



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot K_1$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot K_2$,
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot K_3$, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z} \geq 0$, а

$K_i \in \mathbb{N}$ и $\text{НОД}(K_i, 30) = 1$. Тогда из

условия: $ab : 2^6$, $bc : 2^{14}$, $ac : 2^{16} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases}$

Тогда: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$. Из условия, что $ab : 3^{13}$,
 $bc : 3^{21}$, $ac : 3^{25} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{59}{2} \\ \beta_2 + \beta_1 \geq 25 \end{cases}$

т. к. $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z} \geq 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$.

Из условия, что $ac : 5^{28} \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$.

Тогда: $a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \geq$
 $\geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Остается привести пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$
 $b = 2^2 \cdot 3^5$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

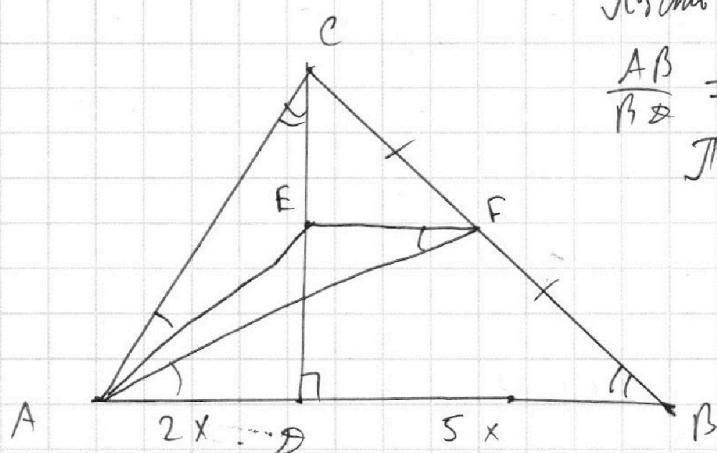
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AB = 7x$. П.к. $\frac{AB}{BD} = 1,4 \Rightarrow AD = 2x, BD = 5x$
П.к. AC — касательная

$$\Rightarrow \angle CAE = \angle FBA$$

П.к. $EF \parallel AB \Rightarrow$

$$\angle FBA = \angle FAB$$

Потому $\angle CAE = \angle FAB$. $\angle CBD + \angle DCB = 90^\circ$,

$$\angle DCB + \angle ACD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle CBD \Rightarrow$$

$$\triangle ACE \sim \triangle AFB \text{ по 2 угла} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$$

$$\text{П.к. } \triangle ACD \sim \triangle ACB \text{ по 2 угла} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$$

$$AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AC = \sqrt{14}x. \text{ Аналогично } CB^2 = BD \cdot AB$$

$$CB = \sqrt{35}x. \quad \frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\text{П.к. } \triangle ACD \sim \triangle CBD \text{ по 2 угла} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow$$

$$CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{10}x. \text{ П.к. } EF \parallel BD \Rightarrow$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{35}x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}. \quad \frac{CF}{BF} = \frac{\frac{CE}{BF}}{\frac{CE}{CF}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}} = 1$$

$$\text{Потому } CF = BF = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{35}}{2}x. \triangle ACD \sim \triangle ECF \text{ по 2 угла } (\angle CEF = 90^\circ \text{ п.к. } EF \parallel AB, \angle CFE = \angle CBA = \angle ACD,$$

$$\text{п.к. } EF \parallel AB). \text{ Тогда: } \frac{S_{ACD}}{S_{ECF}} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{14x^2}{35x^2} = \frac{2}{5}$$

Ответ: $\frac{2}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П.к. $\arccos x \in [0; \pi] \Rightarrow \text{если } x - \text{реальное}$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x, \text{ то } 9\pi - 2x \in [0; 10\pi]$$

$$\text{то возможно: } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

Произвольное значение: $\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$:

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 2x - 10\arcsin(\sin x) = 4\pi$$

$$1) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x, \Rightarrow -8x = 4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x \Rightarrow 2x - 10(\pi - x) = 4\pi \Rightarrow$$

$$12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$3) x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 2\pi \Rightarrow 2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi \Rightarrow$$

$$8x = 16\pi \Rightarrow x = 2\pi$$

$$4) x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 3\pi - x \Rightarrow 2x - 10(3\pi - x) = 4\pi \Rightarrow$$

$$12x = 34\pi \Rightarrow x = \frac{17\pi}{6}$$

$$5) x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 4\pi \Rightarrow 2x - 10(x - 4\pi) = 4\pi$$

$$8x = 36\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6}, x = 2\pi, x = \frac{17\pi}{6}, x = \frac{9\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

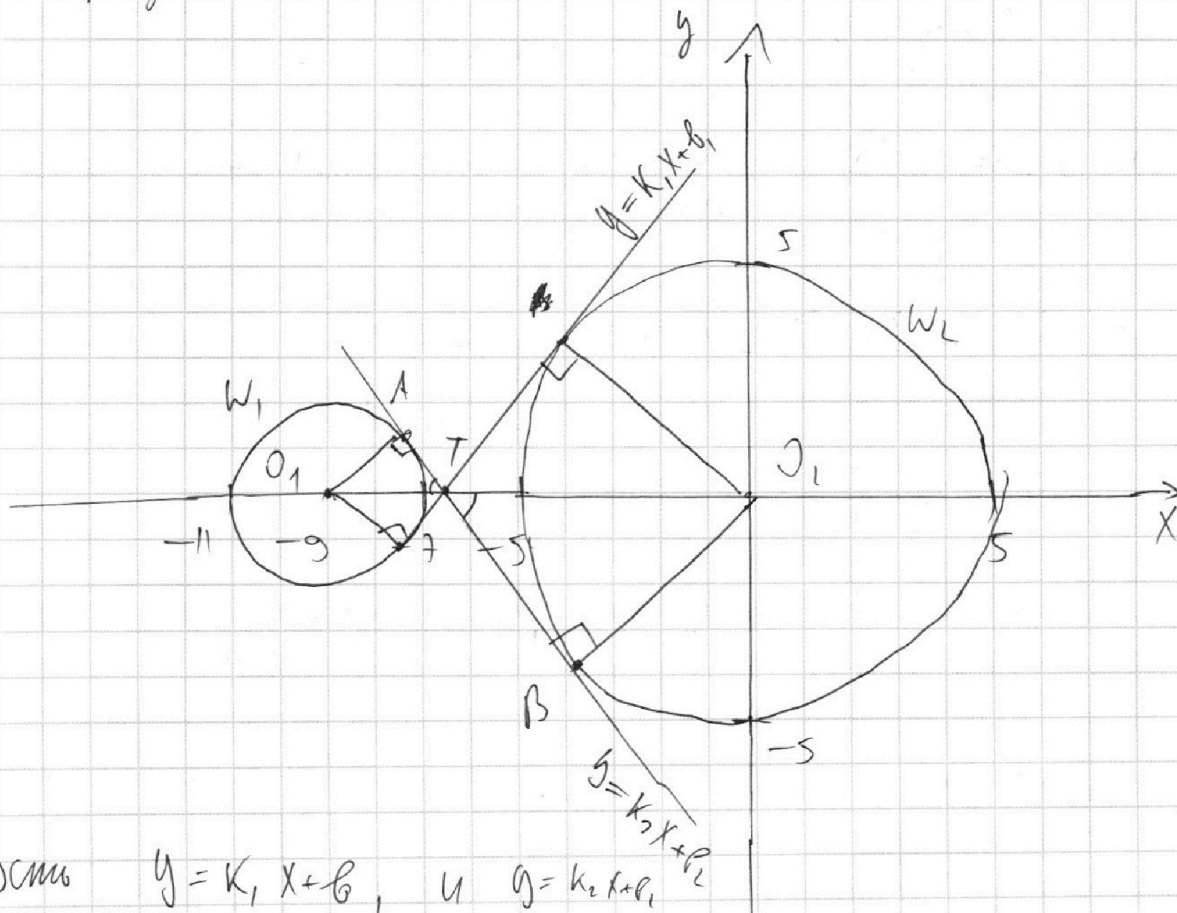
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Связь между решениями $x \Leftrightarrow y$. При такой связи, количество решений не изменится. Пусть:

$$\begin{cases} y = \frac{6}{5} - 1,2\alpha x \\ (x^2 + y^2 - 25)(x + 9)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение на координатах x и y представляется собой две окружности:



Пусть $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$

то две внешние касательные к этим двум окружностям. Тогда наша система имеет ровно 4 решения при каком-то b , радиусов и центрах, тогда $-1,2\alpha \in (k_2; k_1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что эти две окружности симметричны относительно оси Ox , поэтому их центры лежат на оси Ox . Заметим, что вершины и центры окружностей симметричны, поэтому пересечение обеих окружностей лежит на прямой Ox . Пусть есть окружность W_1 , ее центр O_1 , а окружность W_2 , ее центр O_2 . Пусть прямая $y = k_2 x + b_1$ пересекает W_1 в точке A , а W_2 в точке B , а Ox в точке T . Тогда $\triangle O_1 A T \sim \triangle O_2 B T$ по 2 углам. $\Rightarrow \frac{O_1 T}{O_2 T} = \frac{O_1 A}{O_2 B} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{5}$. $O_1 T + O_2 T = O_1 O_2 = 9 \Rightarrow O_1 T = \frac{18}{7}$, $O_2 T = \frac{45}{7}$. Тогда $\angle A T O_1 = \angle$ ~~и т.д.~~ $A T = \sqrt{O_1 T^2 - O_1 A^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{7}\right)^2 - 4} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$. Тогда $\tan \angle = \frac{2}{\frac{8\sqrt{2}}{7}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$. Крестом y уравнение $y = k_2 x + b_1$, k_2 по условию равен $\tan \angle \Rightarrow k_2 = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$. Из симметрии $k_1 = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow -1,75 \in \left(-\frac{7}{4\sqrt{2}}, \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$ $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$. Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем первое: $\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \cdot \log_{11} x} - 5$

Сделаем замену: $\log_{11} x = a$: $a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \quad | \cdot 3a$

$3a^5 + 15a = 16$. Преобразуем второе:

$\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3 \cdot \log_{11}(0,5y)} - 5$

Сделаем замену: $\log_{11}(0,5y) = b$:

$b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \quad | \cdot 3b$: $3b^5 + 15b = -16$

Рассмотрим функцию $f(t) = 3t^5 + 15t$

$f'(t) = 15t^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(t)$ — возрастает.

Также заметим, что $f(t) = -f(-t) \Rightarrow$

$f(t)$ — нечетная. И.к. $f(t)$ монотонно

возрастает, то решение уравнения $f(t) = 16$

ровно 1 (оно существует, и.к. $f(t)$ — монотонно

нечетная функция). Аналогично $f(t) = -16$

имеет ровно одно решение. Пусть a_0 —

решение $f(t) = 16$. И.к. $f(t)$ — нечетная, то

$f(-a_0) = -16 \Rightarrow -a_0$ — решение $f(t) = -16$

Получаю: если x и y решение системы,

то $a = -b \Rightarrow \log_{11} x = -\log_{11} 0,5y \Rightarrow$

$\log_{11} 0,5xy = 0 \Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$ Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

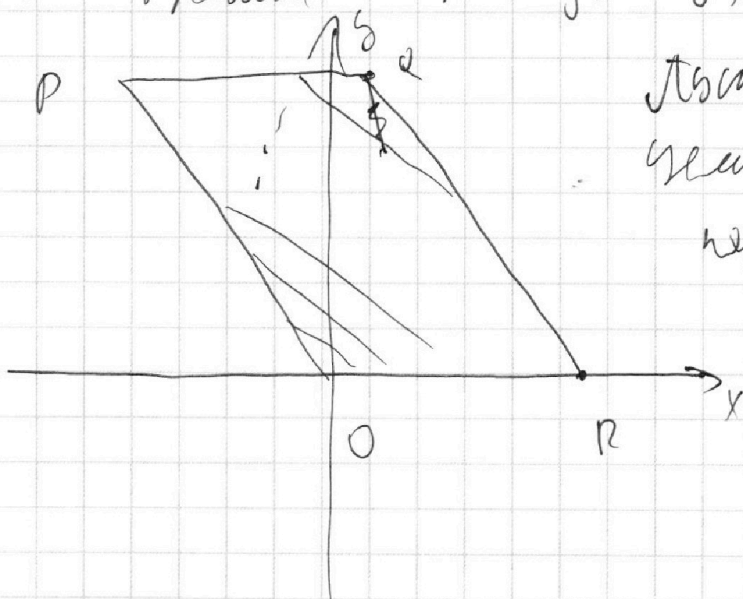
Пусть точка А лежит на прямой

$$y = 61 - 0.5x. \text{ Пусть также условие выполняется,}$$

точка В также лежит на прямой

$$y = 48 + 61 - 0.5x. \text{ Пусть полученный пересек}$$

$$\text{на прямой линия } y = -0.5x + c.$$



Пусть a_i — значение

функции точки a_i

пересек на

$$\text{прямой } y = i - 0.5x.$$

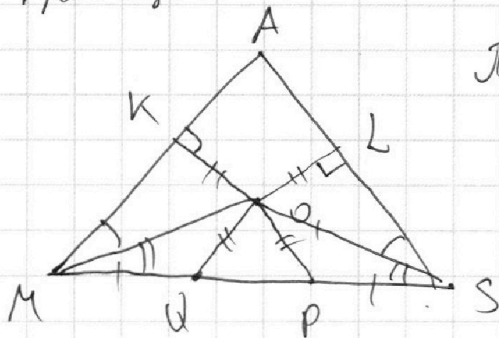
Пусть

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O — центр сферы Ω . Рассмотрим
проекцию точки O на плоскость SAM :



П.к. $OL = OK = OP = OQ$

как радиусы сферы $\Rightarrow$

$\angle OKL = \angle OLP = \angle OQP = \angle OQK \Rightarrow$

$\triangle OQP \sim \triangle OLP \Rightarrow \angle OQP = \angle OLP$

$\angle OQP = \angle OLP \Rightarrow \angle OQM = \angle OPS \Rightarrow$

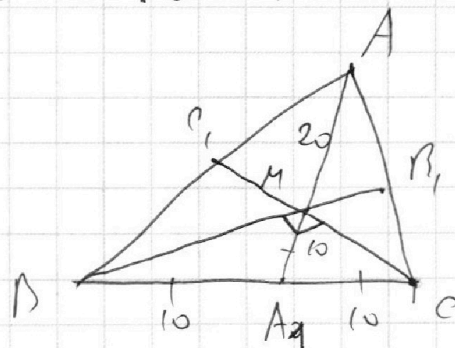
$\triangle MQO = \triangle SPO$, по 2 сторонам и углу
между ними $\Rightarrow \angle OQM = \angle OPS$. $\triangle MKO = \triangle SLO$,
по катету и гипотенузе $\Rightarrow \angle KMO = \angle LSO \Rightarrow$

$\angle AMS = \angle ASM \Rightarrow AM = AS = 20$. Теперь

рассмотрим треугольник ABC :

П.к. M — пересечение медиан $\Rightarrow$

$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = 10$



Поскольку в $\triangle ABC$ медиана

равна половине стороны $\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$. Опустим

высоту AH на BC . Тогда: $S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = 180$

$AH = \frac{360}{30} = \frac{360}{20} = 18$. Опустим высоту MH_1 на

BC , тогда $\triangle MA_1H_1 \sim \triangle MA_1AH \Rightarrow \frac{MH_1}{AH} = \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Тогда $MH_1 = 6$. $S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{AH_1 \cdot BC}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

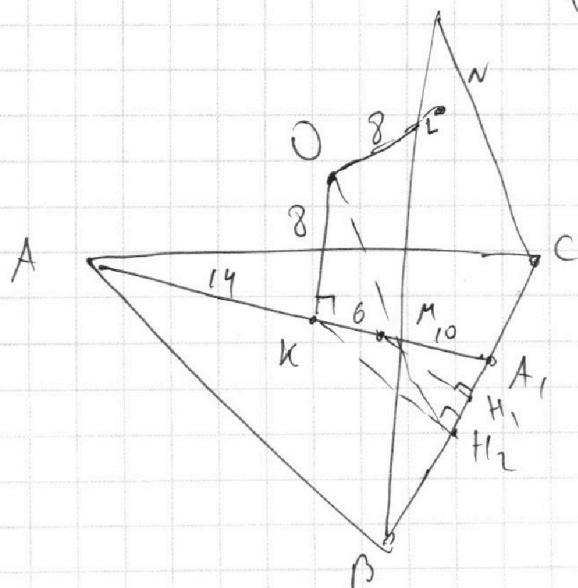
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $BM \cdot MC = MH_1 \cdot BC = 20 \cdot 6 = 120 \Rightarrow AM \cdot BA \cdot CA =$
 $= 120 \cdot 20 = 2400$ $AA_1 = \frac{3}{2} AM$, $BB_1 = \frac{3}{2} BA$, $CC_1 = \frac{3}{2} CA \Rightarrow$
 $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{27}{8} \cdot AM \cdot BA \cdot CA = \frac{27 \cdot 2400}{8} = 8100.$

$G = SN = SL$ как отрезки касательных $\Rightarrow AL = AS - \cancel{SL} =$
 $= 14$. $AL = AK$ как отрезки касательных,
 пусть: $KH = \cancel{AK} = AM - AK = 6$. Пл. к.

$ON = OK = 8$ как радиусы, то $O \in$
 лс. н-м сходимости при при лс-е BC :

Изобразим рисунок



KH_1 на BC . $\triangle A_1KH_1C$

$\triangle A_1MH_1$ к.к. $AH_1 \parallel KH_1$

Пусть: $\frac{10}{16} = \frac{AH_1}{KH_1} \Rightarrow$

$KH_1 = \frac{16 \cdot 6}{10} = \frac{48}{5}$

Пл. к. $OK \perp APC \Rightarrow$

$OK \perp KH_1$. То

мешает O при пересечении: $OH_1 \perp BC$. Пусть

$\angle OH_1K = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{OK}{KH_1} = \frac{8}{\frac{48}{5}} = \frac{8 \cdot 5}{48} = \frac{5}{6}$

$\alpha = \arctan \frac{5}{6}$. Пл. к. $O \in$ лс. н-м $\Rightarrow$ сходимости

при при лс-е BC равен 2α . Ответ: а) 8100
 б) $2 \arctan \frac{5}{6}$

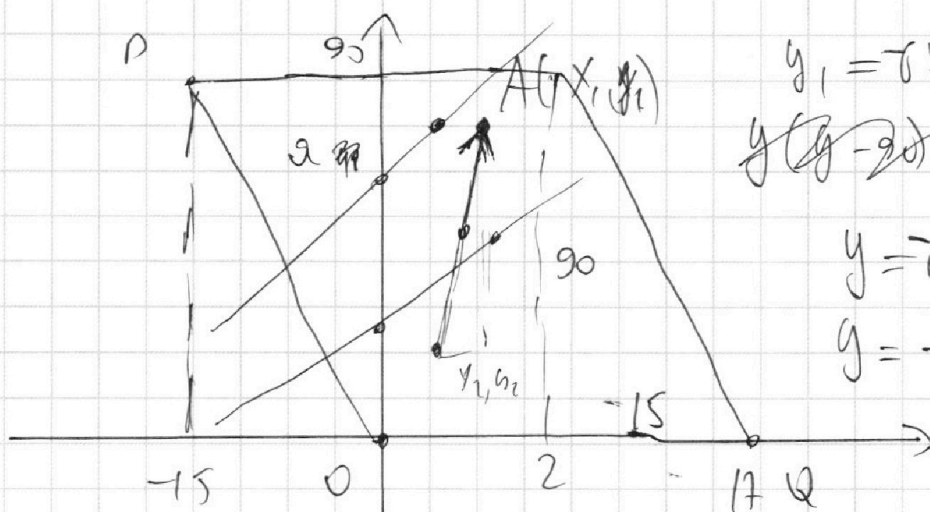
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_1 = 6x_1 + 92 - 48 + 6x_1$$

$$y_2 = 90 - 20x_1$$

$$y = 6x + b$$

$$y = -6x + 47 - 6$$

$$6y_2 - 6x_1 + 92 - 48 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (92 - 48) = 48$$

$$(6; 1) \quad y_1 = 6 \cdot 17 - 6x_1$$

$$y_2 = 90 - 6x_2$$

$$y_2 - y_1 + 6x_1 - 6x_1 = 90 - 6 \cdot 17 = 48$$



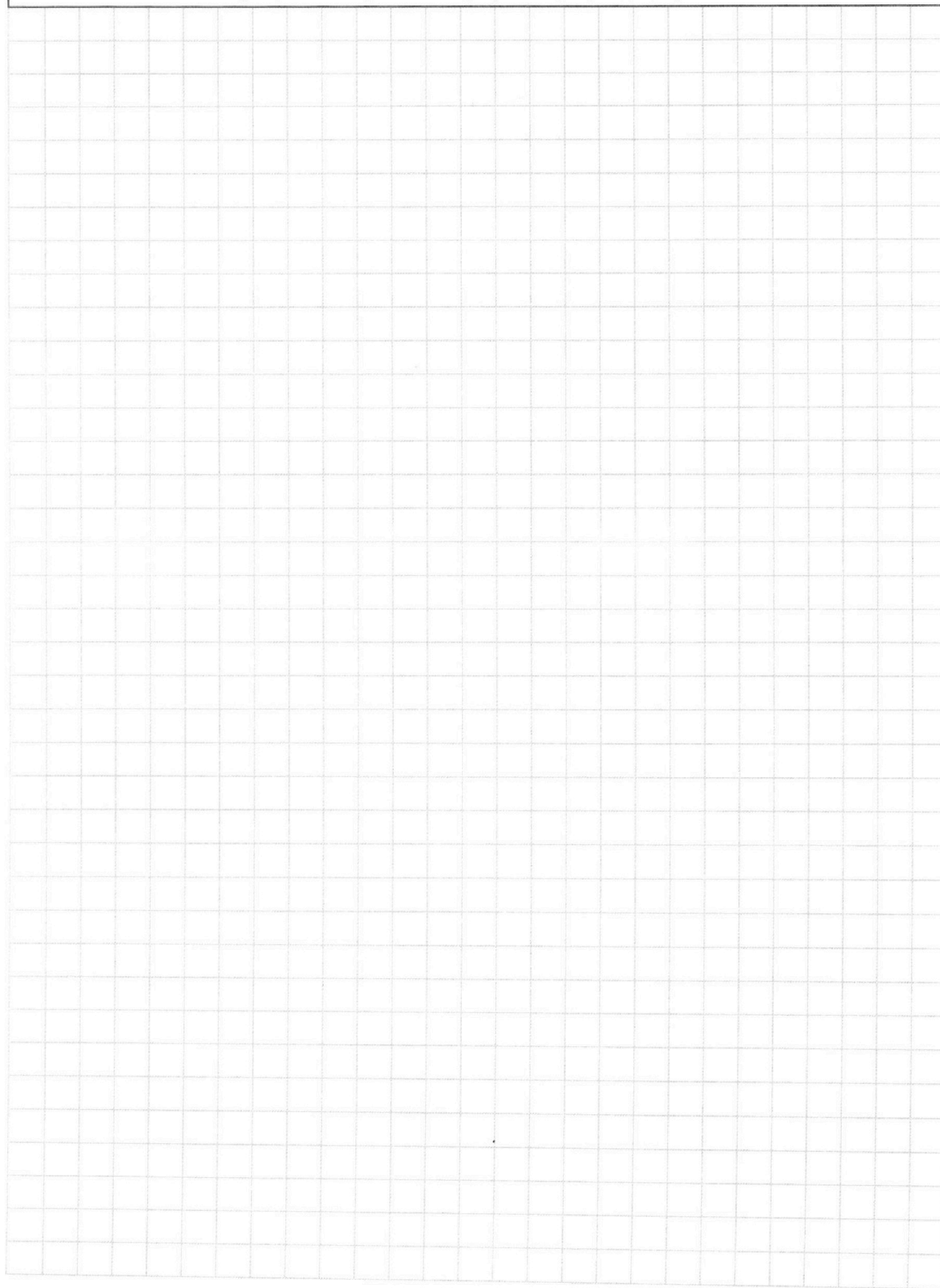
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad \log_{11} x = a$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \Rightarrow 3a^5 - 18 = -2 - 15a$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,75) + \log_{0,75} 11 = \log_{(0,75)^2} (11^{11}) - 5$$

$$\log_{11} 0,75 = b$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-13) - 5 \quad | \cdot 3b$$

$$3b^5 + 3 = -13 - 15b$$

$$3b^5 + 16 + 15b = 0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0 \quad \nearrow$$

$$3b^5 + 15b + 11 = 0 \quad \nearrow$$

~~2a~~ ~~for~~

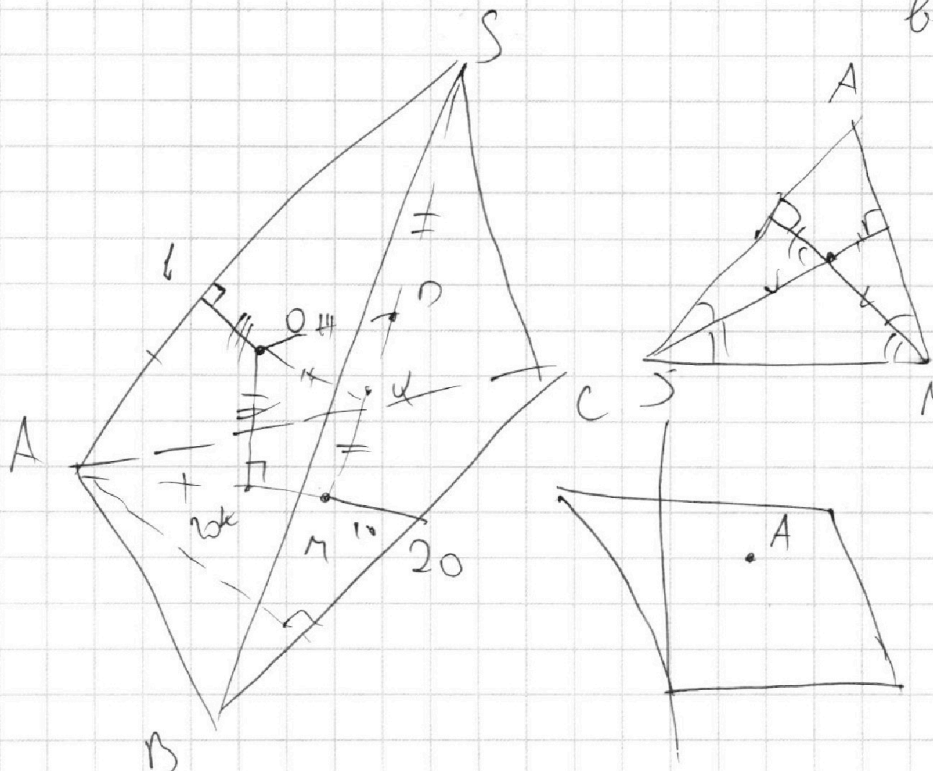
$$a = -b$$

$$\log_{11} x = \log_{11} 1$$

$$\log_{11} x = \log_{11} 1 = 0$$

$$\log_{11} x \cdot y = 0$$

$$x \cdot y = 1$$

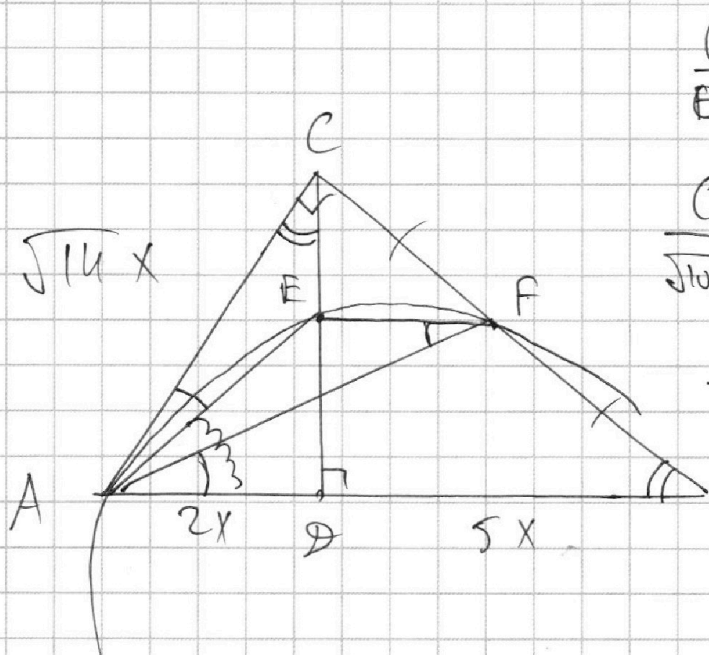


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



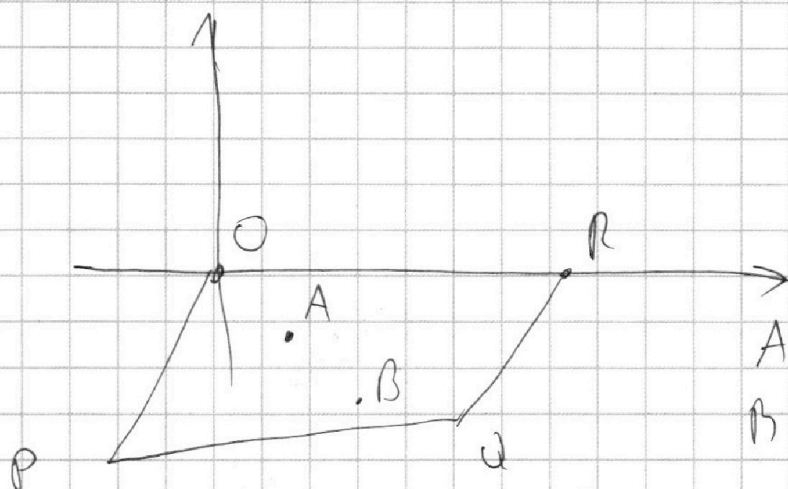
$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$$

$$\frac{CE}{\sqrt{10}x} = \frac{CF}{\sqrt{5}x}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{10}x} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\frac{BF}{CF} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{4}} = 1$$

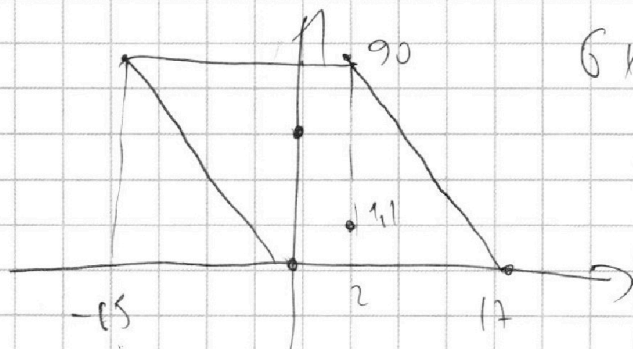


$$A(x_1, y_1)$$

$$B(x_2, y_2)$$

$$6x_2 + 6x_1 + y_1 - y_2 = 98$$

$$6x_2 + y_1 = 98 + y_2 + 6x_1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$2x - 10 \arcsin(\sin x) = 4\pi$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]: 2x - 10x = 4\pi$$

$$-8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]: 2x - 10(\pi - x) = 4\pi$$

$$2x - 10\pi + 10x = 4\pi$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7}{6}\pi$$

$$x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]: \pi - (x - 2\pi) = 3\pi - x$$

$$\sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \frac{7\pi}{2} = \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$2x - 30\pi + 10x = 4\pi$$

$$12x = 34\pi$$

$$8x = 17\pi$$

$$x = \frac{17}{8}\pi$$

$$10 \arccos(\sin \frac{17\pi}{8}) = 9\pi - \frac{17\pi}{2} =$$

$$= \frac{27\pi}{2} - \frac{17\pi}{2} = \frac{10\pi}{2}$$

$$\frac{17\pi}{8} = 2\pi + \frac{9\pi}{8}$$

$$\sin \frac{9\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$2x \leq 9\pi$$

$$9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$x \leq \frac{9\pi}{2} \quad -\pi \leq 2x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]:$$

$$2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi$$

$$2x - 10x + 20\pi = 4\pi$$

$$8x = 16\pi$$

$$x = 2\pi$$

$$x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}]:$$

$$2x - 10(x - 4\pi) = 4\pi$$

$$2x - 10x + 40\pi = 4\pi$$

$$8x = 36\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$

$$x = \frac{9\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k_1$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot k_3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{6+14+16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$\alpha_1 = 4 \quad \alpha_2 = 2 \quad \alpha_3 = 12$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 13$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 21$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 25$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{13+21+25}{2} = 30$$

$$\beta_3 = 16$$

$$\beta_4 = 9$$

$$\beta_2 = 5$$

$$\beta_1 = 13$$

$$\beta_2 = 5$$

$$\beta_3 = 16$$

$$\beta_4 = 9$$

$$\beta_5 = 5$$

$$\beta_6 = 16$$

$$\beta_7 = 9$$

$$\beta_8 = 5$$

$$\beta_9 = 16$$

$$\beta_{10} = 9$$

$$\beta_{11} = 5$$

$$\beta_{12} = 16$$

$$\beta_{13} = 9$$

$$\beta_{14} = 5$$

$$\beta_{15} = 16$$

$$\beta_{16} = 9$$

$$\beta_{17} = 5$$

$$\beta_{18} = 16$$

$$\beta_{19} = 9$$

$$\beta_{20} = 5$$

$$\beta_{21} = 16$$

$$\beta_{22} = 9$$

$$\beta_{23} = 5$$

$$\beta_{24} = 16$$

$$\beta_{25} = 9$$

$$\beta_{26} = 5$$

$$\beta_{27} = 16$$

$$\beta_{28} = 9$$

$$\beta_{29} = 5$$

$$\beta_{30} = 16$$

$$\beta_{31} = 9$$

$$\beta_{32} = 5$$

$$\beta_{33} = 16$$

$$\beta_{34} = 9$$

$$\beta_{35} = 5$$

$$\beta_{36} = 16$$

$$\beta_{37} = 9$$

$$\beta_{38} = 5$$

$$\beta_{39} = 16$$

$$\beta_{40} = 9$$

$$\beta_{41} = 5$$

$$\beta_{42} = 16$$

$$\beta_{43} = 9$$

$$\beta_{44} = 5$$

$$\beta_{45} = 16$$

$$\beta_{46} = 9$$

$$\beta_{47} = 5$$

$$\beta_{48} = 16$$

$$\beta_{49} = 9$$

$$\beta_{50} = 5$$

$$\beta_{51} = 16$$

$$\beta_{52} = 9$$

$$\beta_{53} = 5$$

$$\beta_{54} = 16$$

$$\beta_{55} = 9$$

$$\beta_{56} = 5$$

$$\beta_{57} = 16$$

$$\beta_{58} = 9$$

$$\beta_{59} = 5$$

$$\beta_{60} = 16$$

$$\beta_{61} = 9$$

$$\beta_{62} = 5$$

$$\beta_{63} = 16$$

$$\beta_{64} = 9$$

$$\beta_{65} = 5$$

$$\beta_{66} = 16$$

$$\beta_{67} = 9$$

$$\beta_{68} = 5$$

$$\beta_{69} = 16$$

$$\beta_{70} = 9$$

$$\beta_{71} = 5$$

$$\beta_{72} = 16$$

$$\beta_{73} = 9$$

$$\beta_{74} = 5$$

$$\beta_{75} = 16$$

$$\beta_{76} = 9$$

$$\beta_{77} = 5$$

$$\beta_{78} = 16$$

$$\beta_{79} = 9$$

$$\beta_{80} = 5$$

$$\beta_{81} = 16$$

$$\beta_{82} = 9$$

$$\beta_{83} = 5$$

$$\beta_{84} = 16$$

$$\beta_{85} = 9$$

$$\beta_{86} = 5$$

$$\beta_{87} = 16$$

$$\beta_{88} = 9$$

$$\beta_{89} = 5$$

$$\beta_{90} = 16$$

$$\beta_{91} = 9$$

$$\beta_{92} = 5$$

$$\beta_{93} = 16$$

$$\beta_{94} = 9$$

$$\beta_{95} = 5$$

$$\beta_{96} = 16$$

$$\beta_{97} = 9$$

$$\beta_{98} = 5$$

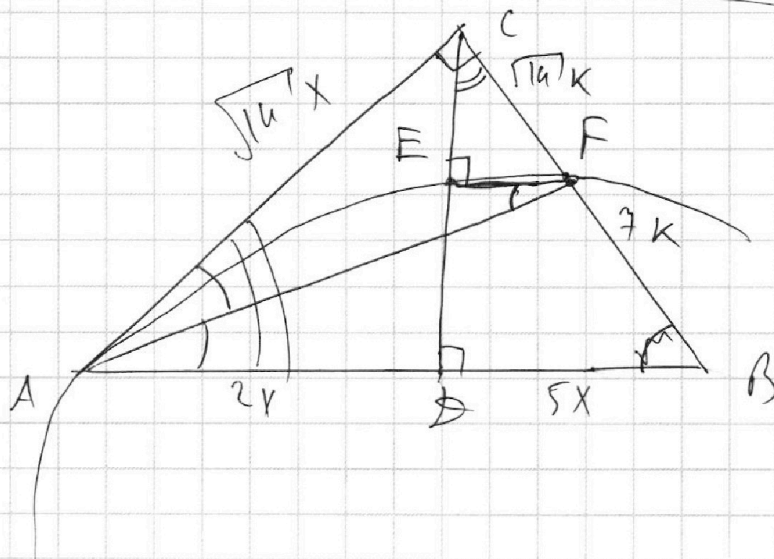
$$\beta_{99} = 16$$

$$\beta_{100} = 9$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

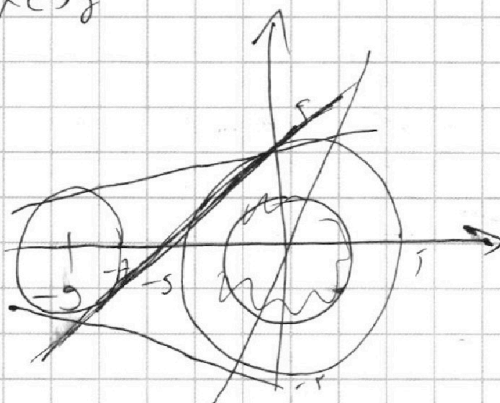
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$(x+9)^2 + y^2 = 4$$

$$x \leftrightarrow y$$



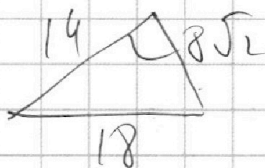
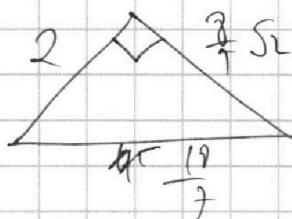
$$5y = 6 - 60y$$

$$y = \frac{6}{65} = 1,20y$$

$$2x + 5x = 94$$

$$7x = 9$$

$$x = \frac{9}{7}$$



$$\sqrt{18^2 + 7^2} = \sqrt{4 \cdot 32} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$$

$$18^2 - 14^2 = (18-14)(18+14) = 4 \cdot 32 = 2 \cdot 64 = 8\sqrt{2}$$

$$\frac{7}{6\sqrt{2}} : \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{121} - 5 \quad \log_x x = 1$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{1}{3} \cdot \log_x 11^{-2} - 5 = \frac{1}{3} \cdot (-2) - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5 \quad | \cdot 3t$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t = 16 = 0$$



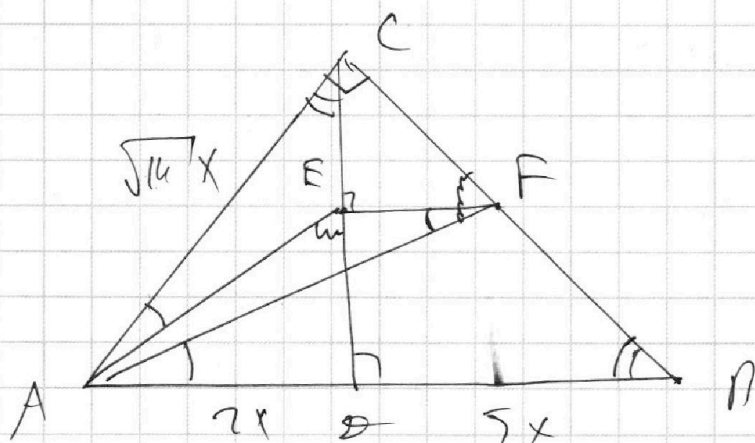
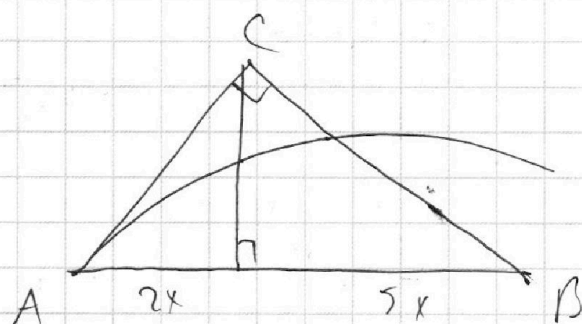
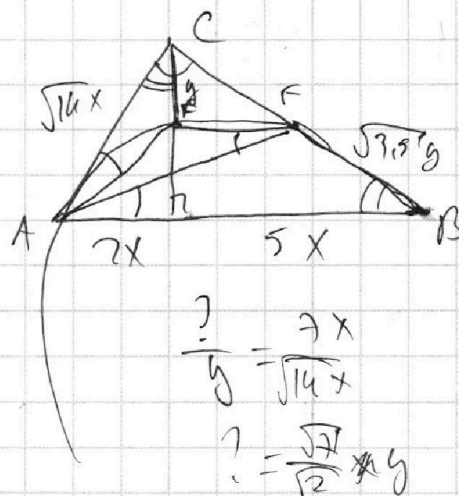
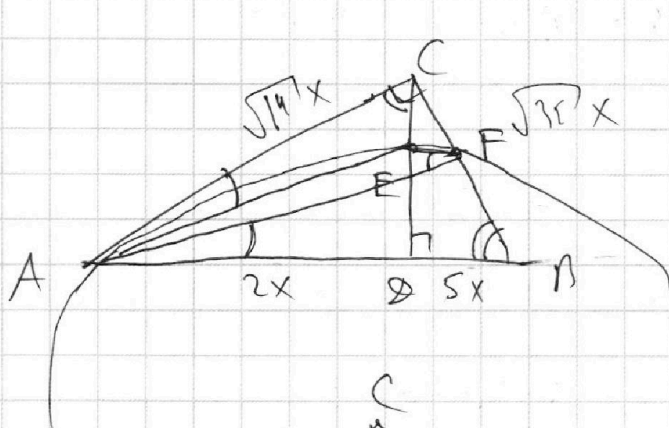
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_4 x - 6 \log_x 11 = \log_x \frac{1}{121} - 5$$

УДЗ: $\boxed{x \neq 1}$
 $\boxed{x > 0}$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{1}{6t} - 5 \quad | \cdot 6t$$

$$6t^5 - 36 = 1 - 30t$$

$$6t^5 + 30t - 37 = 0$$