



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Допустим, что одно из чисел  $a, b, c$  имеет простые делители, отличные от 2 и 7. Тогда если мы ~~раз~~ уберем эти делители, то условие на делимость это никак не повлияет, а произведение  $abc$  увеличится. Тогда представим числа  $a, b, c$  в виде

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1},$$

где  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{N}_0$ .

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2},$$

$$ab = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2},$$

тогда  $ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$  можно записать

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3},$$

как  $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$  и  $\beta_1 + \beta_2 \geq 11$ .

И.о.,

$$+ \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17, \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23, \end{cases}$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11,$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 18,$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 39, \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$$

Из этих двух неравенств получаем,

что

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Пример:  $a = 2^{10} \cdot 7^{20}$ ,  $b = 2^5 \cdot 7^0$ ,  $c = 2^{13} \cdot 7^{19}$ .

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{20} \quad ; \quad 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{19} \quad ; \quad 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad ; \quad 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ваша задача

№2.

Если  $\text{НОД}(x; y) = z$ , то дробь  $\frac{x}{y}$  сокращается на  $z$ , а

если  $\frac{x}{y}$  несократима, то  $\text{НОД}(x; y) = 1$ .

Если  $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$   $\text{НОД}(a+b; a^2-7ab+b^2) = c$ , то  $c$  - наибольшее

возможное число, на которое можно сократить дробь.

$$a^2 + b^2 - 7ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab - 7ab = (a+b)^2 - 9ab.$$

$\text{НОД}(a+b; (a+b)^2 - 9ab) = \text{НОД}(a+b; -9ab)$  по свойствам НОД.

$\text{НОД}(a+b; ab) = 1$ , т.к.  $\text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, ab) = 1$   
 $\text{НОД}(a+b, a) = 1$

Тогда  $\text{НОД}(a+b; 9ab) \leq 9 \Rightarrow$  дробь можно сократить на

$$m \leq 9.$$

Пример:  $a=4, b=5$ .

$$\frac{4+5}{4^2-7 \cdot 4 \cdot 5+5^2} = \frac{9}{16+25-140} = \frac{9}{41-140} = \frac{9}{-99}, \text{ сокращаемая на } 9.$$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 4

Заметим, что  $3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$ . Тогда

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x = \left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2 \quad \text{Если}$$

$$a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}, \quad b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \quad \text{то}$$

$$a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0 \quad \Rightarrow 1) a - b = 0 \quad \text{или} \quad 2) a + b - 1 = 0$$

$$1) a - b = 0 \Rightarrow 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \frac{1}{81} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{3}}$$

Значит  $x_1 = \frac{1}{9}$  - корень уравнения.

$$2) a + b - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \quad (*)$$

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2 = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} + 3x^2 + 3x + 1 = 1$$

$$6x^2 - 3x + 2 = -2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} \quad (**)$$

$$(6x^2 - 3x + 2)^2 = 4(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$$

$$36x^4 - 18x^3 + 12x^2 - 18x^3 + 9x^2 - 6x + 12x^2 - 6x + 4 = 4(9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 9x^3 - 18x^2 + 6x + 3x^2 - 6x + 2)$$

$$36x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 12x + 4 = 36x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 4 \cdot 69 = 36 + 276 = 312$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{312}}{69}$$

$$(\sqrt{312} \leq 18)$$

Запишем условия, которые должны

$$x_3 = \frac{6 + \sqrt{312}}{69}$$

выполняться для корней.

Во-первых,  $3x^2 - 6x + 2 \geq 0$  и  $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$ , т.к. выражения

под корнями не должны быть отрицательными

$$3x_2^2 - 6x_2 + 2 = 3 \cdot \frac{(6 - \sqrt{312})^2}{69^2} - 6 \cdot \frac{6 - \sqrt{312}}{69} + 2 \geq 0$$

$$3x_2^2 + 3x_2 + 1 = 3 \cdot \frac{(\sqrt{312} - 6)^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{312} - 6}{69} + 1 =$$

$$12 < 2\sqrt{312} < 18, \quad 11 < \sqrt{312} - 6 < 12, \quad 33 < 3(\sqrt{312} - 6) < 36,$$

$$3 \cdot \frac{\sqrt{312} - 6}{69} < 1 \Rightarrow 1 - 3 \cdot \frac{\sqrt{312} - 6}{69} > 0 \Rightarrow 3x_2^2 + 3x_2 + 1 \geq 0;$$

$$3x_3^2 - 6x_3 + 2 = 3 \cdot \frac{(6 + \sqrt{312})^2}{69^2} + 2 \left( -3 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 1 \right) =$$

$$3 \cdot \frac{(6 + \sqrt{312})^2}{69^2}$$

$$= \frac{(6 + \sqrt{312})^2}{69 \cdot 23} - \frac{2 \cdot (6 + \sqrt{312})}{23} + 2 = \frac{36 + 312 + 12\sqrt{312} - 828 - 128\sqrt{312} + 5174}{4582} =$$

$$= \frac{2594 - 116\sqrt{312}}{4582} > 0$$

$$2088 = 116 \cdot 18 > 116\sqrt{312}$$

$$3x_3^2 + 3x_3 + 1 = 3x_3^2 + 3 \cdot \frac{6 + \sqrt{312}}{69} + 1 > 0$$

Во-вторых, я дважды возведу уравнения в квадрат, потому

нужно проверить знаки обеих сторон выражений.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

\*).  $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$  - обе части больше нуля,

проверка не нужна

\*\*).  $6x^2-3x+2 = -2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}$  - корни неотрицательны,

$$6x^2-3x+2 \leq 0.$$

укажем, правая часть  $\leq 0$ ,

тогда и левая должна быть  $\leq 0$ .

$$6x_2^2 - 3x_2 + 2 = 6 \cdot \frac{(\sqrt{3+2}-6)^2}{69^2} - 3 \cdot \left( \frac{6-\sqrt{3+2}}{69} \right) + 2 > 0, \text{ укажем, } x_2$$

$\begin{matrix} \sqrt{0} \\ \sqrt{0} \\ \sqrt{0} \end{matrix}$

не является корнем.

$$6x_3^2 - 3x_3 + 2 = 6 \cdot \frac{(\sqrt{3+2}+6)^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{(\sqrt{3+2}+6)}{69} + 2 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{3+2}+6)^2}{69 \cdot 23} - 3 \cdot \frac{(\sqrt{3+2}+6)}{69}$$

$$= \frac{624 + 72\sqrt{3+2} + 72 - 69\sqrt{3+2} - 414 + 3174}{69 \cdot 23} = \frac{3452 - 57\sqrt{3+2}}{69 \cdot 23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3452 - 1026}{69 \cdot 23} > 0 \Rightarrow x_3 \text{ не является корнем} \quad 57\sqrt{3+2} < 57 \cdot 1.8 = 1026$$

Ответ:  $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6. (шоттевик!!!)

$x^2 + y^2 - 1 = 0$  - окружность с центром  $(0, 0)$  и радиусом 1,

$x^2 + y^2 - 1 < 0$ , если  $(x; y)$  внутри окружности,  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , если

на окружности, и  $x^2 + y^2 - 1 > 0$ , если вне окружности.

Аналогично  $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$  - окр. с центром  $(0; 12)$  и радиусом

4. Эти две окружности не пересекаются. Значит

$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$ , если точка  $(x; y)$  лежит

на одной из окружностей либо внутри одной из окружностей.

$ax + y - 8 = 0 \Rightarrow y = 8 - ax$  - прямая. Если у прямой и

круга есть 2 общие точки, то उनके бесконечно много других

общих точек. Значит, прямая  $y = 8 - ax$  - дуга касания

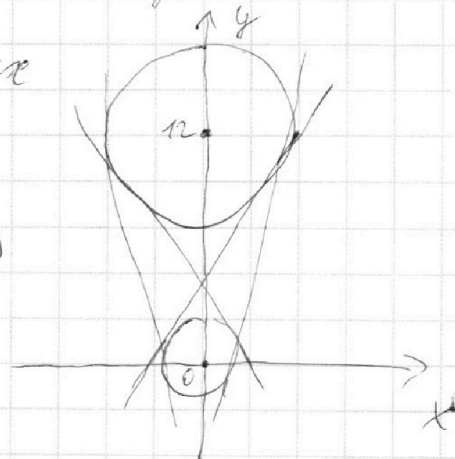
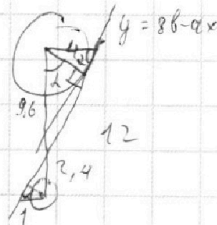
обеих окружностей. Таких прямых

может быть всего 4, из которых есть

2 симметричные (с противополож. наклоном)

$$\sin \alpha = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

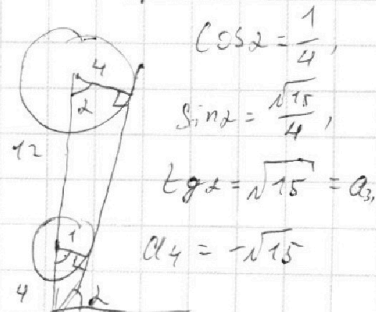
$$\cos \alpha = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$



$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1/3}{\sqrt{1 - 1/9}} = \frac{1/3}{\sqrt{8/9}} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$



$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{119}}{5}; \pm \sqrt{15}$$



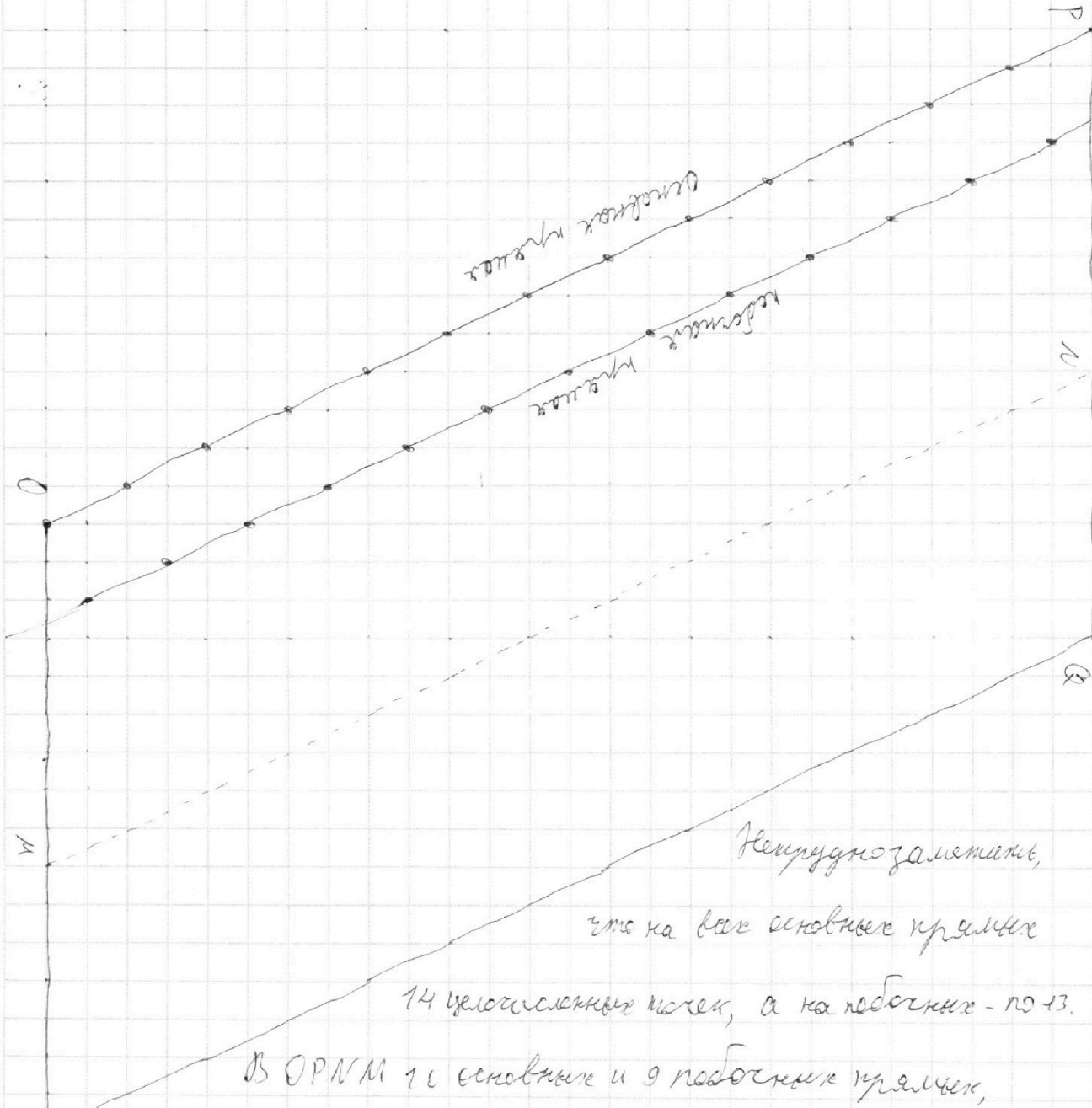
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



14 целочисленных точек, а на побочных - по 13.

В  $OPNM$  11 основных и 9 побочных точек,

⇒ Тогда общее кол-во пар точек  $A$  и  $B$  -

$$14 \cdot 10 \cdot 14 + 13 \cdot 9 \cdot 13 = 1960 + 1521 = 3481$$

Ответ: 3481



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15.

Зафиксируем точку  $A(x_1; y_1)$ . Тогда точки  $B(x_2; y_2)$

соответствуют уравнению  $2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$ ;

$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$  - уравнение прямой с наклоном  $-2$ .

Найдем на этой прямой точку с координатами  $y_1$ .

$$y_1 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$$

$2x_2 = 14 + 2x_1 \Rightarrow x_2 = 7 + x_1$ . Тогда выбранной точке

$A(x_1; y_1)$  подходят точки  $B$ , которые лежат на прямой, проходящей через точку  $(x_1 + 7; y_1)$ , и наклоном  $-2$ .

Если мы построим параллелограмм  $OPQR$  (на след. странице),

то заметим, что его боковые стороны имеют наклон  $-2$ , а основания

параллельны. Если мы выберем любую точку  $A$  в параллело-

грамме  $OPMM$  ( $MM$  на 7 клеток левее  $QR$ ), то мы найдем

соответствующую ей прямую точек  $B$ . Также заметим,

что есть 2 вида прямых с наклоном  $-2$  и целочисленными точками:

«основные», у которых есть целые точки на основаниях, и

«ребровые», у которых нет целых точек на основаниях. Точка

$A$ , лежащая на основной прямой, соответствует точке  $B$  на

другой основной прямой, аналогично с ребровыми.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



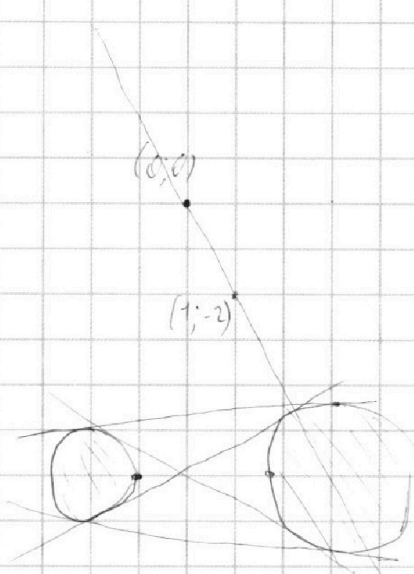
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 + 1 - \text{выр. с центром } (0,0) \text{ и } r=1$$

$$x^2 + (y-12)^2 = 16 - \text{выр. с центром } (0,12) \text{ и } r=4$$

$$y = 8 - \sqrt{ax}$$



$$y_1 = -2x + b$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$$

$$y_2 = 2(7 + x_1) + y_1 - 2x_2$$

$$0 = 2(2 + x_1) + y_1 - 2x_2$$

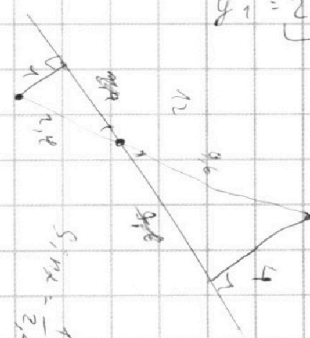
$$2x_2 = 2(7 + x_1) + y_1$$

$$(0; 14 + 2x_1 + y_1)$$

$$14 + 2x_1 + y_1 = 14 + 2x_1^2 + y_1^2$$

$$2x_1 + y_1 = 2x_1^2 + y_1^2$$

$$y_1^2 = 2x_1 + y_1 - 2x_1^2$$



$$5,1 \text{ } x = \frac{1}{2} x = \frac{5}{12}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \sqrt{ax}$$

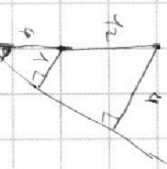
$$x^2 + y^2 = 1 - 2\sqrt{ax} + ax$$

$$a - b = r$$

$$(a-b) = (a-b)(ax+b)$$

$$(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 4) = -5x + 1$$



14	13
14	13
56	39
14	13
196	169
15	21

14 - большая - 10  
13 - маленькая - 9  
14^2 - 16 + 17^2 - 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = k_1 \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc = k_2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac = k_3 \cdot 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$c^2 = \frac{(abc)^2}{(ac)^2} = \frac{k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}}{k_1^2 \cdot 2^{40} \cdot 7^{40}} = \frac{k_2 k_3}{k_1} \cdot 2^{15} \cdot 7^{28}$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}, \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}, \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$$

$$y_2 = c - 2x_2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 15$$

$$\alpha_1 \geq 15 - \alpha_2$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 - 2x_2$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$$

$$\alpha_2 \geq 17 - \alpha_3$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 18$$

$$y_2 = 2(7 + x_1) + y_1 - 2x_2$$

$$\alpha_3 + \alpha_1 \geq 23$$

$$\beta_3 + \beta_1 \geq 29$$

$$y_1 + x_1 = x_2$$

~~$\alpha_1 + \alpha_2$~~

$$\alpha_1 = 10, \quad \alpha_3 = 13, \quad \alpha_2 = 5$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 55$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{55}{2} = 27,5$$

$$\beta_1 = 20, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 14$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$$

$$12x - 2x = 3^2$$

$$10 \cdot x^2 = 1$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2}{a+b} = a+b$$

$$\frac{9ab}{|a-b|}$$

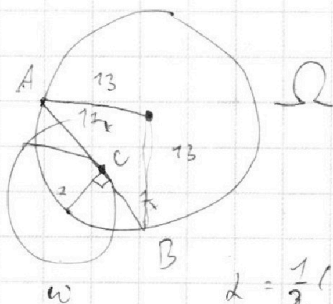
$$a+b = km$$

$$a = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2R, \quad \frac{a}{\sin \alpha} = R$$

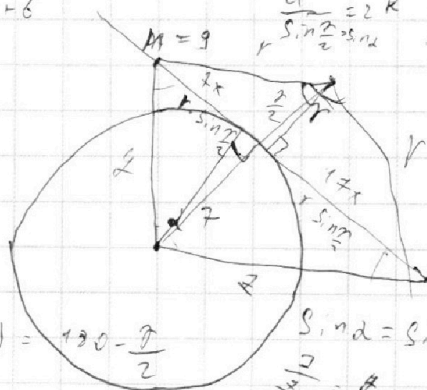
$$y_2 = 21 \cdot 7$$

$$y_2 = 5 \cdot 14 = 70$$

$$70 = \frac{74x}{5 \cdot 14} = \frac{y_2}{7}$$



$$\alpha = \frac{1}{2}(360 - \gamma) = 180 - \frac{\gamma}{2}$$



$$\sin \alpha = \sin \frac{\gamma}{2}$$

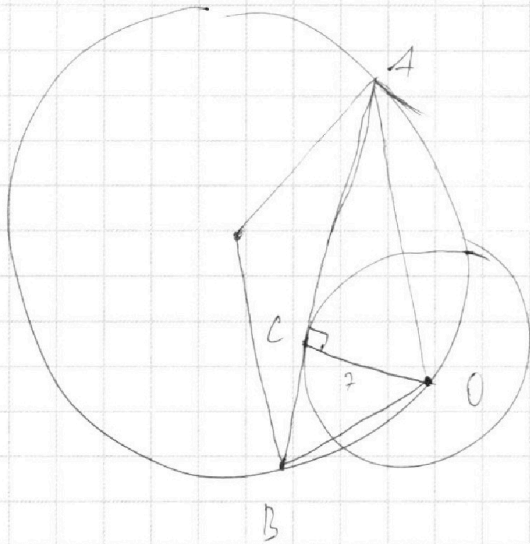
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



69  
4  
276

138

17  
17  
119  
17  
289

18  
18  
144  
18  
324

$$\frac{D}{4} = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$D = 9 - 12$$

$$x^2 + x = \frac{1}{3}$$

$$(x^2 + 0,5x)^2 + \dots$$

69

6

414

138

3

414

$$312 = 4 \cdot 78 = 4 \cdot 2 \cdot 39 = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

78

78

156

312

$$\frac{3 \cdot 12^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{11}{69} + 1$$

$$\frac{144}{22 \cdot 69} - \frac{11}{69} + 1$$

$$\frac{144 - 253}{22 \cdot 69} + 1$$

2174

828

2246

348

2594

$$\frac{3 \cdot 12^2}{69^2} - 3 \cdot \frac{12}{69} + 1$$

69

23

207

138

1581

1581

3174

138

69

207

116

18

928

116

2088

69  
12  
138  
69  
828



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

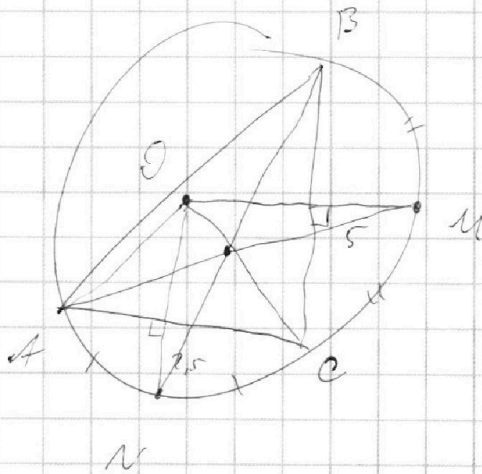


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3174  
414  
2760  
624  
3380  
72  
3452

52.18  
13  
456  
57  
1028



$$6 \cdot \frac{(18+6)^2}{2 \cdot 69} - 3 \cdot \frac{60}{43+6} + 2 = 6 \cdot \frac{89}{242} - 4 + 2$$