



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если значение abc минимально, то числа a, b и c не содержат никаких простых делителей, кроме 2, 3 и 5. В противном случае можно убрать из их разложения остальные простые делители. Тогда abc уменьшится, а кратность выражения из условия не изменится.

Пусть $a = 2^{x_a} 3^{y_a} 5^{z_a}$, $b = 2^{x_b} 3^{y_b} 5^{z_b}$, $c = 2^{x_c} 3^{y_c} 5^{z_c}$.

Все числа $x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b, x_c, y_c, z_c$ целые неотрицательные.

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac : 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{53}$$

степени 54. Поэтому $abc : 2^{21} 3^{21} 5^{27}$

В разложение числа $a^2 b^2 c^2$ все простые делители входят в четные степени, поэтому 3 входит хотя бы в степени 42, а 5 хотя бы в степени 54.

$$\begin{cases} x_a + x_b + x_c \geq 21 \\ x_a + x_b \geq 9 \\ x_b + x_c \geq 14 \\ x_a + x_c \geq 19 \end{cases}$$

$\min(x_a + x_b + x_c) = 21$ достигается при $x_a = 7, x_b = 2, x_c = 12$

$$\begin{cases} y_a + y_b + y_c \geq 21 \\ y_a + y_b \geq 10 \\ y_b + y_c \geq 13 \\ y_a + y_c \geq 18 \end{cases}$$

$\min(y_a + y_b + y_c) = 21$ достигается, например при $y_a = 7, y_b = 3, y_c = 11$

Заметим, что $abc : ac : 5^{30}$, поэтому



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} z_a + z_b + z_c \geq 30 \\ z_a + z_b \geq 10 \\ z_b + z_c \geq 13 \\ z_a + z_c \geq 30 \end{cases} \quad \min(z_a + z_b + z_c) = 30 \text{ достигается,}$$

например при $z_a = 13, z_c = 17, z_b = 0$.

Значит $a, b, c \geq 2^{21} 3^{21} 5^{30}$ и это значение

достигается, например, при

$$a = 2^7 3^7 5^{13}$$

$$b = 2^2 3^3$$

$$c = 2^{12} 3^{11} 5^{17}$$

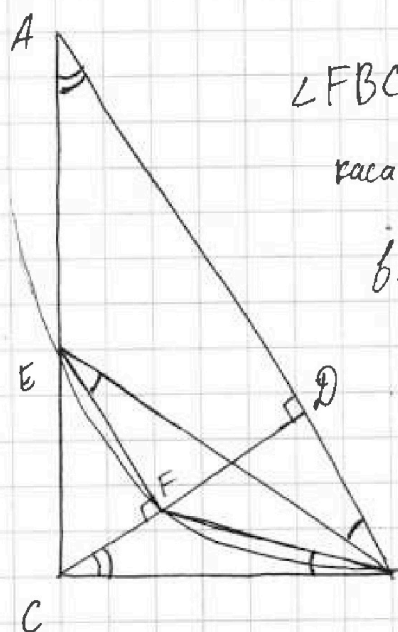
Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle FBC = \frac{1}{2} \angle B$ как угол между хордой и касательной.

$\angle FEB = \frac{1}{2} \angle B$ как

вписанный угол.

$\angle ABE = \angle BEF$ как накрест лежащие при $AB \parallel EF$ и секущей BE .

$\angle BCD = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAC$

Поэтому $\triangle BAE \sim \triangle BCF$ по двум углам.

$AD:DB = 3:1$. Пусть $AD = 3x$, $DB = x$.

Тогда $BC = \sqrt{BD \cdot BA} = \sqrt{x \cdot 4x} = 2x$

$AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{3x \cdot 4x} = 2x\sqrt{3}$

Пусть $CF = y$. $\triangle CFE \sim \triangle CDA \sim \triangle BCA$

по двум углам. Поэтому

$$\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow CE = 2y$$

Из подобия $\triangle BAE \sim \triangle BCF$ получаем

$$\frac{AE}{CF} = \frac{BA}{BC}, \quad \frac{2x\sqrt{3} - 2y}{y} = \frac{4x}{2x}$$

$$2x\sqrt{3} - 2y = 2y$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{3} \cdot 2x = 2x^2\sqrt{3}$$

$$S(CEF) = \frac{1}{2} CF \cdot FE = \frac{1}{2} y \cdot y\sqrt{3} = \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \\ = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8}$$

Поэтому $\frac{S(ABC)}{S(CEF)} = \frac{2x^2\sqrt{3}}{\left(\frac{3x^2\sqrt{3}}{8}\right)} = \frac{16}{3}$

Ответ: $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

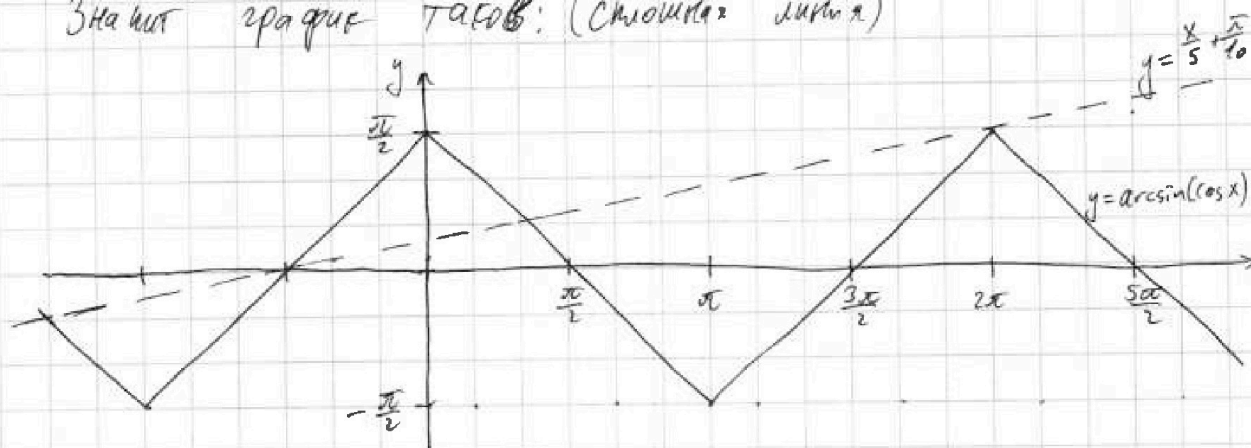
Построим график функции $f(x) = \arcsin(\cos x)$

Если $0 \leq x \leq \pi$, то $\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$
 $= \frac{\pi}{2} - x$

Также понятно, что $f(x + 2\pi) = f(x)$,

$$f(x + \pi) = -f(x) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

Значит график таков: (сплошная линия)



Построим также график $g(x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$ (пунктир)

Заметим, что при $x = 2\pi$ $g(x) = \frac{\pi}{2} = f(x)$,

при $x > 2\pi$, $g(x) > \frac{\pi}{2} > f(x)$, поэтому при $x > 2\pi$

корней нет.

При $x = -3\pi$ $g(x) = -\frac{\pi}{2} = f(x)$, при

$x < -3\pi$, $g(x) < -\frac{\pi}{2} \leq f(x)$. Поэтому при $x < -3\pi$

корней нет.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из графика понятно, что есть еще три корня
помимо $x = -3\pi$ и $x = 2\pi$ и это точки пересечения

прямой $y = \frac{\pi}{10} + \frac{x}{5}$ с прямыми

$$y = \frac{\pi}{2} - x, \quad y = \frac{\pi}{2} + x, \quad y = -\frac{3\pi}{2} - x.$$

Найдём их

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - x, \quad \frac{6x}{5} = \frac{2\pi}{5}, \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + x, \quad -\frac{4x}{5} = \frac{2\pi}{5}, \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = -\frac{3\pi}{2} - x, \quad \frac{6x}{5} = -\frac{8\pi}{5}, \quad x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

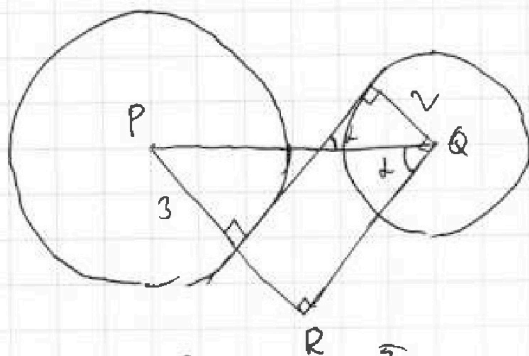
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Система имеет ровно 4 решения тогда и только тогда, когда прямая $y = -\frac{9}{2}x + \frac{36}{2}$ является секущей к обеим окружностям. Это не может произойти, если её угловой коэффициент не меньше, чем у l , или не больше, чем у k . В то же время если он меньше, чем у l и больше, чем у k , то всегда можно осуществить необходимые параллельные переносы, чтобы она стала секущей. То есть найдётся число b . Найдём угловые коэффициенты



$$k_l = \tan \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{PR}{PQ} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{6^2 - 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

Тогда $k_l = \frac{5}{\sqrt{11}}$, $k_k = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{9}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

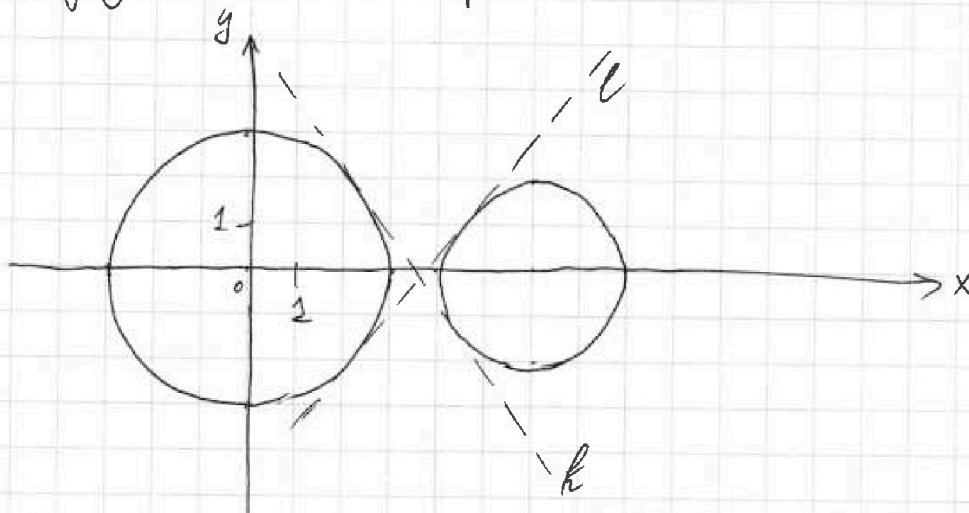
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 12x + 36 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Его график — две окружности. Первая с центром $(0;0)$ и радиусом 3. Вторая с центром $(6;0)$ и радиусом 2. Построим сплошной линией



Рассмотрим второе уравнение $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$

Параметр a задаёт коэффициент наклона прямой,
а параметр b — её положение (т.е. при изменении b
осуществляется параллельный перенос)

Проведём внутренние касательные l и k к
окружностям (пунктир)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_3 x = a, \quad a \neq 0$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8$$

$$a^4 + 8 = -\frac{7}{2a}$$

$$a^5 + 8a = -\frac{7}{2}$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2 \log_3(5y)} - 8$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\log_3(5y) = b, \quad b \neq 0$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$$

$$b^5 + 8b = \frac{7}{2}$$

$$\text{Заметим, что } a+b = \log_3 x + \log_3(5y) = \log_3(5xy)$$

$$xy = \frac{3^{a+b}}{5}$$

Значит, чтобы найти все возможные xy необходимо
найти все возможные $a+b$, при которых

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a^5 + 8a = -\frac{7}{2} \\ b^5 + 8b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Заметим, что функция $f(t) = t^5 + 8t$
возрастающая, а значит все свои значения она
принимает не более одного раза.

В то же время $f(-t) = -t^5 - 8t = -f(t)$

Поэтому если $a = t_0$ — корень уравнения

$a^5 + 8a = -\frac{7}{2}$, то $b = -t_0$ — корень уравнения

$b^5 + 8b = \frac{7}{2}$, причем эти корни единственные.

Значит единственное возможное значение ab это 0.

Надо отметить, что корни указанных уравнений существуют,

поскольку $E(t) = \mathbb{R}$ ввиду того, что f непрерывна

и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Значит $xy = \frac{3^0}{5} = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Разместим точку A в центре $(0;0)$ и рассмотрим,
какие точки $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами удовлетворяют

$$3x_2 + y_2 = 33 \quad \text{Поскольку, что это точки вида}$$

$$(n; 33-3n). \quad \text{Тогда если } A(x_1; y_1), \text{ то}$$

$$B \text{ имеет вид } B(x_1+n; 33-3n+y_1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если сдвигать A параллельно
прямой $y = -3x$, то семейства точек B , подходящих
ей, не изменятся:

$$A(x_1+d; y_1-3d) \quad B(x_1+n+d; 33-3(n+d)+y_1)$$

имеет тот же вид.

Параллелограмм $OPQR$ ограничен прямыми

$$y=0, \quad y=42, \quad y=-3x, \quad y=60-3x.$$

Внутри него мы можем выделить 21 множество
целочисленных точек: пусть

$$M_i = \{(x; y) \mid y = -3(x-i), \quad x, y \in \mathbb{Z}, \quad \text{где } i = 0, 1, \dots, 20.\}$$

~~(x; y) внутри OPR~~
(x; y) внутри OPR

Понятно, что в каждом множестве содержится ровно
15 точек.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

При этом если точка A находится в
множестве M_i , то мин-во точек B внутри
параллелограмма и отвечающих условию
есть множество M_{i+1} .

Если $i \geq 9$, то для точки A нет пары.

Тогда всего пар точек $10 \cdot 15 \cdot 15 = \overset{2250}{\cancel{2475}}$

2250
Ответ: $\cancel{2475}$

Примечание. Способов выбрать $M_i - 10$.

Каждому способу выбрать M_i соответствует 15
способов выбрать в ней точку A , и
каждому из них соответствует 15 способов
выбрать точку B из множества M_{i+1} .



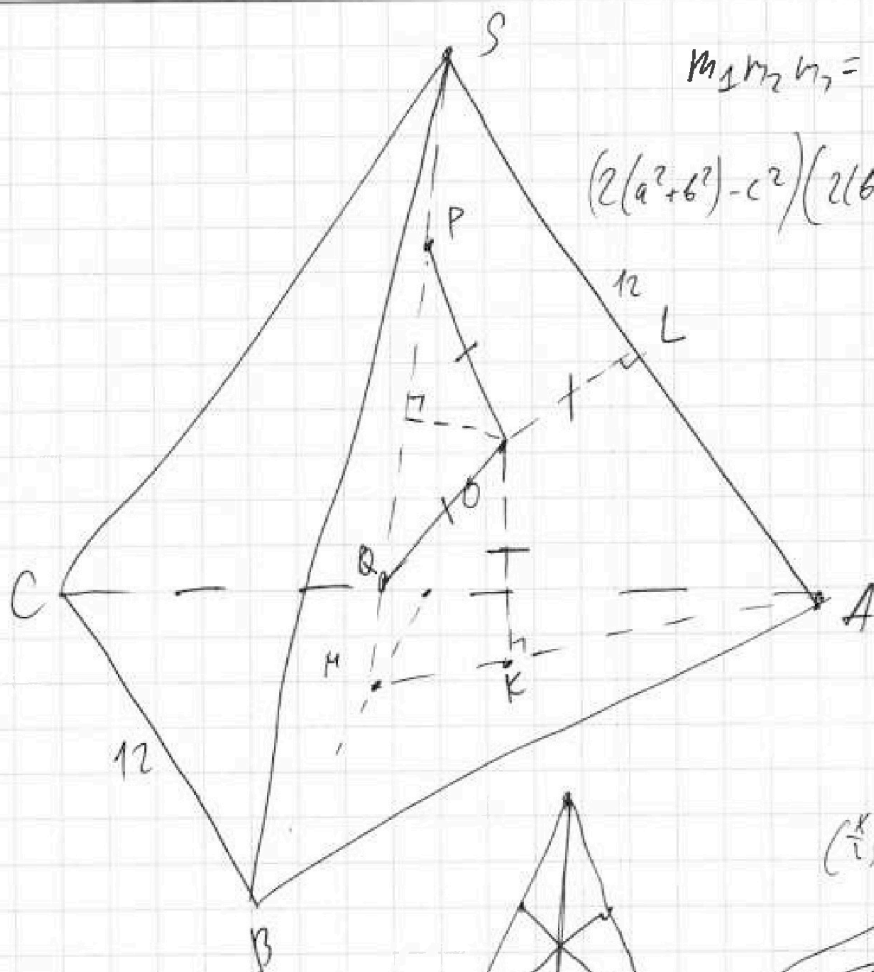
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

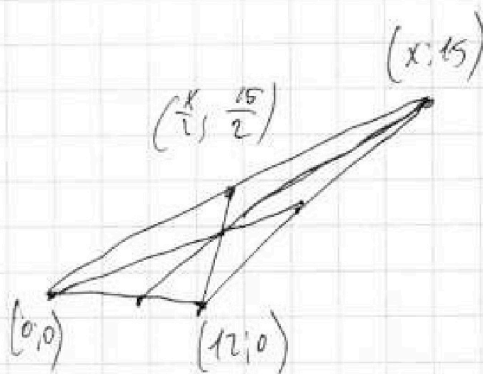
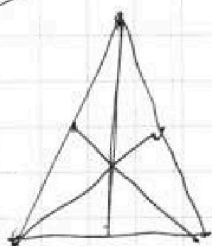
МФТИ

Если отмечено более одной задачи, или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$m_1 m_2 m_3 =$$

$$(2(a^2+b^2)-c^2)(2(b^2+c^2)-a^2)(2(a^2+c^2)-b^2)$$





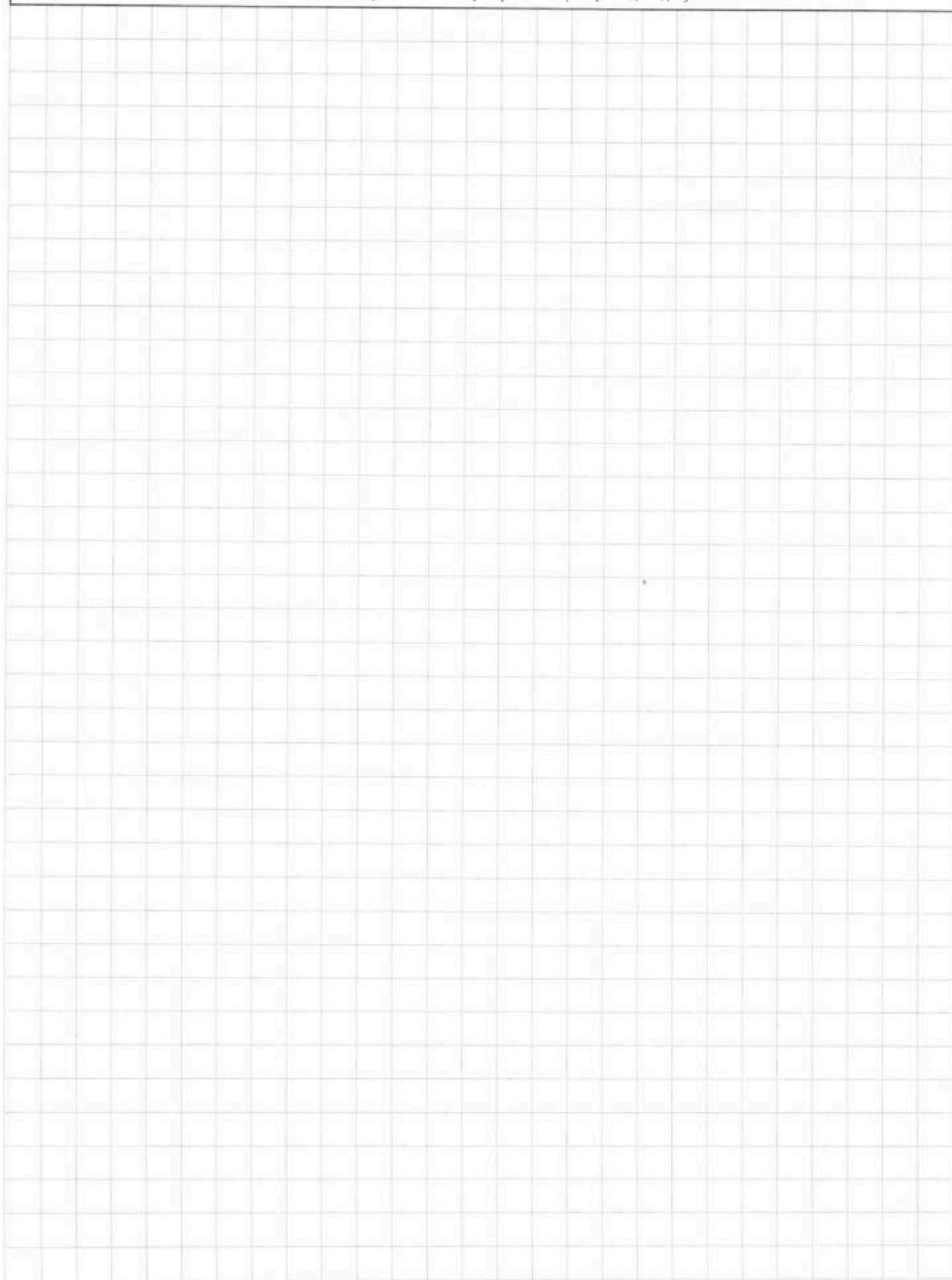
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



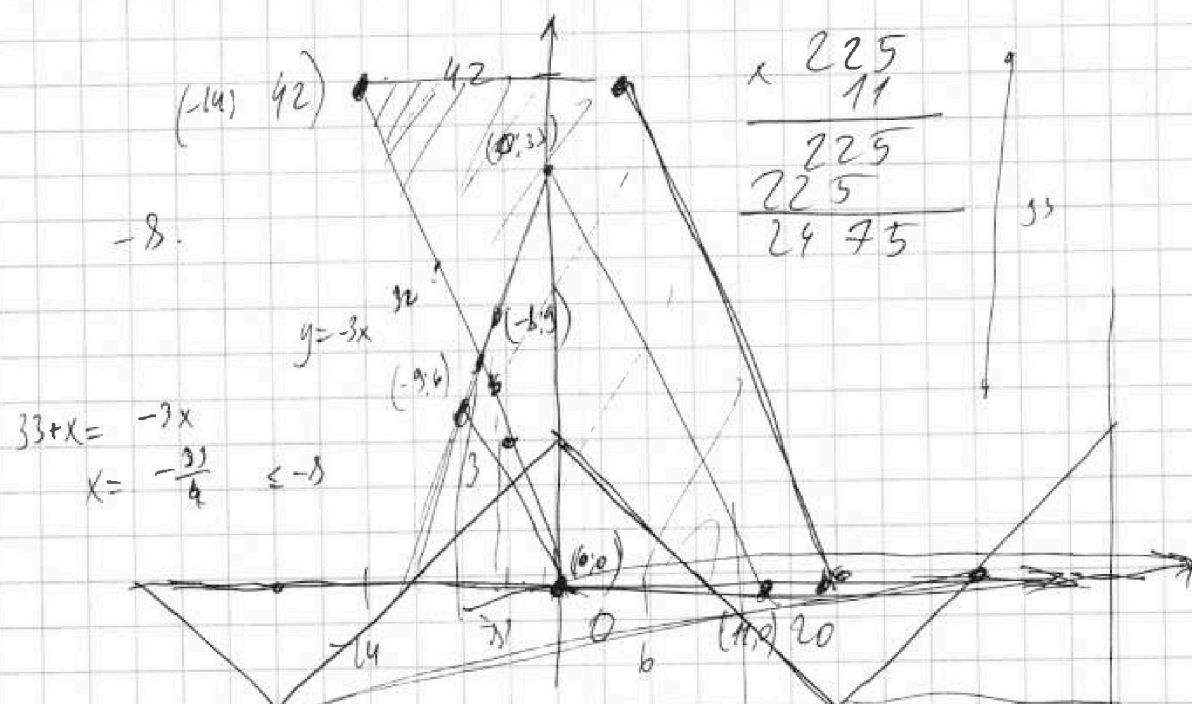
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

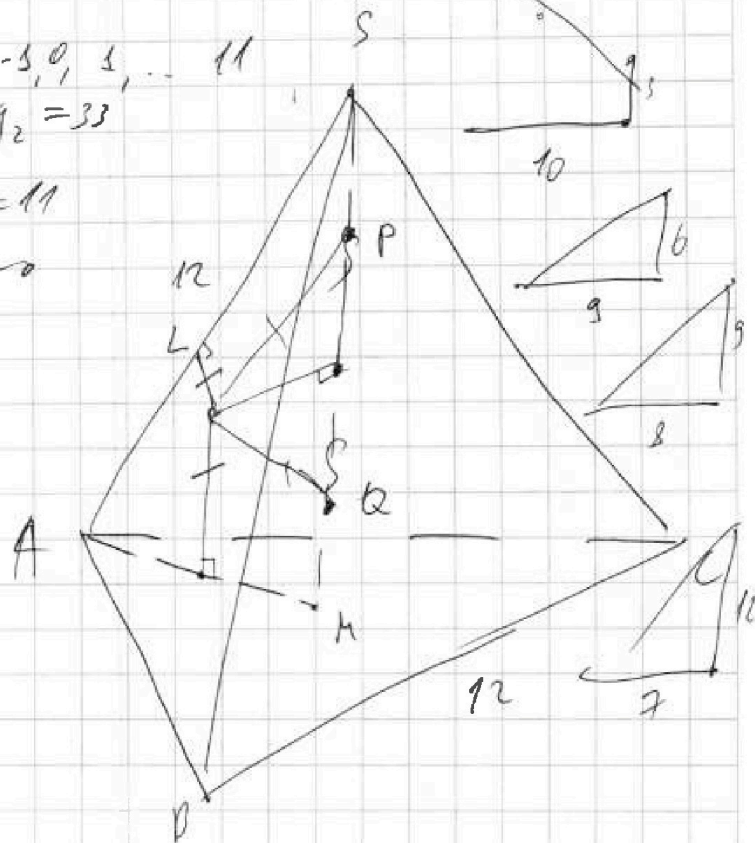
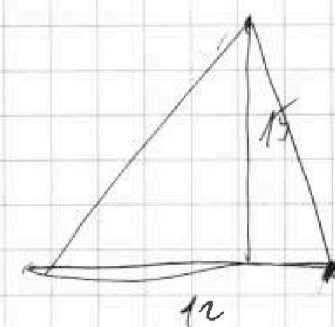
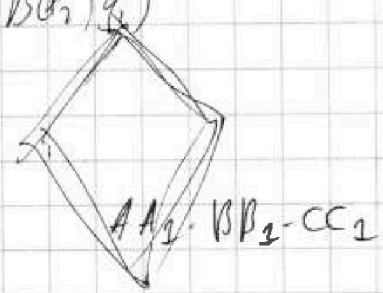
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$A(0, 0)$
 $B(x_2, y_2)$
 $-8, -7, -6, \dots, -5, 0, 1, \dots, 11$
 $3x_2 + y_2 = 33$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8.$$

$$243 = 3 \cdot 81 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8.$$

$$\log_3 x = a$$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8.$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y} (3^{11}) - 8.$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} = \frac{11}{2 \log (5y)} - 8.$$

$$\log_3 (5y) = b$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8.$$

$$b^4 - \frac{7}{2b} + 8 = 0$$

$$\begin{cases} b^5 + 8b - \frac{7}{2} = 0 \\ a^5 + 8a + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$$

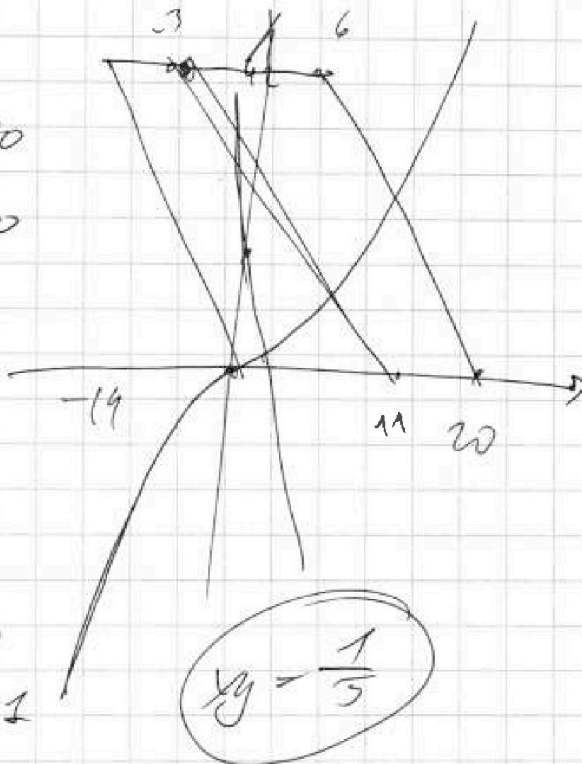
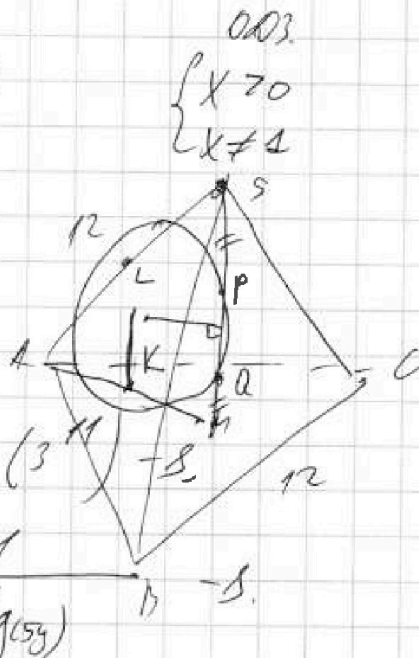
$$2x^5 + 10x - 7 = 0$$

Един

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

$$ab : 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$ac : 2^{13} 3^{13} 5^{20}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$\begin{cases} x_a + x_b = 9 \\ x_a + x_c = 19 \\ x_b + x_c = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_a + y_b = 10 \\ y_a + y_c = 18 \\ y_b + y_c = 14 \end{cases}$$

$$x_a + x_b + x_c = 21$$

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} 3^{41} 5^{43}$$

$$2^{42} 3^{42} 5^{44}$$

$$abc = 2^{21} 3^{21} 5^{22}$$

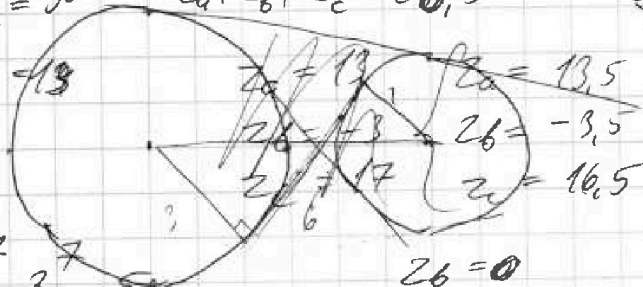
$$\begin{cases} x_a = 7 \\ x_b = 2 \\ x_c = 12 \end{cases}$$

$$y_a + y_b + y_c = 22$$

$$\begin{cases} y_a = 7 \\ y_b = 3 \\ y_c = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_a + z_b = 10 \\ z_a + z_c = 30 \\ z_b + z_c = 13 \end{cases}$$

$$z_a + z_b + z_c = 26,5$$



$$a = 2^7 3^7 5^7$$

$$b = 2^2 3^3 5^5$$

$$c = 2^{12} 3^{11} 5^{15}$$

$$ax + 2y - 3z = 0$$

$$z_a \geq 10$$

$$z_c \geq 13$$

$$z_a + z_c \geq 30$$

$$z_a + z_b \geq 10$$

$$z_a + z_c \geq 30$$

$$z_b + z_c \geq 13$$

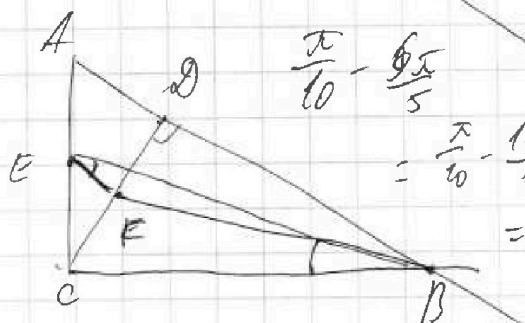
$$z_a, z_b, z_c \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\pi}{10} - \frac{6\pi}{10}$$

$$= \frac{\pi}{10} - \frac{12\pi}{10}$$

$$= -\frac{11\pi}{10} (z_a + z_b + z_c) - \frac{5\pi}{10}$$

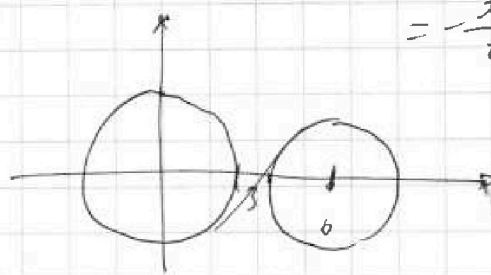
$$= -\frac{\pi}{2}$$



$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$



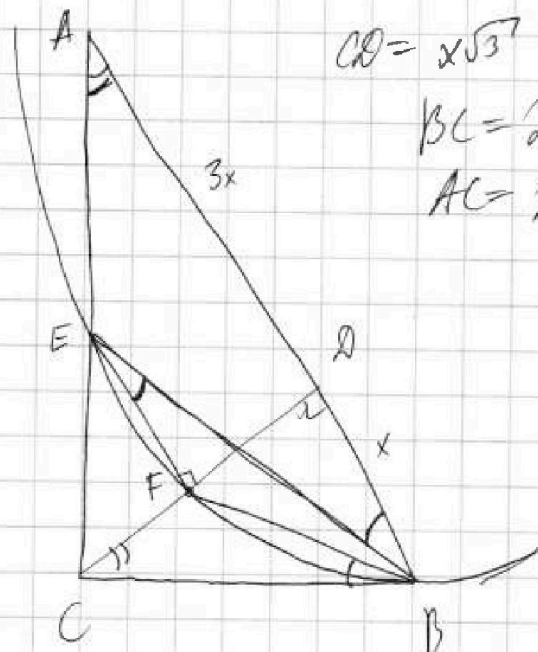
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CD = x\sqrt{3}$$

$$BC = 2x$$

$$AC = 2x\sqrt{3}$$

$$CF = y$$

$$CE = 2y$$

$$AE = 2x\sqrt{3} - 2y$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB}$$

$$\frac{y}{2x\sqrt{3} - 2y} = \frac{2x}{4x}$$

$$2y = 2x\sqrt{3} - 2y$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$$

$$S(CEF) = \frac{1}{2} CF \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot y \cdot y\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \left(\frac{8}{3}\right)$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$

