



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, что мы нашли искомые значения a, b и c , при которых abc — наименьшее, тогда, 500 , пусть $a = 2^{x_a} \cdot 7^{y_a}$;
 $b = 2^{x_b} \cdot 7^{y_b}$; $c = 2^{x_c} \cdot 7^{y_c}$, где x_a, y_a, x_b, y_b, x_c и y_c целые неотрицательные, т.к. a, b и c натуральные. Тогда по условию:
 $ab = 2^{x_a+x_b} \cdot 7^{y_a+y_b}$; $ac = 2^{x_a+x_c} \cdot 7^{y_a+y_c}$; $cb = 2^{x_c+x_b} \cdot 7^{y_b+y_c}$, тогда
 $x_a + x_b = 14$
 $x_b + x_c = 17$
 $x_c + x_a = 20$, т.к. 2 и 7 взаимнопросты и других множителей у наших чисел нет, т.к. мы можем разделить на доп. множители и abc уменьшится, а по предположению оно наименьшее.

Тогда: $2(x_a + x_b + x_c) = 51 \Rightarrow x_a + x_b + x_c = 25,5$, но т.к. все числа натуральные, то все простые множители в их разложении входят в целых неотрицательных степенях, то минимальные возм. сумма показателей степеней равна 26 . Аналогично:

$$y_a + y_b = 10$$

$$y_b + y_c = 17$$

$$y_c + y_a = 37$$

→ Т.к. $y_a + y_b + y_c < 37$ — противоречие (т.к. все они неотрицательные), значит $y_a + y_b + y_c \geq 37$

$2(y_a + y_b + y_c) \geq 64 \Rightarrow y_a + y_b + y_c \geq 32$. Таким образом мы определили минимальные возм. суммы показателей степеней двоек и семерок (других простых множителей у чисел a, b и c нет). Очев., что $abc = 2^{x_a+x_b+x_c} \cdot 7^{y_a+y_b+y_c} \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Это значение abc достигается при

$$a = 2^9 \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{10}$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

Ответ: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, след-но минимально возможное значение $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{\cancel{ab} \cdot a+b}{2(a-b)^2 - (a+b)^2}$$

Очевидно, что при $m=1$ - верно,

Ответ: $m=1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2(x-1)(x-1,5)}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$2x^2 - 7(2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1) - 2 \cdot \sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 4 - 28x + 49x^2$$

$$2x^2 - 7(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = (-45x^2 + 25x)^2$$

$$16x^2 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 445$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На графике построим решение второго уравнения системы:

$((x+8)^2 + y^2 - 1)$ — на графике это окр-ть радиусом 1, с ц. в т.

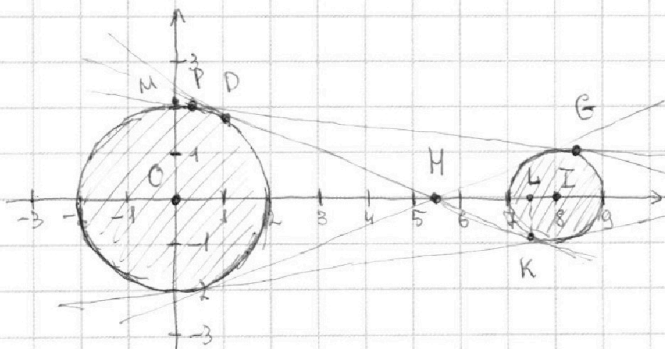
$(-8; 0)$, $(x^2 + y^2 - 4)$ — на графике это окружность с центром в начале коорд $(0; 0)$ и радиусом 2. Решением будет являться

любая точка не снаружи окружностей (из графика огов, что

они не пересекаются и в этом случае один из множителей

будет ^{не} отрицательным, а другой ^{не} положительным,

след-но их произведение будет не положительным.



$ax - y + 10b = 0$ — прямая.

Огов, что прямая с окруж-
ностью имеет ~~только одну~~ или бесконечно много
общих точек, тогда огов,
что наша прямая — касат-
ельная к обоим окружност-
ям.

Очевидно, что если $D \neq K$ — т. касания внутр. касат.,
то $\triangle ODH \sim \triangle IKH$, (O и I — центры окр-тей, H — т. в которой
касательная пересекает $x - y = 0$), т.к. $\angle ODH = \angle HKI = 90^\circ$ и $\angle IHK =$
 $\angle ODH$, как вертикальные и коэф. подобия — отношение
радиусов $\Rightarrow$ равен 2: $\frac{OD}{KI} = \frac{OH}{IH} = 2 \Rightarrow OH = \frac{2}{3}OI = \frac{2}{3} \cdot 8$, тогда

По т. Пифагора (т.к. $IH = \frac{1}{3}OI = \frac{1}{3} \cdot 8$) для $\triangle HIK$: $HK = \sqrt{HI^2 - IK^2}$

$= \sqrt{\frac{64}{9} - 1} = \sqrt{\frac{55}{9}}$. В $\triangle HKI$ $\sin \angle IHK = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 8} = \frac{3}{8}$, тогда у

точки K равен: $-HK \cdot \sin \angle IHK = -\sqrt{\frac{55}{9}} \cdot \frac{3}{8} = -\sqrt{\frac{55}{64}}$, а

$x + k$ равен $OH + HL$, где L — проекция т. K на ось X , и

по т. Пифагора: $HL = \sqrt{HK^2 - KL^2} = \sqrt{\frac{55}{9} - \frac{55}{64}} =$
 $= \sqrt{\frac{55(64-9)}{64 \cdot 9}} = \frac{55}{24}$. $OL = HO + HL = \frac{16}{3} + \frac{55}{24} = \frac{183}{24}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При $x = \frac{2}{3} \cdot 8$; $y = 0$ - подставим в ур-е прямой 2 значения

$$y = ax + 10b \rightarrow (1) \quad 0 = \frac{16}{3}a + 10b \quad \text{Вычтем из (2) (1)}$$

$$(2) - \sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{163}{24}a + 10b$$

$$(2) - (1) \Rightarrow -\sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{55}{24}a \Rightarrow a = -\frac{3\sqrt{55}}{55} \quad \text{Очев, из-за симметрии}$$

относительно ОХ $a = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

Аналогично для внешних касательных: пусть Z - т. перес. ОХ,

P и G - т. касания, тогда $\triangle ZIG \sim \triangle ZOP$, т.к. $\angle OZP$ - общ.,
 $\angle OPZ = \angle IGZ = 90^\circ \Rightarrow \frac{IG}{OP} = \frac{ZI}{ZO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ZI}{ZI+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow ZI = 8$. В $\triangle ZIG$

по т. Пифагора $GZ = \sqrt{ZI^2 - IG^2} = \sqrt{63} \Rightarrow \text{Тогда } \operatorname{tg} \angle GZI = \frac{IG}{GZ} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{63}}$. Пусть прямая ZGP пересекает ОУ в т. M , тогда

x точки M равен 0, а y точки M равен $\operatorname{tg} \angle MOZ \cdot ZO$,
т.к. $MO \perp OZ \Rightarrow y$ точки M равен $\frac{1}{\sqrt{63}} \cdot 16 = \frac{16}{\sqrt{63}}$.

Подставим коорды точек Z и M в ур-е прямой:

$$y = ax + 10b: (3) \quad 0 = 16a + 10b \quad \text{Вычтем из ур-я (4) ур-я (3):}$$

$$(4) \quad \frac{16}{\sqrt{63}} = 0a + 10b$$

$$\frac{16}{\sqrt{63}} = -16a, \text{ откуда } a = -\frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow \text{Очев, что из-за симметрии}$$

реш, относительно ОХ $a = \frac{1}{\sqrt{63}}$ - тоже подходит.

Ответ: $a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$ и $a = \pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$.



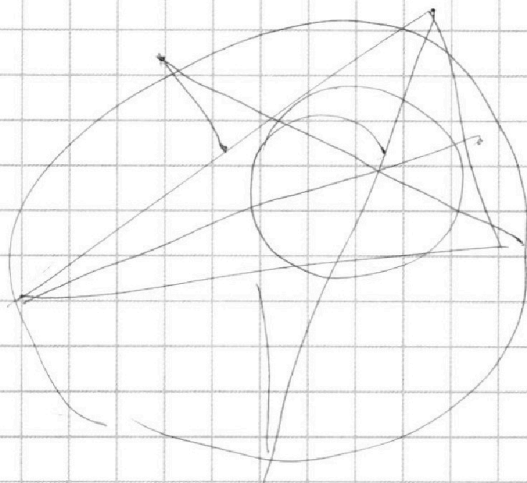
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



При $x = \frac{2}{3} \cdot 8$; $y = 0$ - подставим в ур-е прямой:

$$ax - y + 10b = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{16}{3} - 0 + 10b = 0$$

$$y = ax + 10b \Rightarrow 0 = a \cdot \frac{16}{3} + 10b$$

Очев, что $a = 0$ нам не подходит, а т.к.

Подставим полученные значения x и y точки К:

$$y = ax + 10b \Rightarrow -\sqrt{\frac{55}{64}} = a \cdot \left(\frac{55}{24} + \frac{16}{3}\right) + 10b$$

ур-е в китке и получим: $0 + \sqrt{\frac{55}{64}} = a \left(\frac{16}{3} - \left(\frac{55}{24} + \frac{16}{3}\right)\right)$ отсюда

$$a = \frac{\sqrt{\frac{55}{64}} - \sqrt{\frac{55}{64}} \cdot \frac{24}{24} \cdot \frac{24}{55}}{\frac{128}{24} - \frac{128}{24} - \frac{55}{24}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$$

Очев, что из-за симметрии относительно ОХ $a = +\frac{3\sqrt{55}}{55}$ тоже подходит (второе

внутр касательная. Найдем a для внешних касательных:

Пусть Р и G - точки касаний, Z - т. перес. с ОХ, тогда:

Очев, что $\triangle ZGI \sim \triangle ZPO$, но т.к. $\angle OPZ = \angle IGZ = 90^\circ$ и $\angle PZO$ - общий и $\frac{ZI}{ZO} = \frac{GI}{PO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ZI}{ZI+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow ZI = 8$ и

Z - точка с координатами $(16; 0)$. Аналогично $\sin \angle GZI = \frac{GI}{GZ}$

По т. Пифагора для $\triangle GIZ$: $GZ^2 = ZI^2 + GI^2 = 64 + 1 = 65$

Тогда $\tan \angle IZG = \frac{IG}{GZ} = \frac{1}{\sqrt{65}}$. Пусть прямая PGZ пересекает ось y в т. М, тогда, т.к. $\angle MOZ = 90^\circ$, то $MO = \tan \angle MZO =$

$$\tan \angle GZI \cdot ZO = \frac{1}{\sqrt{65}} \cdot 16 = \frac{16}{\sqrt{65}} \Rightarrow y \text{ точки М, а } x \text{ точки М равен 0.}$$

Подставим в ур-е прямой: $y = ax + 10b \Rightarrow$

$$(1) 0 = a \cdot 16 + 10b \quad \text{Возьмем из (2) и уравнение (1):}$$

$$(2) \frac{16}{\sqrt{65}} = 10b$$

$$\frac{16}{\sqrt{65}} = -16a \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{65}} \quad \text{и, аналогично из-за}$$

симметрии относительно ОХ значения $a = \frac{1}{\sqrt{65}}$ тоже подходит



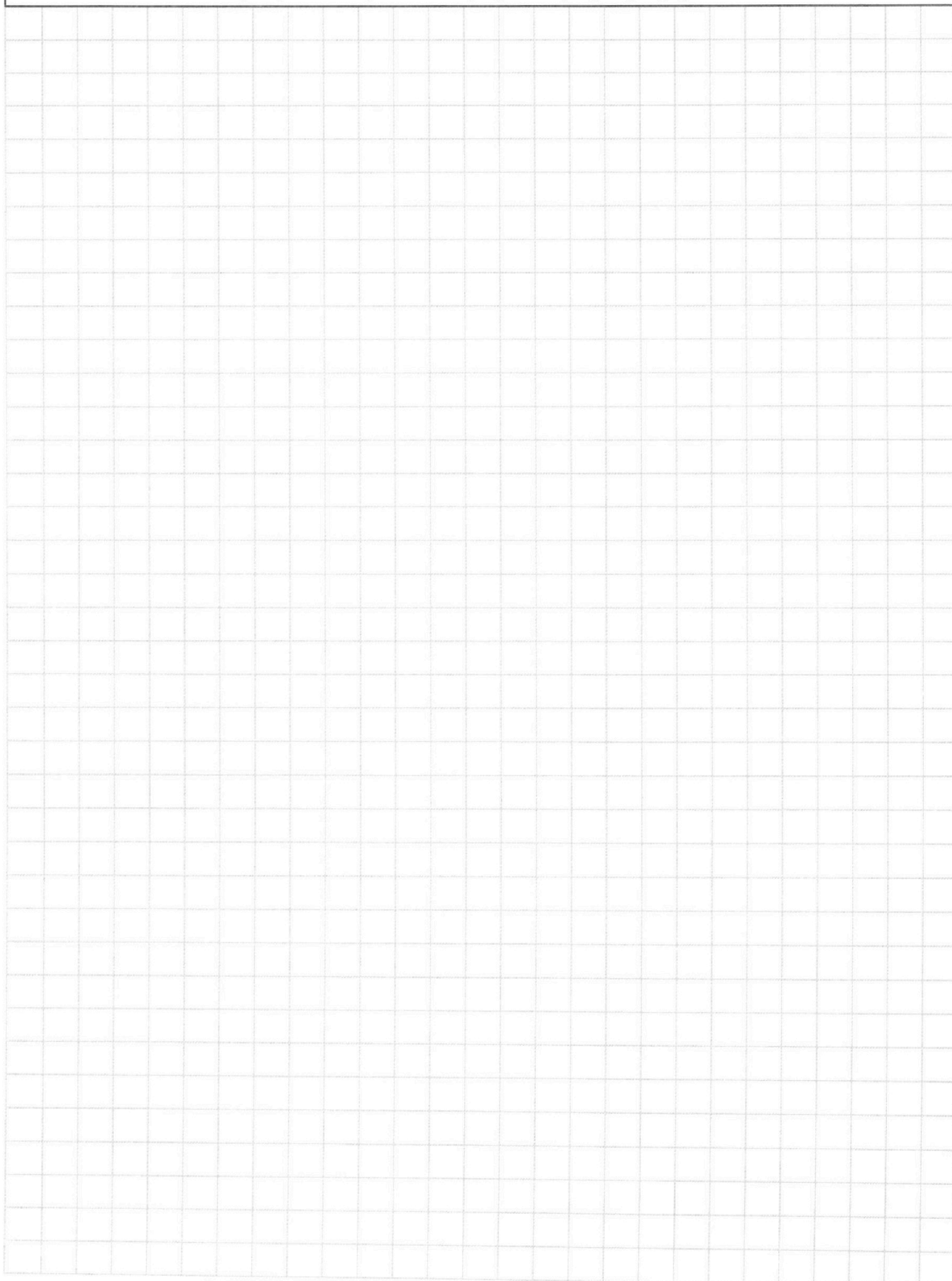
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

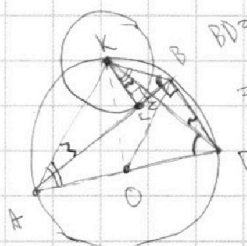
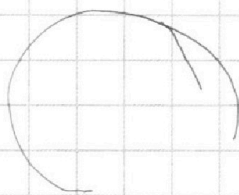
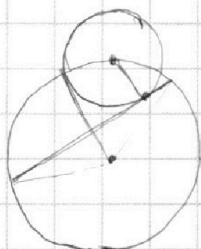
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$100 - 64x^2 = 50(1 - \cos \alpha)$$

$$AK = \sqrt{49x^2 + 1}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2$$



$$BD = \sqrt{100 - 64x^2} = \sqrt{50 - 32x^2}$$

След-но $KD = x \cdot AK$, $AK = \sqrt{49x^2 + 1}$ $\frac{KC}{CZ} = \frac{KA}{KZ} = \frac{CB}{KD} = \frac{CK}{AK} = \frac{x}{1}$

$$KD^2 = x^2 \cdot AK^2 = 49x^4 + x^2$$

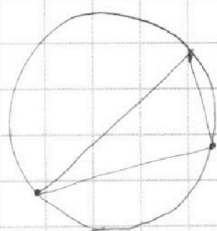
$$\frac{CB}{CK} = \frac{KD}{AK} = \frac{x}{1}$$

Тогда $AD^2 = AK^2 + KD^2 = 49x^4 + x^2 + 49x^2 + 1 = 100 + x^2$

$$49x^2 + 50x + 99 = 0$$

$$D = 2500 + 99 \cdot 49 \cdot 4 = 19404$$

$$4 \cdot (625 + 99 \cdot 49)$$



$$\begin{array}{r} + 4851 \\ 625 \\ \hline 5476 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 99 \\ \hline 441 \\ + 441 \\ \hline 9801 \end{array}$$

$$9 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} \times 4851 \\ 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 132 \\ 132 \\ \hline 264 \\ + 396 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 162 \\ 162 \\ \hline 324 \\ + 972 \\ \hline 1134 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ 17424 \\ \hline 17556 \end{array}$$

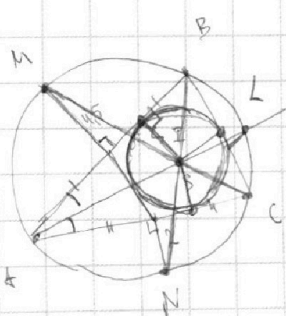
$$\begin{array}{r} 162 \\ 26244 \\ \hline 26406 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 76 \\ 76 \\ \hline 456 \\ + 5342 \\ \hline 5798 \end{array}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$$

$$\frac{5 \pm 1}{4} = 1; 1.5$$



$$2(x-1)(x-1.5)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

орав, то $a = 2^{x_a} \cdot 7^{y_a}$ $b = 2^{x_b} \cdot 7^{y_b}$ $c = 2^{x_c} \cdot 7^{y_c}$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 2^{x_a+x_b} \cdot 7^{y_a+y_b} \\ b \cdot c &= 2^{x_b+x_c} \cdot 7^{y_b+y_c} \\ a \cdot c &= 2^{x_a+x_c} \cdot 7^{y_a+y_c} \end{aligned} = \frac{a+b}{\frac{a^2 - 6ab + 9b^2 - 8b^2}{a^2+b}} = \frac{a+b}{(a-3b)^2 - 8b^2} = \frac{a+b}{(a-3b-2\sqrt{2}b)(a-3b+2\sqrt{2}b)}$$

$$\begin{aligned} X_a + X_b &= 14 \\ X_b + X_c &= 17 \\ X_a + X_c &= 20 \end{aligned}$$

$$X_a + X_b + X_c$$

$$4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 = 32 = 2^5$$

$$> \frac{a+b}{(a-b)^2 - 4b^2 - 4b^2} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b) - 4b^2}$$

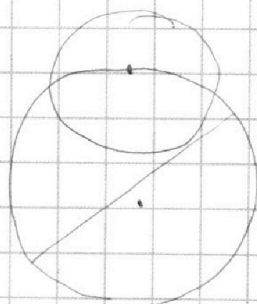
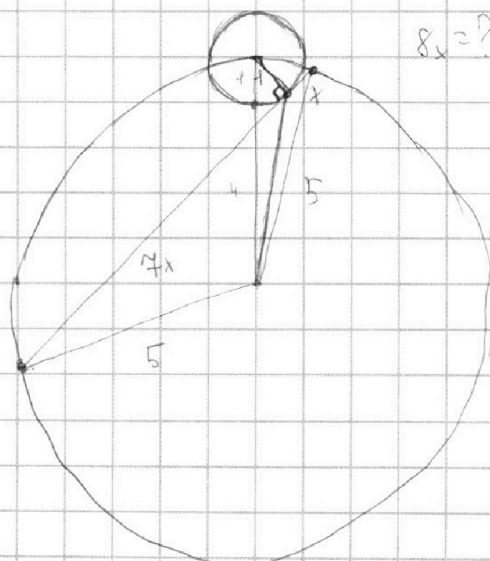
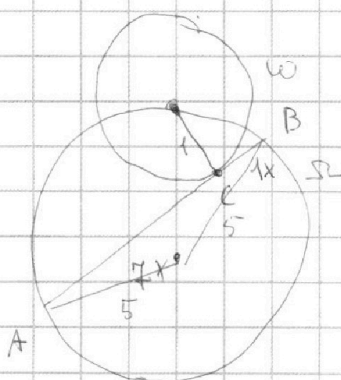
$$2(X_a + X_b + X_c) = 20 + 17 + 14 = 51$$

$$4x^2 + 4x + 2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 \pm 7x - 2 = 2(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1) \pm$$

~~$$a(a-3b) + b(b-3a)$$~~

$$(4x^2 + 4x + 2)(4x^2 + 4x + 2) = 16x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 16x^3 + 16x^2 + 8x + 8x^2 + 8x + 4 =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$16x^4 + 32x^3 + 32x^2 + 16x + 4 = 8x^4 - 12x^3 - 4x^2 + 2x + 6$$

$$8x^4 + 44x^3 + 36x^2 + 14x - 2 = 0$$

$$4x^4 + 22x^3 + 18x^2 + 7x - 1 = 0$$

$$4 + 22 + 18$$

$$4 - 22 + 18 - 7x - 1$$

$$\times 152$$

$$\times 152$$

$$304$$

$$760$$

$$152$$

$$23104$$

$$\times 146$$

$$\times 146$$

$$876$$

$$+ 584$$

$$146$$

$$24316$$

$$\times 148$$

$$\times 148$$

$$+ 1184$$

$$+ 592$$

$$148$$

$$24904$$

$$76 \cdot 2 = 152$$

$$2500$$

$$49$$

$$199$$

$$\times 49$$

$$\times 99$$

$$441$$

$$441$$

$$\times 4851$$

$$\times 4$$

$$19404$$

$$+ 2500$$

$$21904$$

$$A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)$$

$$2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 = 12$$

$$a = 1$$

$$(a+b)^2 \neq (a-b)^2$$

$$2(a-b)^2 - (a+b)^2$$

$$(1+\sqrt{2}) \cdot (a\sqrt{2}-b\sqrt{2}+a+b)(a\sqrt{2}-b\sqrt{2}-a-b)$$

$$(a(\sqrt{2}+1)+b(1-\sqrt{2}))(a(\sqrt{2}-1)+b(-1-\sqrt{2}))$$

$$ax + y + 10b = 0$$

$$cx + y + 10b = 0$$

Точка $(x; y)$ лежит
внутри(на границе) одной
из окр-тей

$$y = 0$$

$$y = ax + 10b$$

$$y = ax + 10b$$

$$y = x$$

$$\sin \angle KHI =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 8} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{i - \frac{9}{64}} =$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 8 \\ - 128 \\ \hline 55 \\ 73 \end{array}$$