МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\,(x^2+(y-12)^2-16)\leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $v_p(k)$ - это степень вхождения простого числа p в число k,

тогда $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ и

если $ab \vdots p^k$, то $v_p(ab) \geq k$ и

тогда

$$\left.\begin{cases} v_2(a) + v_2(b) \geq 15 \\ v_2(b) + v_2(c) \geq 17 \\ v_2(a) + v_2(c) \geq 23 \end{cases}\right) +$$

$2(v_2(a) + v_2(b) + v_2(c)) \geq 55$, т.

$v_2(a) + v_2(b) + v_2(c) \geq 28$, т.к. $v_p(k)$ - целое

и минимум достигается, если: $v_2(b) = 5$
$v_2(a) = 10$
$v_2(c) = 13$

$$\begin{cases} v_7(a) + v_7(b) \geq 11 \\ v_7(b) + v_7(c) \geq 18 \\ v_7(a) + v_7(c) \geq 39 \end{cases}$$

$v_7(a) + v_7(b) + v_7(c) \geq v_7(a) + v_7(c) \geq 39$.

Минимум достигается, если $v_7(b) = 0$
$v_7(a) = 20$
$v_7(c) = 19$, т.е.

$v_2(abc) \geq 28$, $v_7(abc) \geq 39 \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

при $b = 2^5$
$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$
$c = 2^{13} \cdot 7^{19}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Будем обозначать НОД(a, b) как (a, b)

Дробь $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow (a, b) = 1$

Заметим тогда, что $(ab, a+b) = 1$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}.$$

Если исходная дробь ~~сокр~~ сокращала на m, тогда и

$\frac{9ab}{a+b}$: ~~m~~ сокращала на m,

но $(ab, a+b) = 1 \Rightarrow$

$(9, a+b) \vdots m$, но

$(9, a+b) \leq 9 \Rightarrow m \leq 9$.

(*) пусть нет и $(ab, a+b) \vdots p$,

тогда $(a+b)b - ab \vdots p$,

тогда $b^2 \vdots p$,

тогда $b \vdots p$,

но $a+b \vdots p \Rightarrow$

$a \vdots p \Rightarrow$

$(a, b) \neq 1$,

противоречие

~~Макс~~ Максимум достигается при $a = 4$, $b = 5$

$$\frac{9}{41 - 140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}.$$

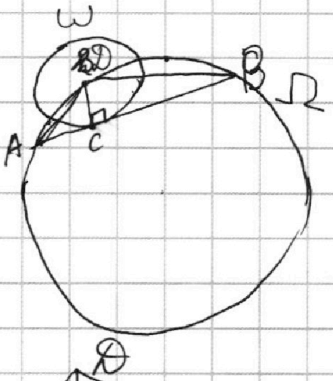
Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

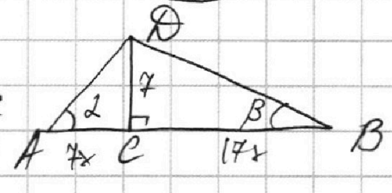
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. AB касается ω, тогда D - центр ω,
то $DC \perp AB$ и $DC = 7$
Тогда рассмотрим $\triangle ADB$
В нём DC - высота и $DC = 7$,
радиус описанной окружности 13 и
$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{17}$



Пусть $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABD = \beta$,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{DC \cdot ctg\alpha}{DC \cdot ctg\beta} = \frac{ctg\alpha}{ctg\beta} = \frac{tg\beta}{tg\alpha} = \frac{7}{17}$$



$$DB = \frac{DC}{\sin\beta} = \frac{7}{\sin\beta}$$

По Т. синусов:

$$\frac{DB}{\sin\alpha} = 2R = 26, \Rightarrow \frac{7}{\sin\beta \cdot \sin\alpha} = 26 \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{49}{676\sin^2\alpha}$$

$$tg^2\beta = \frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta} = \frac{49}{676\sin^2\alpha - 49}, \text{ также } \sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \Rightarrow$$

$$tg^2\beta = \frac{49}{\frac{676 tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} - 49} \text{ и } tg^2\beta = \frac{49}{289} tg^2\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{49}{289} tg^2\alpha = \frac{49}{\frac{676 tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} - 49}$$

Пусть $tg^2\alpha = t$

$$\frac{\cancel{49}}{289} t = \frac{\cancel{49}}{\frac{676t - 49 - 49t}{1+t}}$$

$$627t^2 - 289t - 338 = 0$$

угадываем $t = 1$

$$(t-1)(627t + 338) = 0$$

Заметим, что $\angle DAB$ это угол между прямой, соединяющей центр и точку, и касательной к этой точке

$\Rightarrow$ ~~$\alpha < 90° \wedge tg\alpha > 0$~~
$\alpha < 90° \Rightarrow tg < 0$
а $t = tg^2\alpha \Rightarrow$
$tg^2\alpha = \pm 1 \Rightarrow tg\alpha = 1 \Rightarrow$
$\alpha = 45°$, тогда
$AC = 7$, $DC = 17 \Rightarrow$
$AB = 24$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

ОДЗ: у первого $(-\infty, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, +\infty)$
у второго x — любой

Умножим на сопряжённое

$$\frac{3x^2-6x+2-3x^2-3x-1}{\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}} = 1-9x$$

$$\frac{1-9x}{\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}} = 1-9x$$

если $x=\frac{1}{9}$, то
$3x^2-6x+2 = \frac{37}{27}$
$3x^2+3x+1 = \frac{37}{27}$ => подходит

$x \neq \frac{1}{9}$ =>

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \\ \sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x\end{cases} +$$

$2\sqrt{3x^2-6x+2} = 2-9x \mid ^2$

$12x^2-24x+8 = 4+81x^2-36x$

$69x^2-12x-4=0$ $\quad (4\sqrt{13})^2$

$D = 144+16\cdot 69 = 16\cdot 78$ ... $(8\sqrt{3})^2$ $\quad x_{12} = \frac{12\pm 4\sqrt{13}}{2\cdot 69} = \frac{6\pm 2\sqrt{13}}{69}$

$2\sqrt{3x^2+3x+1} = 9x$

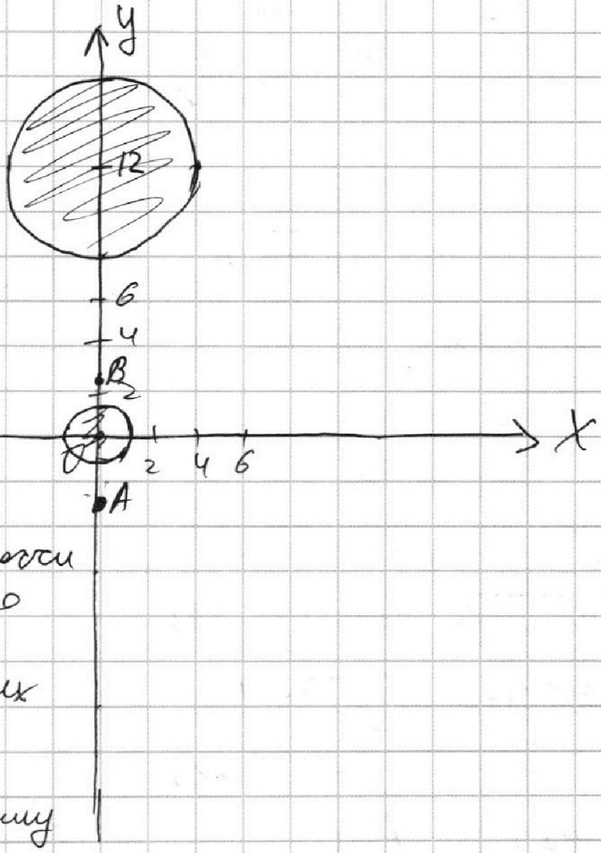
$12x^2+12x+4 = 81x^2$

$69x^2-12x-4=0$,

$\frac{6\pm 2\sqrt{13}}{69}$, корни такие же

N 6

Второе уравнение — это 2 окружности
~~Если~~ Первое уравнение — прямая и она должна быть касательной к обеим окружностям



Т.е. таких прямых 4 — 2 внешние и 2 внутренние касательные. Т.к. окружности симметричны относительно Oy, то точки пересечения 2 внешних и 2 внутренних лежат на Oy, при этом они же 2 центра гомотетий, переводящих одну окружность в другую, т.е.

$(0;2,4)$ — точка пересечения внутренних касательных.
точка B

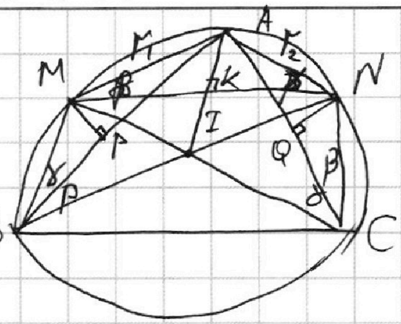
~~$(x_0;y_0)$~~ $(0;-3)$ — точка пересечения внешних касательных
точка A.

Точка B

к ~~косой~~ к малой окружности касательная длиной

$2,4^2 - 1^2 = 4,76$

N7



Если N - середина дуги AC, то BN - биссектриса $\angle ABC$, аналогично CM - биссектриса $\Rightarrow$

$BN \cap CM = I$, I - центр вписанной окружности $\Rightarrow$ нам нужно найти AI

По лемме о трезубце $AM = MI = BM = r_1$

и

$AN = NI = NC = r_2 \Rightarrow$

MN - серединный перпендикуляр к AI, то есть $MN \perp AI$ и делит пополам.

Пусть $\angle ABN = \beta$, тогда $\angle ABN = \angle ACN = \angle AMN = \beta$.

Пусть $\angle ACM = \gamma$, тогда $\angle ACM = \angle ABM = \angle ANM = \gamma$

Пусть $MP \perp AB$ и $P \in AB$, $NQ \perp AC$ и $Q \in AC$.

Тогда: ~~NQ~~ $MP = r_1 \cdot \sin\gamma = 5$, по условию

$NQ = r_2 \cdot \sin\beta = 2{,}5$, по условию

Пусть $AI \cap MN = K$. Тогда $AK = r_2 \cdot \sin\gamma = r_1 \cdot \sin\beta$

$2{,}5 \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{5 \sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \sqrt{2}$, $\Rightarrow$ т.к. $\sin\beta > 0$, $\sin\gamma > 0$

$\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}$

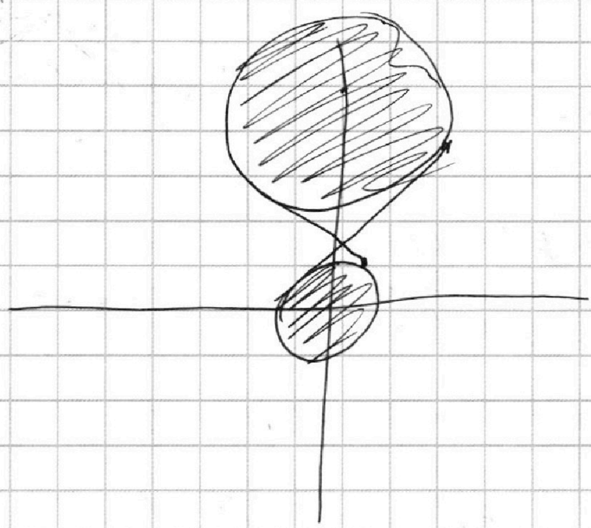
$AI = 2AK = 2r_1 \sin\beta = 2 \cdot \frac{5}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

Ответ: $5\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$\frac{3x^2-6x+2-3x^2-3x-1}{\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}} = 1-9x \Rightarrow$

$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

$2\sqrt{3x^2-6x+2} = 2-9x$

$12x^2-24x+8 = 4+81x^2-36x$

$69x^2-12x-8=0$

$2\ 3\cdot 3 \quad 4\cdot 2$

$9-12 \quad 36-24=12$

$1-9x=0$

$x=\frac{1}{9}$

$\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{2}$

$3+\sqrt{3}$ $3-\sqrt{3}$

$\frac{1}{27}-\frac{6}{9}+2$

$3x^2-6x+2=\frac{1}{27}-\frac{6}{9}+2=\frac{1-18+54}{27}=\frac{37}{27}$

$3x^2+3x+1=\frac{1}{27}+\frac{3}{9}+1=\frac{1+9+27}{27}$

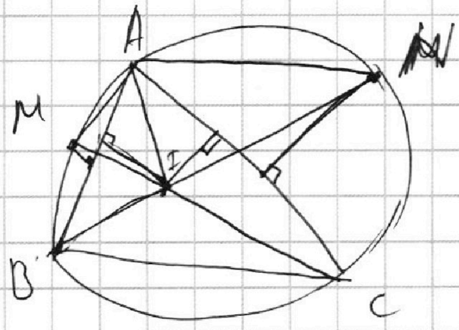
$144+32\cdot 69$

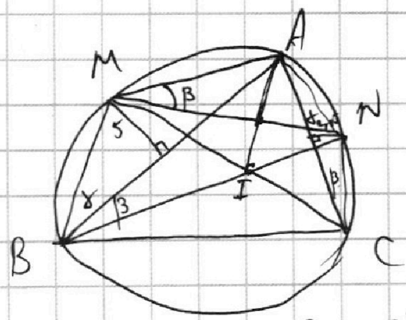
$16(9+2\cdot 69)=$ 138 147

$16\cdot 147$

$144+32\cdot 69$

$\sqrt{147}$ $7\cdot 21$ $28\sqrt{3}$





$r_1=$

$r_1\cdot\sin\beta = r_2\cdot\sin\gamma$

$r_1=\frac{5}{\sin\gamma} \quad r_2=\frac{2,5}{\sin\beta}$

r_1 и r_2

$AI = 2r_1\cdot\sin\beta = 2r_2\cdot\sin\gamma$

$\frac{5\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2,5\sin\gamma}{\sin\beta}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\sqrt{2} \Rightarrow \quad 2r_1\sin\beta=\frac{2\cdot 5}{\sin\gamma}$

$\sin\beta=\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$r_1=\frac{5}{\sin\gamma}$

$r_2=\frac{2,5}{\sin\beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{7}{\sin\beta\cdot\sin\alpha}=26 \quad \frac{tg\beta}{tg\alpha}=\frac{7}{17} \quad , tg\alpha - ?$

$\Downarrow$

$\sin\beta=\frac{7}{26\sin\alpha}\cdot\cancel{\sin\alpha} \Rightarrow \sin^2\beta=\frac{49}{676\sin^2\alpha}$

$\cos^2\beta=1-\frac{49}{676\sin^2\alpha}=\frac{676\cdot\sin^2\alpha-49}{676\sin^2\alpha}$

$tg^2\beta=\frac{49}{676\sin^2\alpha-49} \qquad \frac{\cancel{49}}{(676\sin^2\alpha-49)tg^2\alpha}=\frac{\cancel{49}}{289}$

$\sin^2\alpha=\frac{1}{\left(\frac{676\cdot tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}-49\right)tg^2\alpha}=\frac{1}{289}$

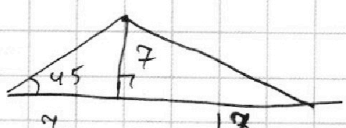
~~$676 tg^4\alpha - 49 tg^2\alpha = 289$~~ $+289 tg^2\alpha \quad x=tg\alpha$

$\frac{676x^2}{1+x}-49x=289$

$676x^2-49-49x^2=289+289x$

$627x^2-289x-338=0 \quad x=1$

$(x-1)(627x+338) \quad x=1$



$\frac{\times 17}{17}$ $\;119$ $\;17$

$\frac{\times 26}{26}$ $\;156$ $\;52$ $\;676$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$

$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=tg^2\alpha$

$\sin^2\alpha=tg^2\alpha-\sin^2\alpha tg^2\alpha$

$\sin^2\alpha(1+tg^2\alpha)=tg^2\alpha$

$\sin^2\alpha=\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

15 - 33

169

13

7^2 49 169

225

109

$\frac{289 + 49}{338}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a =$
$b =$
$c =$

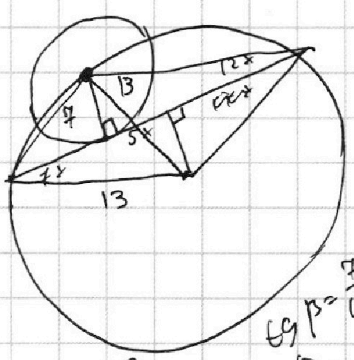
$$\begin{cases} v_2(a)+v_2(b) \geq 15 \\ v_2(b)+v_2(c) \geq 17 \\ v_2(a)+v_2(c) \geq 23 \end{cases}$$

$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} h \cdot c$

ab

$tg\alpha + tg\beta$

$v_2(a)+v_2(b)+v_2(c) \geq \cancel{\frac{55}{2}}\ 28$



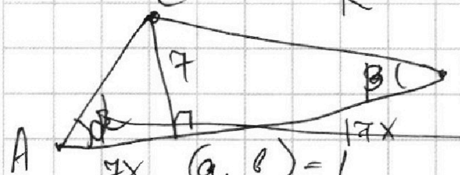
$$\begin{cases} v_7(a)+v_7(b) \geq 11 \\ v_7(b)+v_7(c) \geq 18 \\ v_7(a)+v_7(c) \geq 39 \end{cases}$$

$tg\beta = \frac{7}{17} tg\alpha$

$R = 13$

$\frac{7}{tg\alpha} + \frac{7}{tg\beta}$

$\frac{7}{tg\alpha} + \frac{17}{tg\alpha} = \frac{24}{tg\alpha}$



$v_7(a)+v_7(b)+v_7(c) \geq 39$

$(a, b) = 1$

$(a+b)^2 =$

$\cancel{a+b}$ $\quad \frac{a^2-7ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{a+b} - \frac{9ab}{a+b} = 9$

$\dfrac{\frac{7}{tg\alpha}}{\frac{7}{tg\beta}} = \frac{tg\beta}{tg\alpha} = \frac{7}{17}$

$ab;\ (a+b) - d$

$ab - (a+b)b \vdots d$

$b^2 \vdots d$

$BC = \frac{7}{\sin\beta}$

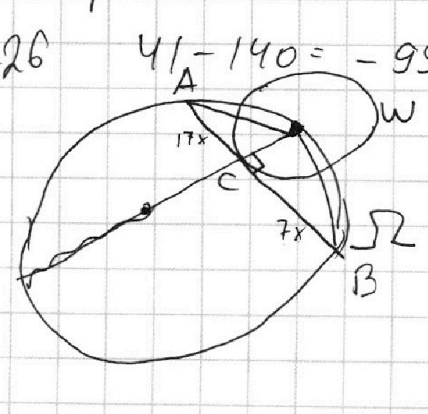
$\frac{\sin^2\beta \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\beta \cdot \sin^2\alpha} = \frac{49}{289}$

$a+b=9$

$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\frac{7}{26}\sin\alpha}$

$\frac{7}{\sin\beta \cdot \sin\alpha} = 26$

$41 - 140 = -99$



$\frac{49 \cos^2\alpha}{26^2 \cdot \cos^2\beta \cdot \sin^2\alpha} = \frac{49}{289}$

$13 \quad 12$

$26 - \frac{9 \cdot 13 \cdot 12}{}$

$\quad 13 \cdot 14$

$27 - \frac{9 \cdot 13 \cdot 14}{27}$

$36 - \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{14}}{36}$

$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta =$

$12 \mid 4$

$= 1 - \frac{49}{26^2 \cdot \sin^2\alpha}$

$= 26^2 \cdot \sin$