



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

Пусть $ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, то $ab \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$. Аналогично
 $bc \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$, $ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$. Перемножим $ab, bc,$
 ac : $ab \cdot bc \cdot ac \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, т.е.
 $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{94} \cdot 3^{49} \cdot 5^{75}$. (числа a, b, c по условию натураль-
ные, поэтому при их перемножении никаких проблем со
знаком не возникает, так что $abc > 0$). Тогда:
 $abc \geq 2^{47} \cdot 3^{24} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$, числа a, b и c — натураль-
ные, поэтому abc — тоже натуральное. Значит, оно
не иррациональное $\Rightarrow abc \geq 2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$.

Заметим, что показатели степеней простых мно-
жителей в разложении числа abc не могут быть
меньше показателей степеней простых множителей
в разложении чисел ab, bc, ac . То есть, если $ac \geq$
 $\geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, то степень 5 в разложении abc не менее
43, т.к. abc содержит в себе множитель ac . Таким
образом, получаем, что $abc \geq 2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$. С числами
 a, b и bc подобная подобная логика соблюдена.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 (продолжение).

Осталось показать, что равенство $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ возможно. Возьмём $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{15}$, $b = 2^3 \cdot 3^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{28}$.

Действительно, $ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$; $bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}$;

$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, а $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Дано: Решение:

$\triangle ABC$ - прямо-
угольный,
с CD - высотой,

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

Найти:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

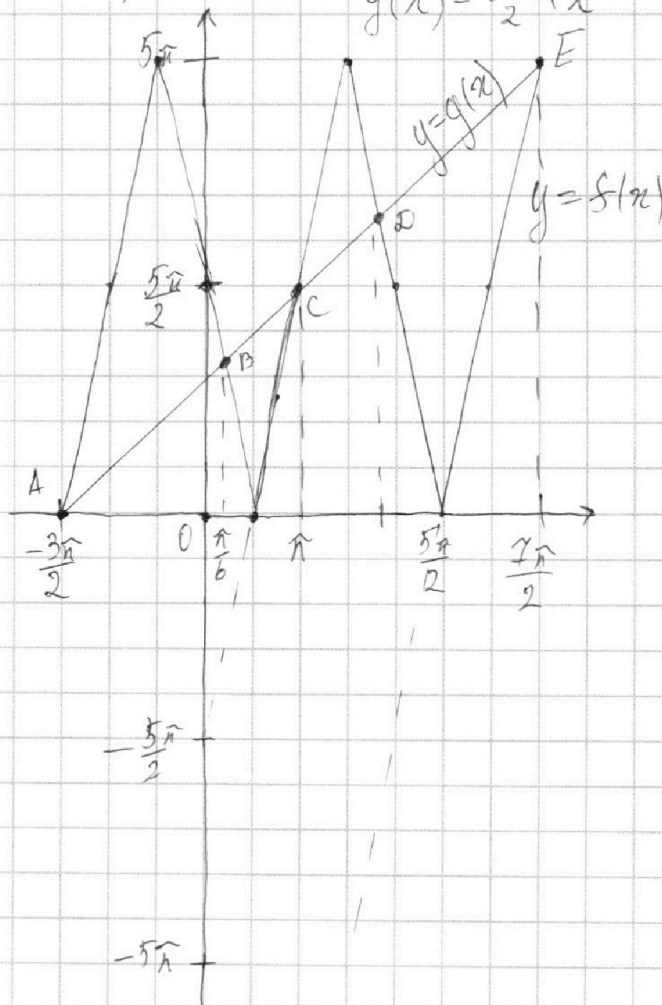
Задача 3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

Отметим, что $0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 5 \arccos(\sin x) \leq 5\pi$,

Поэтому мы рассматриваем такие x , что $0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$, т.е. $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$.

Построим графики $f(x) = 5 \arccos(\sin x)$ на отрезке $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$
 $g(x) = \frac{3\pi}{2} + x$



По графику проверим 5 точек: A, B, C, D, E:



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение)

Точка A принадлежит участку $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, где $f(x) = 5x + \frac{15}{2}\pi$.

Тогда $5x + \frac{15\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$.

Поступим аналогично для остальных точек:

B: $f(x) = -5x + \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

C: $f(x) = 5x - \frac{5\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$

D: $f(x) = -5x + \frac{25\pi}{2} \Rightarrow -5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$

E: $f(x) = 5x - \frac{25\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2}$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



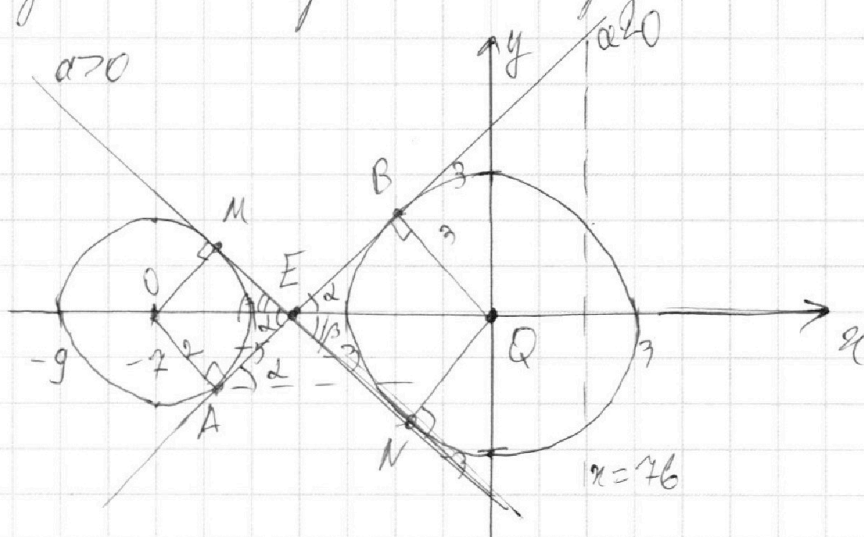
Задача 4.

$$\begin{cases} x + 3xy - 76 = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

Нижнее уравнение системы задает совокупность:

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 - \text{окр-ть с центром } O(-7; 0) \text{ и радиусом } r=2 \\ x^2 + y^2 = 9 - \text{окр-ть с центром } Q(0; 0) \text{ и радиусом } R=3. \end{cases}$$

Изобразим эти окр-ты на коорд. плоскости:



Сначала рассмотрим $a=0$. Тогда прямая (заданная уравнением $x=76$). Эта прямая всегда параллельна оси ординат $\Rightarrow$ не имеет более двух общих точек с окр-тиями при всех b . Значит, $a=0$ не подходит. Тогда при $a \neq 0$ прямая (задана: $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{76}{3a}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

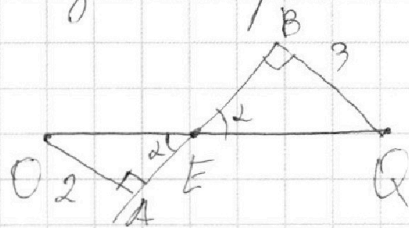


Задача 4 (продолжение).

Такая прямая имеет разный угол наклона и параллельно переносится на любые значения при разном b .

Пусть $a < 0$. Тогда $\frac{1}{-3a} > 0 \Rightarrow$ прямая l образует острый угол с осью абсцисс. Прямая будет 4 раза пересекать окружности при таких a , когда она не касается их обеих, как показано на графике (см. пред. стр.). При таком угле наклона ~~и~~ и угле больше него прямая будет сначала иметь 2 общие точки с окр-тью с центром O , затем с окр-тью с центром Q , но никак не одновременно. В случае же касания прямая l будет иметь по одной общей точке с окр-тями.

Из геометрии найдем $\tan \alpha$:



$$OQ = 7, BQ = R = 3, OA = r = 2.$$

$$\triangle OAE \sim \triangle QBE \text{ по углу } \angle OEA \text{ и } \angle BEQ.$$

$$\frac{QE}{OE} = \frac{BQ}{OA} = \frac{3}{2} \Rightarrow QE = \frac{3}{2} \cdot OE$$

$$QE + OE = \frac{5}{2} OE = OQ = 7 \Rightarrow OE = \frac{14}{5}.$$

$$\tan \alpha = AE = \sqrt{OE^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{196}{25} - \frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{96}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{AE} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot 5}{4\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = -\frac{1}{3a}$$

$$15a = -2\sqrt{6} \Rightarrow a = -\frac{2\sqrt{6}}{15} \Rightarrow \text{при } a < -\frac{2\sqrt{6}}{15} \quad \operatorname{tg} \alpha < \frac{5}{2\sqrt{6}},$$

и система может иметь 4 решения при каком-то a .

Картинка симметрична. При $a > 0$ прямая l соответственно будет убывать, и картинка будет симметрична относительно оси абсцисс той картины, которую мы рассматривали при $a < 0$. Соответственно 4 решения для $a > 0$ может быть при $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_7 7 = \log_{36x}^2 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

Сразу скажем про ограничения для x и y :

$$6x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad 36x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}$$

$$6x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{6} \quad y > 0, y \neq 1, y^2 \neq 1 \Rightarrow y \neq \pm 1$$

Подытожим: $x > 0, x \neq \frac{1}{6}, y > 0, y \neq 1$.

Разберёмся с верхним уравнением системы:

$$\log_7^4(6x) - 2 \cdot \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

Пусть $t = \log_7 6x$.

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4, t \neq 0$$

$$t^5 + 4t - 2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \quad (1)$$

Заметим, что $f(t) = t^5$ — возрастающая монотонно функция, $g(t) = t - \frac{7}{2}$ тоже $\Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} = h(t)$ монотонно возрастает, т.е. ур-е (1) имеет только 1 решение, которому соответствует только 1 значение x ($t = \log_7 6x$ тоже монотонно возрастает).

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Задача 5 (продолжение).

Теперь проверим 0-й шаг ур-ии системы:

$$\log_7^4 y + 6 \cdot \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

Пусть $n = \log_7 y$, $n \neq 0$. Тогда:

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4 \Rightarrow n^5 + 4n + 6 - \frac{5}{2} = 0$$

$$n^5 + 4n + \frac{7}{2} = 0 \quad (2)$$

С уравнением (2) получаем аналогичную ситуацию, как и с ур-ем (1). Есть только одно значение y , удовл. ур-ю (2). Сложим ур-я (1) и (2):

$$n^5 + 4n + t^5 + 4t + \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0$$

$$n^5 + t^5 + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4) = 0$$

$$t+n=0,$$

$$t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0;$$

$$\begin{aligned} & t+n=0 \\ & \cancel{(t^2)^2 - 2 \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2}tn + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot n^2 + n^4 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0} \end{aligned}$$

Для нулевого ур-я совокупности имеем:

$$(t^2)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot t^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot n^2 + n^4 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0$$

$$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 + (\frac{1}{2}tn - n^2)^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5 (продолжение).

$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 \geq 0$, $(\frac{1}{2}tn - n^2)^2 \geq 0$, $\frac{1}{2}t^2n^2 \geq 0$, $4 > 0$, поэтому

$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 + (\frac{1}{2}tn - n^2)^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 > 0$, т.е. нижнее сук-

е системы не имеет решений. Вот и остаётся:

$$t+n=0 \Leftrightarrow \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 1 \Rightarrow \log_7 6xy = \log_7 1$$

$$6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}. \text{ Можно взять } x=1, y=\frac{1}{6}. \text{ Тогда}$$

как раз будет соблюдено ОДЗ и будет полу-
чаться такое значение xy .

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

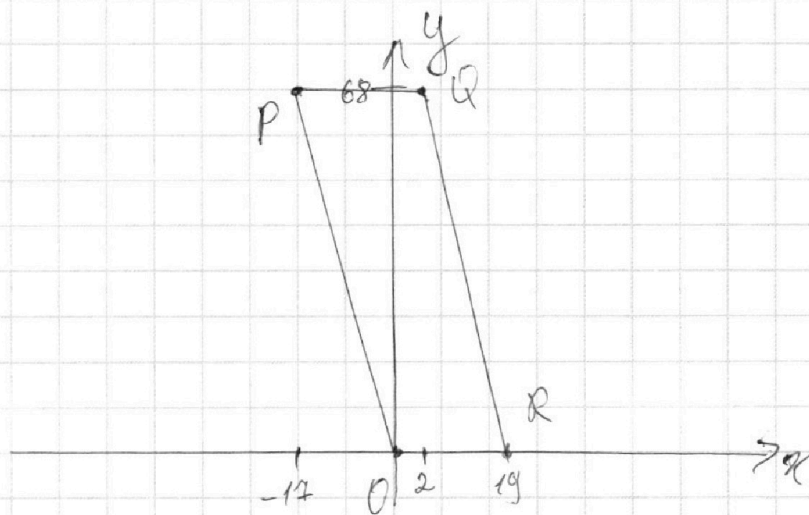
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.

Изобразим на координатной плоскости параллелограмм $OPQR$:



Заметим, что если у нас есть прямая $y = -4x + a$,
и если ей принадлежат точки $(x_1, -4x_1 + a)$, а также
есть прямая $y = -4x + 40 + a$, и если ей принадлежат
точки $(x_2, -4x_2 + 40 + a)$, то как раз выполняется
условие $4x_2 - 4x_1 - 4x_2 + 40 + a + 4x_1 - a = 40$. То есть,
нам нужно посчитать количество точек в парал-
лелограмме $OPQR$ таких, что ^{первая} ~~одна~~ из них при-
надлежит прямой $y = -4x + a$, а вторая — прямой
 $y = -4x + a + 40$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение).
Сразу скажем, что сторона PQ задана уравнением ~~$y = -4x$~~ $y = -4x$ (коор-ды точек P и O действительно удовл. этой прямой). Найдем прямую, задающую сторону QR :

$$\begin{cases} 68 = 2a + b & \text{— коор-ды т. } Q \\ 0 = 19a + b & \text{— коор-ды т. } R \end{cases} \Rightarrow a = -17 - 4, b = 76.$$

$QR: y = -4x + 76$
То есть две прямые $y = -4x + a$ и $y = -4x + a + 40$
можно сказать, что: $a \geq 0$, $a + 40 \leq 76$, т.к. пря-
мые эти лежат в парал-апе $OPQR$ или лежат
на его границах. Отсюда $0 \leq a \leq 36$.

Через любую прямую такую. На любой такой пря-
мой будет лежать 18 целых точек, т.к. $0 \leq y \leq 68$,
т.е. мы ограничены сверху и снизу ищем по
целым точкам, т.е. $0 \leq -4x + a \leq 68$. Соответствен-
но, у нас 37 значений a , для каждого из кото-
рых есть 18 точек на одной прямой, которые
соответствуют по 18 точек

Для $a = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$ есть по 18 целых точек, для
 $a = 4k+1, 4k+2, 4k+3$ по 17.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение)

$$10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17$$

Ответ: $10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2\log_6 x^7 = \frac{3}{2} \log_6 x^7 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y^7 = \frac{5}{2} \log_7 y^7 - 4$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$$t = \log_7 6x \quad t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$t^5 - 2 = \frac{3}{2} - 4t \quad t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$x \neq$$

$$36x^7 \neq 170$$

$$(6x-1)(6x+1) \neq 0$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\log_7 n = \log_7 y$$

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \quad n^5 + 6 - \frac{5}{2} + 4n = 0$$

$$n^5 + 4n + \frac{7}{2} = 0$$

$$t+n = \log_7 6xy$$

$$(t+n)(t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$t+n=0$$

$$(t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4) + 4 = 0$$

$$6xy = t$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$(t^4 + n^4) + tn(t^2 + n^2) + t^2n^2 = 0$$

$$(t+n)$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$$

$$(t+n)(t^3 - t^2n - 2tn + t^4 + n^4 + 4 + t^2n^2 - tn(t^2 + n^2)) = 0$$

$$(t^2 + n^2)^2 - t^2n^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 = 0 \quad (t^2 + n^2)^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 - t^2n^2 = 0$$

$$t \quad 2 = t^2n^2 - t^2$$

$$(t^2 + n^2)^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 - t^2n^2 = 0$$

$$t^4 - t^3n + \frac{1}{2}t^2n^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot tn + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot n^2 + n^4 + 4 = 0$$

$$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 +$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

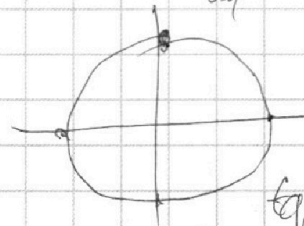
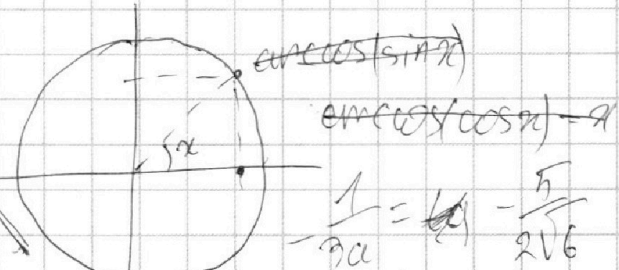
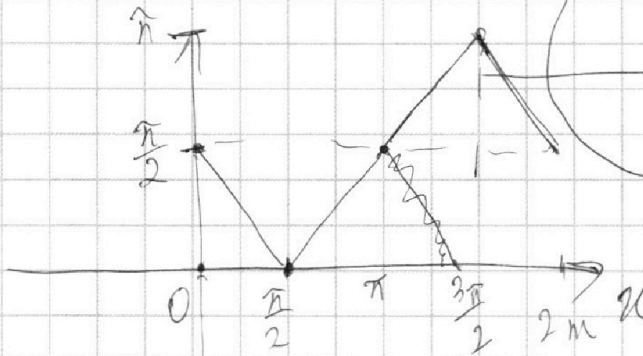
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

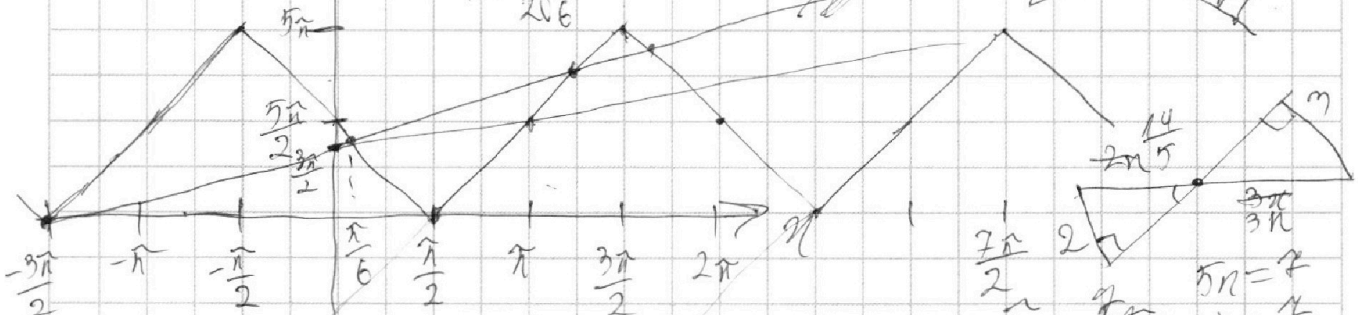
$$5\alpha \cos(\sin \alpha) = \frac{3\pi}{2} + \pi$$



$$1) \quad 4 \cdot 24 = 16 \cdot 6$$

$$-\frac{1}{3\alpha} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad \alpha < -\frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6} \cdot 3\alpha}$$



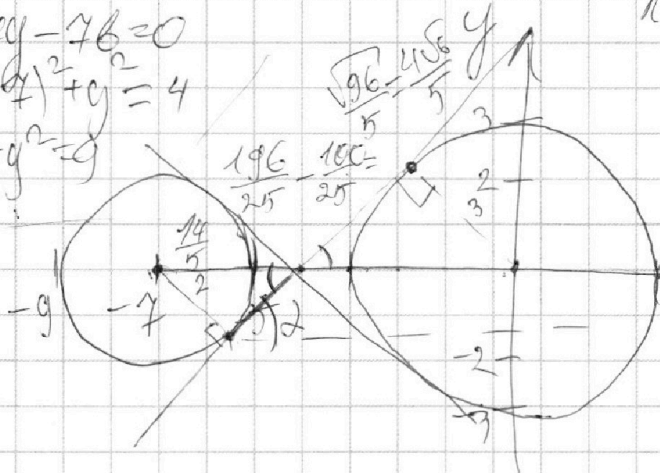
$$x = -\frac{3\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} - 5\alpha = \frac{3\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \pi = 6\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$5\pi = \frac{5\pi}{2} \pm \frac{3\pi}{2} + \alpha \Rightarrow 4\alpha = 4\pi \Rightarrow \alpha = \pi$$

$$\alpha + \frac{3\pi}{2} > 5\pi \quad \alpha > \frac{7\pi}{2} - \text{не смотрим}$$

$$\tan \alpha = \frac{10\pi}{14 - \pi}$$

$$\begin{cases} x + 2xy - 76 = 0 \\ (x+4)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$



$$\alpha \neq 0: 2xy + 2y = -x + 76$$

$$y = -\frac{1}{3\alpha}x + \frac{26}{3\alpha}$$

$$\alpha < 0: \tan \alpha = -\frac{1}{3\alpha} = \frac{\pi}{1}$$

$$3\alpha - 15\alpha = -7 \quad \alpha = -\frac{7}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

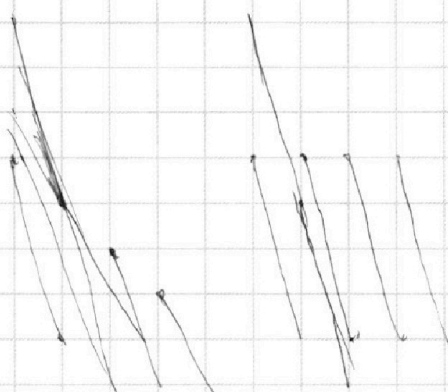
☐

7

☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



-4

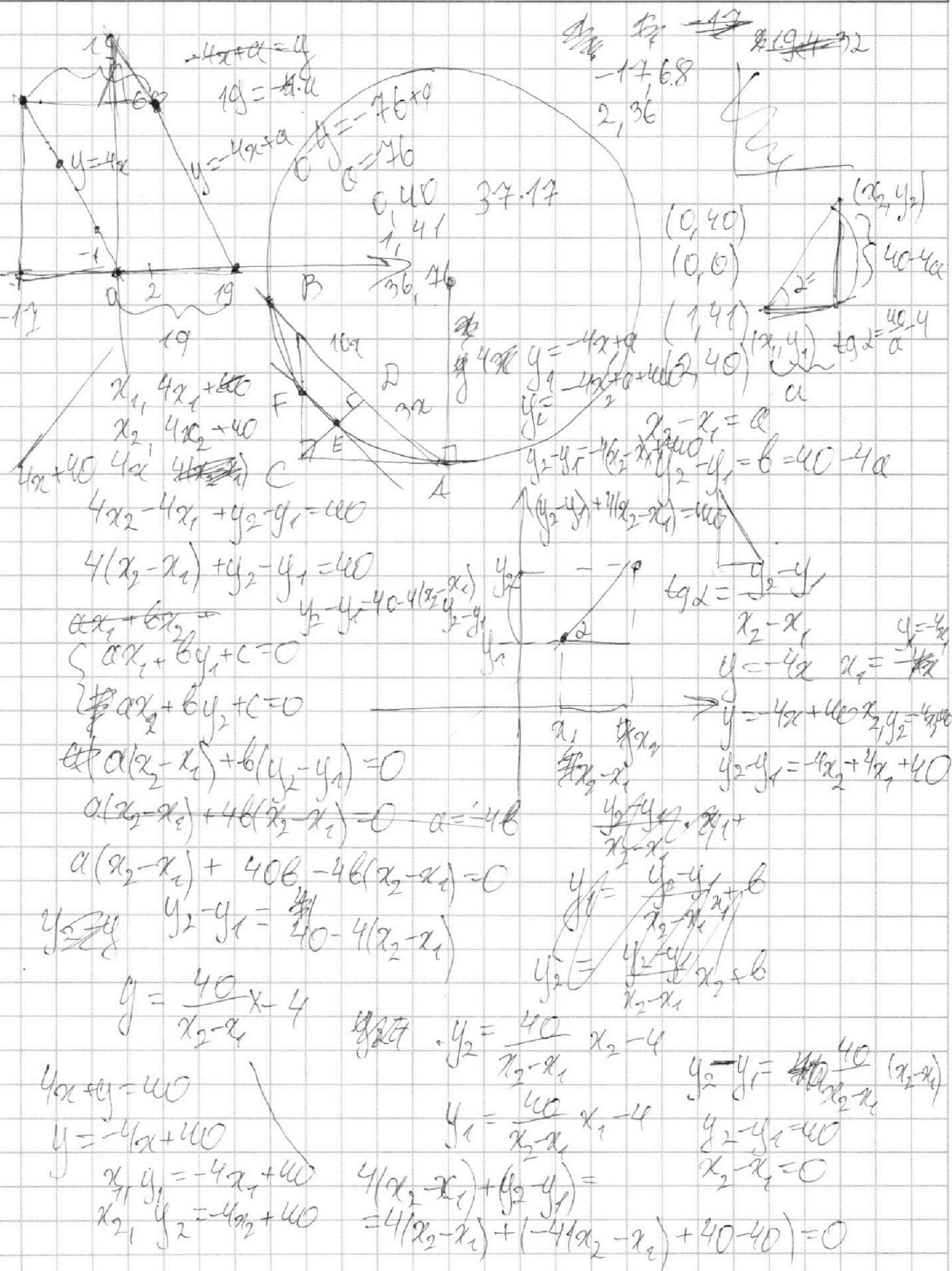
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

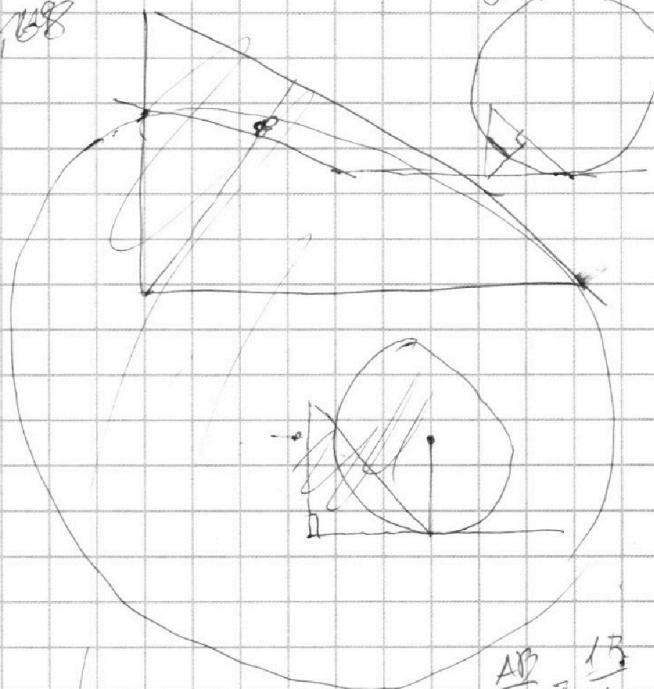
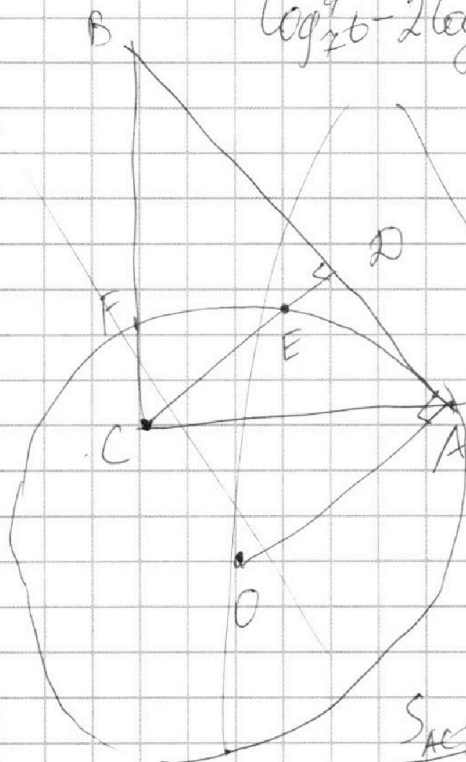
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_4^4 6 - 2 \log_6 7 = \log_3 6 \quad 7^2 = 4 \Rightarrow \log_4^4 6 - \frac{2}{\log_6 4} = \frac{3}{2} \log_6 10$$

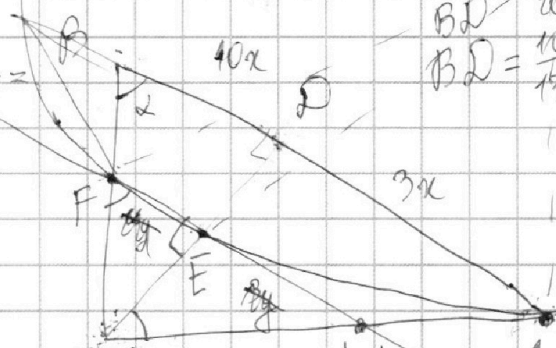
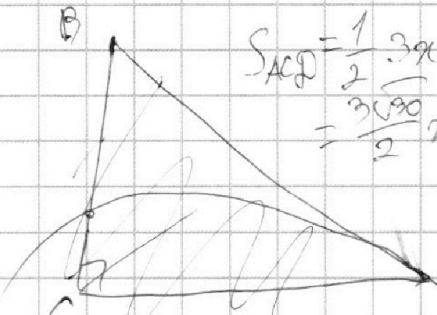
44/68



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{90}x = \frac{3\sqrt{90}}{2} x^2$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \Rightarrow BD = \frac{10}{13} AB$$



$$\begin{aligned} \frac{CE}{CD} &= \frac{10y}{10x} = \frac{y}{x} & CD^2 &= BD \cdot AD = 30x^2 & CE &= 30y^2 \\ \frac{AC^2}{CD} &= \frac{CE \cdot CD}{CD} & \frac{AC}{CD} &= \frac{AB}{BC} = \frac{CL}{FL} & \frac{y^2}{x^2} &= \frac{y}{x} \Rightarrow xy^2 = yx^2 \Rightarrow y = x? \\ \frac{CD}{BD} &= \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD^2 &= x\sqrt{90} & AC^2 &= CD^2 + AD^2 = 39x^2 & AC &= x\sqrt{39} \\ \frac{CE}{CD} &= \frac{FE}{BD} = \frac{CE}{BC} & \sin \angle &= \frac{\sqrt{39}}{13} & AL^2 &= LE \cdot FL \\ \frac{CE^2}{FL} &= \frac{FE \cdot EL}{FL} & \frac{FL}{BA} &= \frac{CL}{AC} & \frac{AL}{CL} &= \frac{DE}{CE} = \frac{BF}{CF} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}, \quad bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}, \quad ac: 2^{11} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13}$$

$$\begin{array}{l} ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13} \end{array} \quad \begin{array}{l} abc = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ \Rightarrow ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13} \\ ab \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \end{array}$$

Q7 2¹³, 3¹⁵, 5¹⁸

abc 2 227 3 32 6 72 19 35 5 18

02 2⁷ 3⁴ 5¹⁴

1	c	c	c
---	---	---	---

$a^2 b^2 c^2 z^2 \cdot 3 \cdot 5$

$$abc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow b = \frac{2^{43}}{2^{29}} \quad abc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

~~$a \geq 2, b \geq 3, c \geq 5 \Rightarrow abc \geq 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$~~

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} \\ \frac{c}{a} &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} ab &= 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc &= 2^{14} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \end{aligned}$$

$$C = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \Rightarrow a = 6 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$C = a \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4$$

$$\frac{C}{B} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} \Rightarrow e = 6 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{29}$$

~~$$ac = ab \cdot 2^7 \cdot 3 \cdot 5^{29} = 2^1$$~~

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 17$$

$$2_1 + 2_2 \neq 7$$

$$L_1 + L_2 \neq 13$$

$$2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_3 - d_2 = 7 \Rightarrow d_3 = 10 \quad d_2 = 3 \quad d_1 = 4$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 13$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 22$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$B_2 + B_m \approx 15$$

$$\beta_1 + \beta_2 \neq 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \beta_3 - \beta_2 = 6 \\ \beta_3 + \beta_2 = 15 \end{array} \Rightarrow \beta_3 = 10,5 \quad \beta_1 = 6,5 \quad \beta_2 = 8,5 \quad 4,5$$

$$X_1 + Y_2 + X_3 = 38$$

$$X_1 + X_2 = 14$$

$$X_0 + X_3 = 18$$

$$x_1 + x_3 = 43$$

$$x_3 - x_2 = 20$$

$$x_2 + x_3 = 18$$

$$\Rightarrow x_3 = 23,5$$

$$2x_3 = 4 \quad x_1 = 22.5$$

$$\begin{aligned} a &= 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{15} \\ y_2 &= b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c &= 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{28} \\ \text{Ans: } &2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{43} \end{aligned}$$



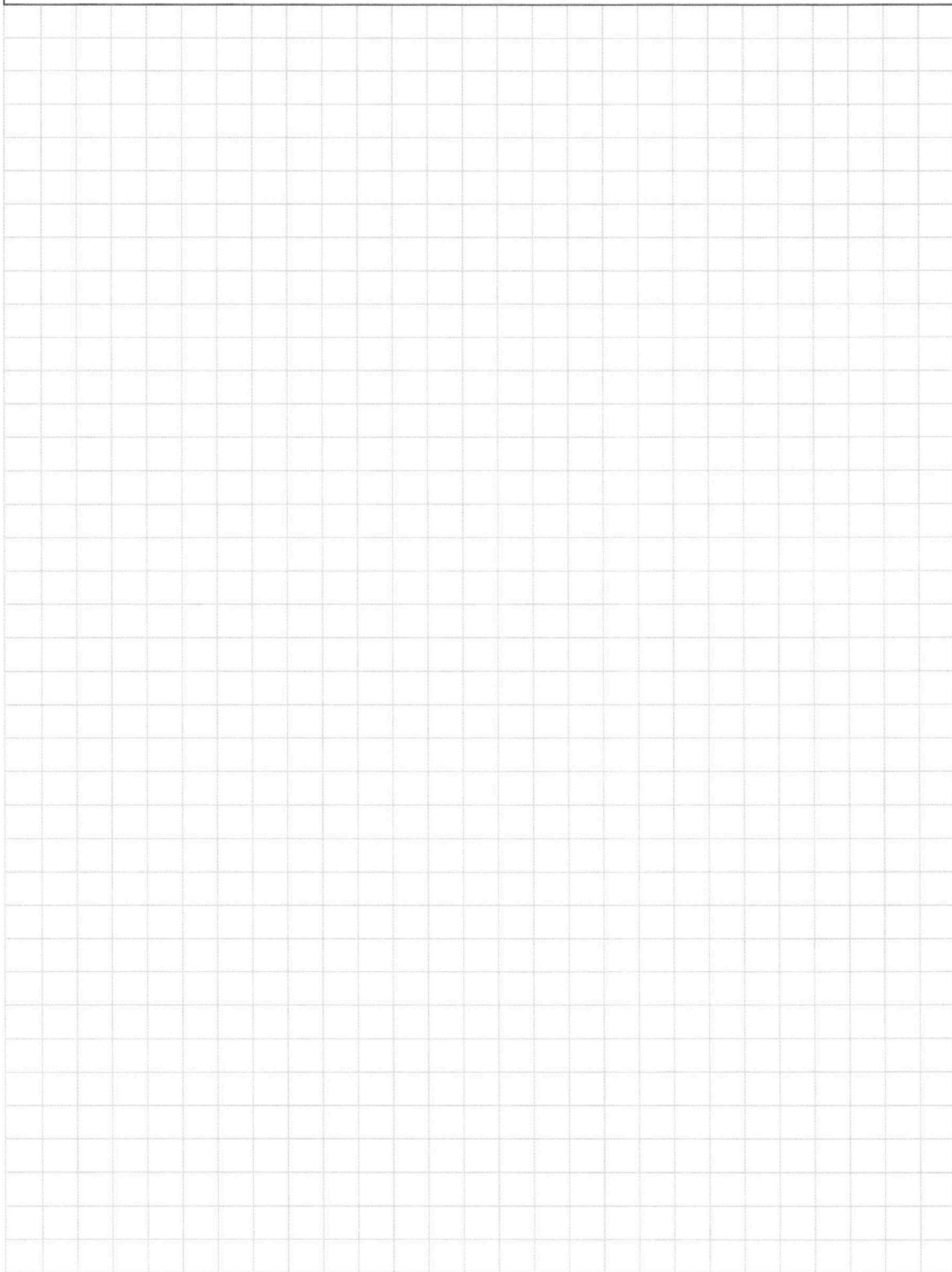
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!