$

$$3. \frac{\sqrt{3} - \sqrt{9x}}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{5 - \sqrt{9x}}{4} (\sqrt{9x} > \sqrt{25}) < 0 \text{ - верн}$$

Получаем, что уравнение для корня: $x = \frac{2}{9}$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{9}; x = \frac{5 + \sqrt{9x}}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

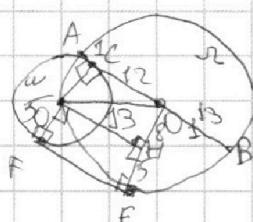
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Δ-треугольник



Найти: EF

$$AB = 1 + 25 = 26 \Rightarrow r = AO_1 = BO_1 = \\ = 13 \Rightarrow CO_1 = \\ = AO_1 - AC = 12$$

$$CO_1 = r = 13$$

В прямоугольном $\triangle CO_1O$:

$$OC^2 = 169 - 144 = 25 \\ OC = r_1 = 5$$

радиус w

из О опущен перпендикуляр OH на O_1E . $OH \parallel FF \Rightarrow$ гомо-
генные \triangle $OP = HE = 5$.

$$O_1E = 13 \Rightarrow O_1H = 8$$

В прямоугольном $\triangle O_1OH$:

$$OH^2 = 169 - 64 = 105$$

~~$$OH = \sqrt{105}$$~~

$$OH^2 = 169 - 64 = 105$$

~~$$OH = \sqrt{105}$$~~

~~$$OH = 10\sqrt{3}$$~~

$$\angle FOH = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

~~$$OH \parallel FE$$~~

~~$$FO \parallel HE$$~~

все углы в четырехугольнике

$OFHE$ - прямые

$\Rightarrow OH \parallel FE$
примыкаю-
щих $\angle XFE =$
 $= OH = \sqrt{105}$

Объем: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} &= \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3x(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} \\ &= \frac{3x(3z+y+4) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 2(5x-y)y}{y^2 + 3z^2} = \\ &= \frac{8z^2 + 10x - 2y^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{6z^2 + 2y^2 + 10x - 4yz}{y^2 + 3z^2} = \\ &= 2 + \frac{10x - 4yz}{y^2 + 3z^2} = 2 + \frac{6z + 2y - 4yz}{y^2 + 3z^2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Легенда - скорость велосипедиста, Число - скорость мотоциклиста, $S_{\text{вс}} - \text{расстояние между } A \text{ и } B$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = -1 \Rightarrow \frac{Sx - Sy}{xy} = -1 \quad (1) \\ \frac{S}{y} - \frac{Sy}{x} = -49 \Rightarrow \frac{Sx^2 - Sy^2}{xy} = -49 \quad (2) \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = -0,6 \end{array} \right.$$

Т.к. мотоциклист приезжал
стремительно, то $y > x$

$$\frac{(2)}{(1)} : \frac{Sx^2 - Sy^2}{Sx - Sy} = \frac{S(x-y)(x+y)}{S(x-y)} = x+y = 49$$

$y = 49 - x$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{y} - \frac{S}{49-y} = -1 \Rightarrow S\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y}\right) = -1 \quad (3) \\ \frac{S(49-y)}{Sy} - \frac{Sy}{S(49-y)} = -49 \Rightarrow S\left(\frac{49-y}{y} - \frac{y}{49-y}\right) = -49 \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{56-y} = -0,6 \Rightarrow S\left(\frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y}\right) = -0,6 \quad (4) \end{array} \right.$$

$$\frac{(4)}{(3)} : \frac{\frac{1}{y+7} - \frac{1}{56-y}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y}} = 0,6$$

$$\frac{49-y}{49y - y^2 + 392} = 0,6$$

$$49y - y^2$$

$$2844y - 0,6y^2 + 2352 = 49y - y^2 \quad | -10$$

$$2844y - 0,6y^2 + 2352 = 490y - 10y^2$$

$$y^2 - 196y + 2352 = 0$$

$$y^2 - 149y + 588 = 0$$

$$D = 2401 - 49 \cdot 2352 = 49 = 7^2$$

$$y_1 = \frac{49 + 7}{2} = 28 \text{ км/ч}$$

$$y_2 = \frac{49 - 7}{2} = 21 \text{ км/ч}$$

$$\frac{S_{13}}{28} - \frac{S_{14}}{21} = -1$$

$$\frac{-S}{84} = -1$$

$$S = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

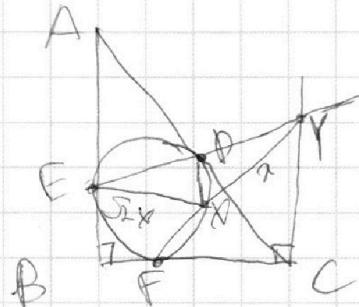


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{(5x-y)(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{3z(5x+y) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$
$$= \frac{15xz + 3yz - z^2}{25x^2 - 6yz + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

AD: DC - ?



$$x + y = \frac{15}{2}$$

$$\frac{8y + x}{8y} = \frac{15}{2}$$

$$8zy + xz = 15xy$$

~~10x 8zy~~

$$x + \frac{1}{y} = \frac{15}{2}$$

$$(5x-y)(5x+y) - z^2 =$$
$$= 3z(5x+y) - z^2$$

$$(5x-y)(5x+y) - z^2 =$$
$$3z(5x+y) - z^2 =$$
$$= \frac{15x^2 + 3yz - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$
$$= \frac{15x^2 + 3yz - z^2}{(5x-3z)^2 + 3z^2} =$$

$$\frac{3z^2 + 6zy + y^2 - z^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$
$$= \frac{15x^2 + 15xy + z^2}{25x^2 - 30xy + 9z^2} =$$
$$= \frac{8z^2 + 130xz}{8z^2 + 130xz}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_{\text{пол}} = 78, \quad y_{\text{пол}} = 74.$$

$$\frac{s}{y} + \frac{s}{x} = \frac{s}{7}$$

$$x \cdot \frac{s}{y} = y \cdot \frac{s}{x} - 4g$$

$$\frac{s}{y+g} + 0,6 = \frac{s}{x+g}$$

$$\frac{56-y}{y+g} \cdot \frac{49-y}{x+g}$$

$$s \left(\frac{1}{y+g} - \frac{1}{x+g} \right) = 0,6$$

$$s \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y} \right)$$

$$56-y-y-4$$

$$(y+g)(56-y)$$

$$\frac{49-y-y}{y(y+g)} = 0,6$$

$$49-2y$$

$$\frac{49-2y}{56y-y^2+392-7y} = 0,6$$

$$49-2y$$

$$\frac{s}{y+g} - \frac{s}{49-y} = 1$$

$$\frac{s(49-y)-sy}{y(49-y)} = -4g$$

$$\frac{s}{y+g} - \frac{s}{56-y} = -0,6$$

$$\frac{49y-y^2}{49y-y^2+392} = 0,6$$

$$28,4y - 0,6y^2 + 235,2 =$$

$$= 49y - y^2$$

$$294y - 6y^2 + 2352 =$$

$$= 490y - 10y^2$$

$$4y^2 - 186y + 2352 = 0$$

$$y^2 - 49y + 588$$

$$D = 208 - 2352 =$$

$$\frac{s}{x} - \frac{s}{y} = -g$$

$$\frac{sx}{y} - \frac{sy}{x} = -4g$$

$$\cancel{s} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) - \frac{s}{y+g} = -0,6$$

$$\cancel{s} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = -4g \quad \frac{580}{2}$$

$$\cancel{s}$$

$$\frac{sx - sy}{xy} = -g$$

$$\frac{sx^2 - sy^2}{xy} = -4g$$

$$\frac{sx^2 - sy^2}{xy} = 4g$$

$$\frac{sx - sy}{xy} = 4g$$

$$\frac{s(x-y)(x+y)}{s(x-y)} = 4g$$

$$x+y = 4g$$

$$x = 49-y$$

$$s \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{49-y} \right) = -1$$

$$s \left(\frac{49-y}{y} - \frac{y}{49-y} \right) = -4g$$

$$s \left(\frac{1}{y+g} - \frac{1}{49-y} \right) = -0,6$$

$$\frac{49-y}{y+g} - \frac{y}{49-y} = -0,6$$

$$s \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = -g$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

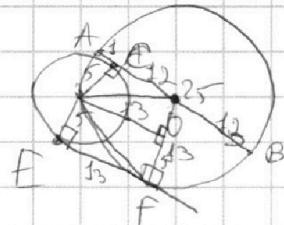


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 3^{54} \times 3 \\ bc &: 3^{48+14} \times 3^{5-7} \text{ min abc - ?} \\ ac &: 3^{23+10} \times 3^{9-7} \times 3^{6-2} \end{aligned}$$



abc

$$3^{23+42}$$

$$c = 3^{5+4}$$

$$\frac{a}{b} = 3^{4+25} \quad a = 3^{4+25}$$

$$\frac{c}{b} = 3^{9+29}$$

$$y-x = -1$$

$$a b c : 3^{19+19}$$

$$abc = 3^{23+42}$$

$$abc = 3^{82+42}$$

$$b = \frac{3^{14}}{a}$$

$$c = \frac{3^{23+42}}{a}$$

$$\frac{3^{37+45}}{a^2} = 3^{19+19+17}$$

$$\frac{3^{58+43}}{a^2} = 1$$

$$a = 3^{9+19} \Rightarrow b = \frac{3^{14}}{3^{28+7+16}} = 3^{16}$$

$$c = \frac{3^{23+42}}{3^{14+19}} = 3^{14+42}$$

$$abc = 3^{9+19+19+19+42}$$

$$= 3^{9+5+14+7+36} = 3^{14+19+36}$$

$$= 3^{28+7+36}$$

$$\frac{c}{b} - \frac{s}{x} = 8$$

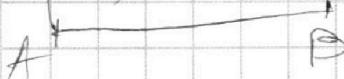
$$\frac{s}{b} - \frac{s}{x} = -49$$

$$\frac{s}{x} - \frac{s}{x+1} = -0,6$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = -1$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = -49$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = -0,6$$



2 этап - 7 б.

Число - 200.

$$\begin{cases} \frac{b}{a} + \frac{s}{x} + 1 = \frac{s}{x} \\ \frac{s}{x} = y \cdot \frac{s}{x} - 49 \\ \frac{s}{x+1} + 0,6 = \frac{s}{x+1} \end{cases}$$

$$\frac{3^{37+45}}{a^2} = 3^{19+19+17}$$

$$\frac{3^{58+43}}{a^2} = 1$$

$$a = 3^{9+19} \Rightarrow b = \frac{3^{14}}{3^{28+7+16}} = 3^{16}$$

$$c = \frac{3^{23+42}}{3^{14+19}} = 3^{14+42}$$

$$abc = 3^{9+19+19+19+42}$$

$$= 3^{9+5+14+7+36} = 3^{14+19+36}$$

$$= 3^{28+7+36}$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$ab = 3^{14+13} \quad bc = 3^{19+17}$$

$$abc = 3^{26+17} \quad 3^{56+72}$$

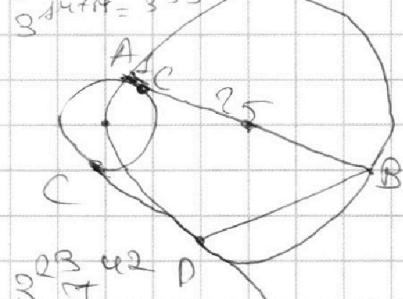
$$abc = 3^{28+36}$$

$$ab \min = 3^{14+13}$$

$$bc \min = 3^{18+17}$$

$$ac \min = 3^{23+42}$$

$$ac = 3^{23+42}$$



$$\cancel{ab=3^{23+2}} \quad b=3^{18+11} \quad \cancel{ac=3^{23+42}}$$

$$ab = 3^{23+2}$$

$$3^{14+13}$$

$$3^{28+36}$$

$$3^{23+42}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 11ab = (a+b)^2 - 11ab$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 3 = -4 \neq$$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 3 = -11$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 + x - 1$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 2$$

$$(3x^2 - 5x + 6 - 2) = 5 - 6x \quad \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$$

$$3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6 = (5 - 6 \cdot \frac{5}{6}) \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$$

$$=\frac{75-50+216}{36} = \frac{149}{36}$$

$$3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1 = \frac{75+30}{36} = \frac{105}{36}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Сначала проверим ОДЗ: $3x^2 - 5x + 6 \geq 0$ Черновик вверх
 $D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = -47 < 0 \Rightarrow$ 6)
 \Rightarrow подходит

$$3x^2 + x + 1 \geq 0$$
 Черновик вверх (а) Черновик вниз

$$D = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow$$
 подходит Черновик вниз

$$ODZ: x \in (-\infty; +\infty)$$

Далее нужно обе части уравнения на $\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1}$
но для начала докажем, что оно $\neq 0$. Если равен
то $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 = 0 \\ 3x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$ то есть доказали, что ч
етыре корня вверх и $D < 0 \Rightarrow$
 \Rightarrow они не равны, т.к. нет
корней.

$$3x^2 - 5x + 6 - 3x^2 - x - 1 = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

$$5 - 6x = (5 - 6x)(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1})$$

Можно сократить на $5 - 6x$, но для начала проверки
появляются еще корни $x = \frac{5}{6}$ (т.е. может еще быть $5 - 6x = 0$).

$$\sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} + 1} = \sqrt{\frac{75}{36} - \frac{25}{6} + \frac{216}{36}} -$$

$$- \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{30}{36} + \frac{36}{36}} = \sqrt{\frac{75}{36} - \frac{150}{36} + \frac{216}{36}} - \sqrt{\frac{75}{36} + \frac{30}{36} + \frac{36}{36}} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{36}} - \sqrt{\frac{144}{36}} = 0 = 5 - 6x \text{ при } x = \frac{5}{6}$$

Т.е. $x = \frac{5}{6}$ является корнем уравнения.

При $x \neq \frac{5}{6}$.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1$$

Тогда составим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \\ \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$2\sqrt{3x^2 + x + 1} = 6x - 4$$

$$\sqrt{3x^2 + x + 1} = 3x - 2 (3x - 2 \geq 0)$$

$$3x^2 + x + 1 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0 \quad D = 169 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 97$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} \quad x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пожалуйста проверить эти корни $x_1 = \frac{5+\sqrt{97}}{4} > 0$ и $x_2 = \frac{5-\sqrt{97}}{4} < 0$

$$x_1 = \frac{\frac{5+\sqrt{97}}{4} - 2}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{13+\sqrt{97}}{4} - 8}{\frac{1}{4}} = \frac{5+\sqrt{97}}{4} > 0 \quad \checkmark$$

$$x_2 = \frac{\frac{5-\sqrt{97}}{4} - 2}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{13-\sqrt{97}}{4} - 8}{\frac{1}{4}} = \frac{5-\sqrt{97}}{4} (\sqrt{97} > \sqrt{85}) \Rightarrow \frac{5-\sqrt{97}}{4} < 0$$

Получаемся, что уравнение два корня: $x_1 = \frac{5+\sqrt{97}}{4}$ и $x_2 = \frac{5-\sqrt{97}}{4}$

Ответ: $x_1 = \frac{5+\sqrt{97}}{4}; x_2 = \frac{5-\sqrt{97}}{4}$