



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = k 2^7 3^{11} 5^{14} \quad bc = \ell 2^{13} 3^{15} 5^{18} \quad ac = m 2^{14} 3^{12} 5^{43}; k, \ell, m \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 = k \ell m ab \cdot ac \cdot bc = k \ell m \cdot 2^{34} 3^{43} 5^{75}$$

$$(abc)^2 : 3^{43} \Rightarrow (abc)^2 : 3^{44} \text{ (rem. степеней всех делителей)}, (abc)^2 : 5^{75} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{76}$$

$$\Rightarrow k \ell m : 15 \quad k \ell m = 15t, t \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 = \left(\frac{k \ell m}{15}\right) \cdot 2^{34} 3^{44} 5^{76} \quad abc = \sqrt{t} 2^{17} 3^{22} 5^{38}$$

$$abc : ac \Rightarrow abc : 5^{43} \Rightarrow \sqrt{t} : 2^5 \quad t : 2^{10}; k \ell m : (3 \cdot 5 \cdot 2^{10})$$

$$\sqrt{t} = f 2^5, f \in \mathbb{N}$$

$$abc = f 2^{17} 3^{22} 5^{43} \quad abc : (2^{17} 3^{22} 5^{43})$$

Докажем, что возможно,  $f=1$  (и тогда  $(abc)_{\min} = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$ )

Если  $k \ell m = 3 \cdot 5 \cdot 2^{10}$  это не вступает в конфликт ни с одним из условий. Тогда  $t = \frac{k \ell m}{15} = 2^{10}$ ,  $\sqrt{t} = 2^5$ ,  $f = \frac{\sqrt{t}}{2^5} = 1$  — это возможно. Ч.т.д.

$$\text{Ответ: } (abc)_{\min} = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

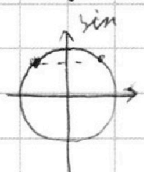
|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$



$$\cos(t) \in [0; \pi] \quad 5 \cos(t) \in [0; 5\pi]$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]; \quad x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$5 \cos(\sin x) = 5 \frac{\pi}{2} - 5 \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x, \quad -5 \cos(\sin x) = x - \pi$$

I)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}\right]$   $\cos(\sin x) = x + 2\pi k (k \in \mathbb{Z}) - x - 10\pi k = x - \pi$   
 $2x = \pi(1 - 10k) \quad x = \frac{\pi}{2}(1 - 10k)$   $\begin{cases} x > -\frac{3\pi}{2} & 1 - 10k > -3 & 10k \leq 4 & k \leq 0.2 \\ x \leq \frac{7\pi}{2} & 1 - 10k \leq 7 & 10k \geq -6 & k \geq -0.6 \end{cases} \quad k=0$   
 $x = \frac{\pi}{2}$  Проверка:  $5 \cos(\sin \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$  - верно

II)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(2\pi k + \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \pi\right)$   $\cos(\sin x) = \pi - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$   
 $-5\pi + 5x - 10\pi k = x - \pi \quad 4x = (4 + 10k)\pi \quad x = \frac{\pi}{4}(4 + 10k)$   $\begin{cases} 5k > -5 & k > -1 \\ 5k \leq 5 & k \leq 1 \end{cases} \quad k \in \{-1, 0, 1\}$   $\begin{cases} x > -\frac{3\pi}{2} & x > -\frac{3\pi}{2} \\ x \leq \frac{7\pi}{2} & x \leq \frac{7\pi}{2} \end{cases}$  Проверка:  $x = -\frac{3\pi}{4}$ :  $5 \cos(\sin -\frac{3\pi}{4}) =$   
 $= \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = 0 = 3\pi$  - верно;  $x = \pi$ :  $5 \cos(\sin \pi) = \frac{3\pi}{2} + \pi = \frac{5\pi}{2} = 5\pi$  - верно  
 $x = \frac{7\pi}{4}$ :  $5 \cos(\sin \frac{7\pi}{4}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} = 5\pi$  - верно

Ответ:  $x = \pi, x = \frac{7\pi}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

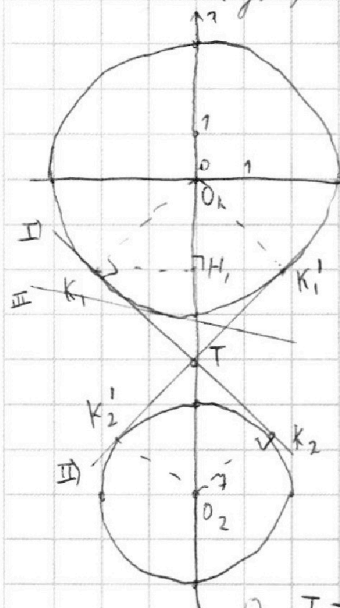
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 5) = 0 \end{cases}$$

Задача: 7б; 4 решения

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно не содержит  $a$  и  $b$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + 49 - y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

т.е.  $(y; x)$  на координатной плоскости окружности  $W_1(0; -7, 2)$  и  $W_2(0; 0, 3)$



Первое уравнение задает прямую  $x = -3ay + 7b$

Уравнения 4 решения  $\Leftrightarrow$  прямая пересекает обе окружности

Рассмотрим те  $a$ , при которых условие не выполняется, т.е. прямая касается обеих окружностей либо касается лишь одной (и не имеет общих точек с другой), при этом, т.к.  $b$  варьируется, условие не должно выполняться при параллельной прямой, а значит, окружности в разном положении относительно  $x = -3ay + 7b$

I)  $\triangle O_1 K_1 T \sim \triangle O_2 K_2 T$   $\frac{O_1 T}{O_2 T} = \frac{O_1 K_1}{O_2 K_2} = \frac{2}{3}$   $O_1 O_2 = 7$   $O_1 T = \frac{3}{5} O_2 T = \frac{21}{5}$

$O_2 T = \frac{21}{5}$   $O_1 O_2 = 7$   $H_1 T = \frac{21}{5} - \frac{15}{7} = \frac{3(49-25)}{35} = \frac{72}{35}$   $K_1 H_1 = \sqrt{O_1 K_1^2 - O_1 H_1^2} = \sqrt{2^2 - \frac{15^2}{49}} = 3\sqrt{\frac{49-25}{49}} = \frac{3}{7}\sqrt{24} = \frac{6}{7}\sqrt{6}$

$\tan \angle H_1 K_1 T = \frac{H_1 T}{K_1 H_1} = \frac{\frac{72}{35}}{\frac{6}{7}\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{35}$  Угловой коэффициент - тангенс угла наклона:  $-3a = -\frac{12\sqrt{6}}{35}$   $a = \frac{4\sqrt{6}}{35}$

II) для параллельности  $-3a = \frac{12\sqrt{6}}{35}$   $a = -\frac{4\sqrt{6}}{35}$

III)  $a \in (-\frac{4\sqrt{6}}{35}, \frac{4\sqrt{6}}{35})$  - прямая пересекает обе окружности

Когда нет 4 решений,  $a \in [-\frac{4\sqrt{6}}{35}, \frac{4\sqrt{6}}{35}]$ , когда есть

Ответ:  $a \in (-\infty, -\frac{4\sqrt{6}}{35}) \cup (\frac{4\sqrt{6}}{35}, +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} \log_7^4(6x) - 2 \log_7 6x \cdot 7 &= \log_7 36x^2 \cdot 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 y \cdot 7 &= \log_7^2(7^5) - 4 \end{aligned}$$

0 3:  $x, y > 0; y \neq 1, x \neq \frac{1}{6}$  пусть  $k = \log_7 6x, t = \log_7 y, k, t \neq 0$

$$\begin{cases} k^4 - \frac{2}{k} = \frac{3}{2k} - 4 \\ t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^4 = \frac{7}{2k} - 4 \\ t^4 = -\frac{7}{2t} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^5 + 4k = 3,5 \\ t^5 + 4t = -3,5 \end{cases}$$

$$k^5 + t^5 + 4(k+t) = 0 \quad (t+k)(k^4 - k^3t + k^2t^2 - kt^3 + t^4) = 0$$

$$(t+k)(k(k^3-t^3) - t(k^3-t^3) + 4) = 0 \quad (t+k)((k-t)^2(k^2+kt+t^2) + 4) = 0; (k-t)^2 > 0$$

$$k^2+kt+t^2 > 0 \quad (t \neq 0; (\frac{k}{t})^2 + (\frac{k}{t}) + 1 = 0; D = 1-4 < 0; \frac{1}{t} > 0), \Rightarrow (k-t)^2(k^2+kt+t^2) + 4 > 0$$

$$t+k=0 \quad t=-k$$

Замечаем следующее:  $t = -k \quad \log_7 6x = -\log_7 y \quad 6x = \frac{1}{y}$

$xy = \frac{1}{6}$  - ед. возможное значение.

Проверка:

$$2k^5 + 8k - 7 = 0; k = \frac{7}{2}; 2 \cdot \frac{7^5}{2^5} + \frac{8 \cdot 32 \cdot 7}{2^5} - \frac{7 \cdot 32}{2^5} = 0; 7 \cdot 7^4 + 128 \cdot 7 - 16 = 0 \text{ - не угадано}$$

$$f(k) = 2k^5 + 8k; f(k) \uparrow; f(0) = 0; f(1) = 10 \Rightarrow \forall k \in (0; 10): f(k) = 7$$

$k \in (0; 10)$

-  $k$  угадано: если угадано  $k$ , то  $t = -k$ :  $2t^5 + 8t = -(2k^5 + 8k) = -7$   
 -  $t$  угадано:  $\Rightarrow x$  и  $y$  угаданы. ( $k, t \neq 0 \Rightarrow x, y \neq 1, x \neq \frac{1}{6}$  - угадано)

Ответ:  $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

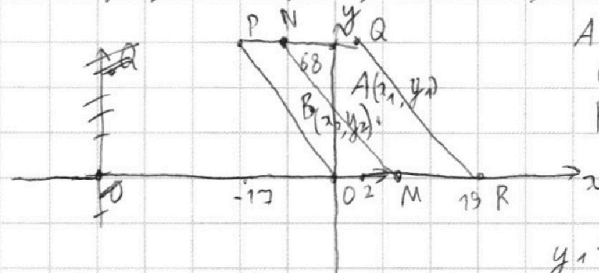
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0,0)$ ,  $P(-17,68)$ ,  $Q(2,68)$ ,  $R(19,0)$



$A$  и  $B$  были  $OR$ , но линии  $PQ$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 68$$

$$PO: y = -4x; QR: y = -4(x-19) = 76 - 4x$$

$A$  и  $B$  были  $PO$ , но линии  $QR$

$$-4x_1 \leq y_1 \leq 76 - 4x_1; -4x_2 \leq y_2 \leq 76 - 4x_2$$

$$y_1 + 4x_1 \in [0, 76] \quad y_2 + 4x_2 \in [0, 76]$$

$$4x_2 + y_2 - (4x_1 + y_1) = 40$$

$$(4x_1 + y_1) \in [0, 76] \quad 4x_2 + y_2 \in [40, 116] \quad y_2 + 4x_2 \in [40, 76]$$

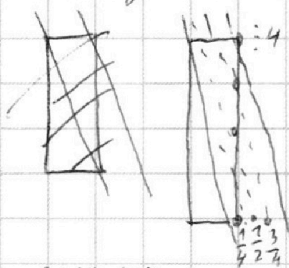
$$(4x_1 + y_1) = (4x_2 + y_2) - 40 \quad (4x_1 + y_1) \in [0, 36]$$

$$y_1 = -4x_2 + b, \quad b \in [0, 36]$$

$$y_2 = -4x_2 + d, \quad d \in [40, 76]$$

— уравнения прямых, параллельных  $PO$

$$(4x_2 + y_2) - (4x_1 + y_1) = 40 \quad d - b = 40$$



Все прямые, параллельные  $PO$  имеют  $x$  через  $1/4$ .  $x_1 = \frac{b-y}{4}$ ;  $y = \frac{4}{4}x$

I) при  $y \equiv 0$ :  $x_1 = \frac{b}{4}$ ,  $x_1 \in [0, 9]$  — 9 прямых — 9 пар точек

$y \equiv 0$   $x_2 = \frac{y}{4}$ ,  $x_2 \in [10, 19]$  — 10 прямых

на каждой прямой  $\frac{68}{4} + 1$  точек (уч. по формуле)

если  $y \neq 4$ , то  $x \neq 2$

— всего 18. На каждой из прямых 18 точек

Внутри  $PQRO$ . Итого  $9 \cdot 18^2$  точек при  $y \equiv 0$

II) при  $y \equiv 1, 2, 3$  — у нас нет точек на границах, поэтому мы получаем их попарно при  $y \equiv 1$   $x \equiv \frac{b-1}{4}$ ,  $x_1 \in [0, 8]$  — 8 прямых — 8 пар точек

$x \equiv \frac{1-1}{4}$ ,  $x_2 \in [10, 18]$  — 9 прямых —

или  $y \equiv 2, 3$ . Итого  $3 \cdot 8 \cdot 17^2$

$$1 \cdot 9 \cdot 18^2 = (8+1) \cdot 18^2$$

$$\text{Ответ: } 9 \cdot 18^2 + 3 \cdot 8 \cdot 17^2 \quad (= 9852)$$

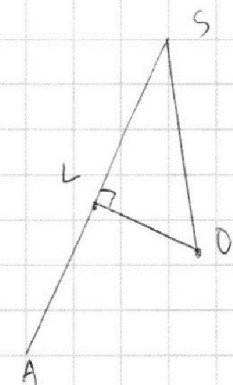
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SO = 5; OL = 4 \Rightarrow SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = 3; AL = 7$$

$$AK = AL = 7 \quad AM = 10 \quad AA_1 = 15 \quad KM = 3$$

$$KA_1 = 15 - 7 = 8$$

$$OM = \sqrt{KM^2 + OK^2} = 5 = OS \quad OM = OS$$

$\triangle SOM$  - равносторонний;  $OT$  - медиана, высота, биссектриса.

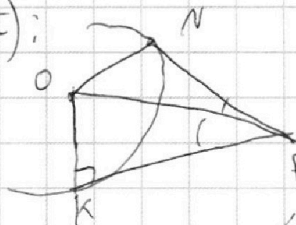
$$OA_1 = \sqrt{OK^2 + KA_1^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

$KF$  - медиана к  $BC$

$$\frac{KF}{AM} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{10} \quad KF = \frac{8}{10} \cdot 12 = \frac{96}{10} = 9.6$$

(KOF):



$FN = FK$  (касательные)

$$OK = 4; KF = 9.6$$

$$\angle NFK = (\angle BOC), (\angle ABC)$$

$$\frac{\angle NFK}{2} = \arccos \frac{OK}{KF} = \frac{40}{96} = \frac{20}{48} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\sin \frac{\angle NFK}{2} = \frac{5}{13} \quad (\text{так как } 5^2 + 12^2 = 13^2)$$

$$\cos \angle NFK = 1 - 2 \sin^2 = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = 1 - \frac{50}{169} = \frac{119}{169}$$

$$= \frac{169 - 50}{169} = \frac{119}{169}$$

Ответ:  $\angle NFK = \arccos\left(\frac{119}{169}\right)$



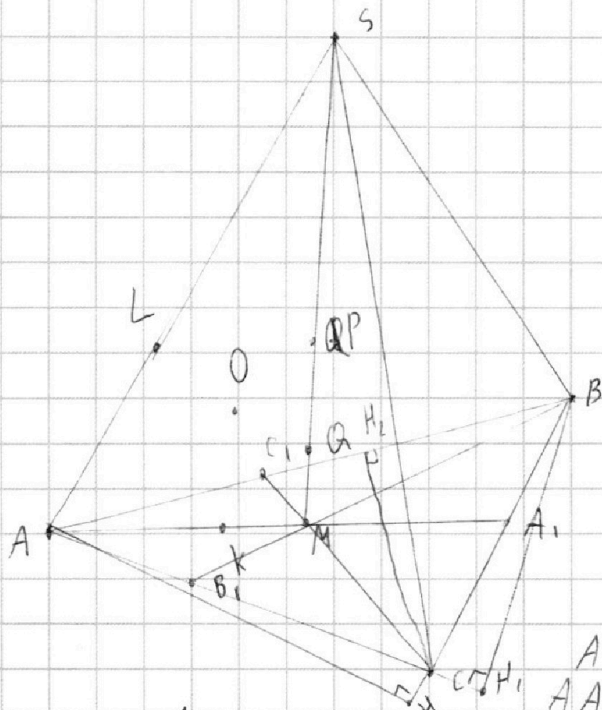
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

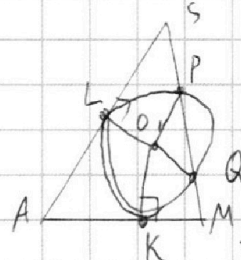
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



0-значит  $\angle O L = \angle O K = \angle O Q = \angle O P$

В (ASM):  $\angle O L = \angle O K = \angle O Q = \angle O P$



$\angle O P Q = 0, \angle O P =$   
 $\Rightarrow \angle O, P S = \angle O, Q M$   
 $\Rightarrow \angle O, P S = \angle O, Q M$   
 $\Rightarrow \angle O, P S = \angle O, Q M$   
 $\Rightarrow O S = O M$

$\triangle O, L S, O, K M$  - прямоугольн.  $\angle O, L = \angle O, K$   
 $O S = O M \Rightarrow \triangle O, L S = \triangle O, K M$   $\angle S = \angle M$

$A K, A K$  - кон.  $\Rightarrow A L = A K$

$A S = A L + L S = A K + K M = A M$

$A M = A S = B C = 10$

$A A_1 = \frac{3}{2} A M = 15$

$A H$  - вкл.  $\triangle A B C$ ;  $A H \perp B C$  (высота)  $\frac{1}{2} A H \cdot B C = S_{A B C} = 60$

$A H = \frac{120}{B C} = 12$

$A_1 H = \sqrt{A A_1^2 - A H^2} = 9$

$B A_1 = \frac{B C}{2} = 5$ ;  $B H_1 = 14$ ;  $C H_1 = 4$

$A C = \sqrt{A H^2 + H C^2} = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$A B = \sqrt{A H^2 + B H^2} = \sqrt{144 + 196} = \sqrt{340}$

$B H_1$  - вкл. к  $A C$   $B H_1 = \frac{2 S}{A C} = \frac{120}{4\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$

$C H_1 = \sqrt{B C^2 - B H_1^2} =$

$= \sqrt{100 - 90} = \sqrt{10}$   $B, C = \frac{A C}{2} = 2\sqrt{10}$ ;  $B, H_1 = B, C + C H_1 = 3\sqrt{10}$

$C H_2$  - вкл. к  $A B$

$C H_2 = \frac{2 S}{A B} = \frac{120}{\sqrt{340}} = \frac{120}{\sqrt{340}} = \frac{6}{17} \sqrt{340}$

$B C_1 = A C_1 = \frac{A B}{2} = \frac{\sqrt{340}}{2}$

$C_1 H_2 = B C_1 - B H_2$   $B H_2 = \sqrt{B C^2 - C H_1^2} = \sqrt{100 - \frac{6^2}{17^2} \cdot 340} = \sqrt{100 - \frac{36}{17} \cdot 20} = \sqrt{\frac{1700 - 720}{17}} =$

$= \sqrt{\frac{980}{17}} = \frac{1}{17} \cdot \sqrt{980} \cdot \sqrt{340} = \frac{7}{17} \sqrt{340}$

$C_1 H_2 = B C_1 - B H_2 = \left(\frac{17}{34} - \frac{7}{34}\right) \sqrt{340} = \frac{3 \sqrt{340}}{34}$

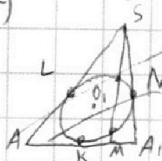
$C C_1 = \sqrt{C H_2^2 + H_2 C_1^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{17}\right)^2 + \left(\frac{3}{34}\right)^2} \sqrt{340} = \frac{\sqrt{144 + 9}}{17} \cdot \sqrt{340} = \frac{\sqrt{153}}{17} \cdot \sqrt{340} = \frac{3 \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{20}}{17} =$

$= 3\sqrt{20}$

1) Ответ:  $A A_1 \cdot B B_1 \cdot C C_1 = 15 \cdot 3\sqrt{20} \cdot 3\sqrt{20} =$

$= 15 \cdot 9 \cdot 20 = 300 \cdot 9 = 2700$

2) (ASM):



$S N = 3$   $S L = S N = 3$

$\angle O L = \angle O K = \angle O Q = \angle O P = 0$   $N = 4$  - радиус

$\angle O L = \angle O K = \angle O Q = \angle O P = 0$   $N = 4$  - радиус

прог. на ун. мсте



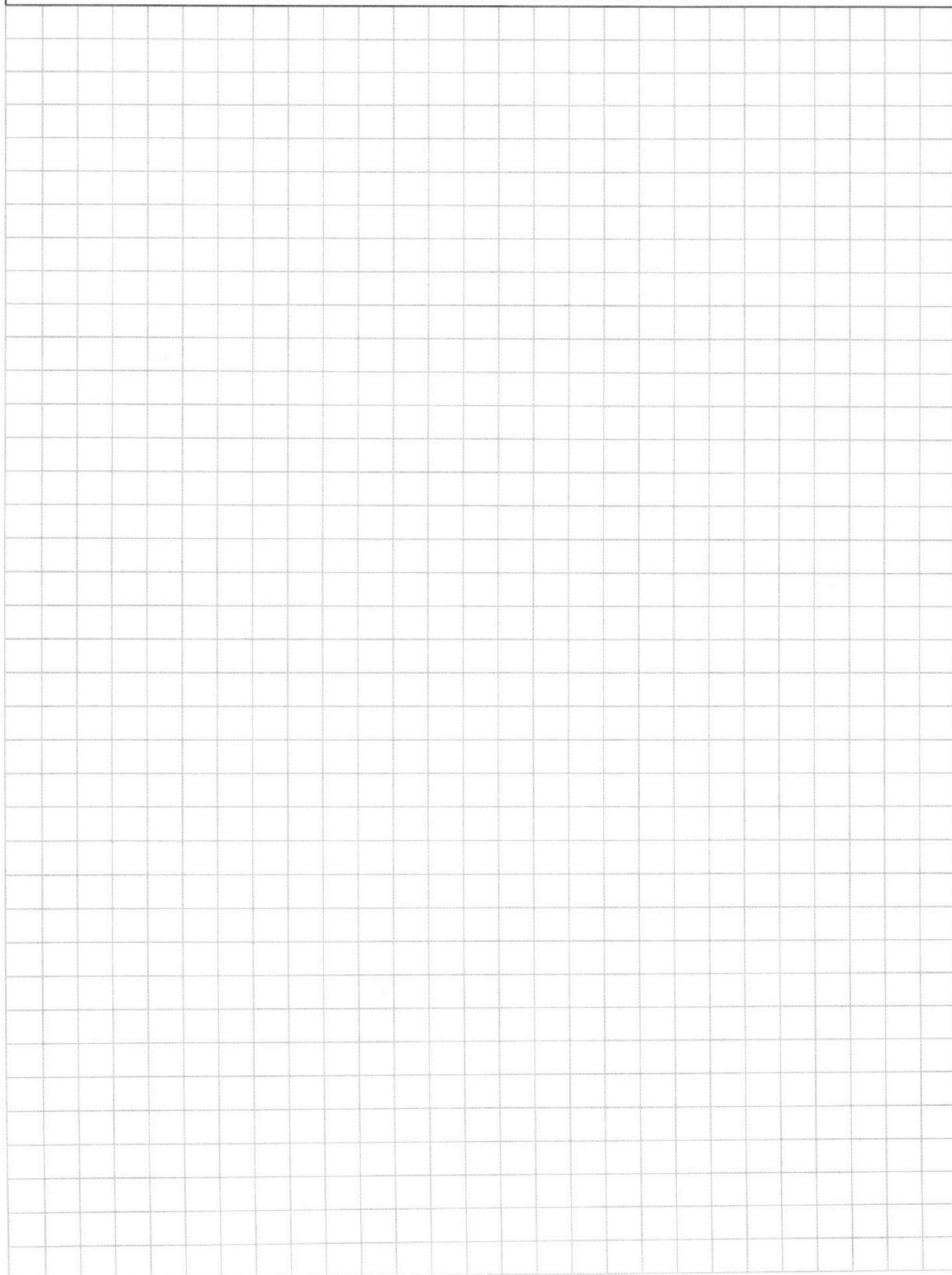
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 11 \\ 256 \\ \times 13 \\ \hline 768 \\ 256 \\ \hline 3328 \end{array}$$

~~3328~~ 3418

$$\begin{array}{r} 1430 \\ - 135 \\ \hline 1235 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1235 \overline{)13} \\ \underline{117} \\ 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{)13} \\ \underline{73} \\ 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 141 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 980 \overline{)17} \\ \underline{80} \\ 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ \times 12 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \\ \times 329 \\ \hline 2916 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \\ \times 2312 \\ \hline 6936 \\ 2316 \\ \hline 9852 \end{array}$$