МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)\,(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a_2 = \nu_2(a)$, $b_2 = \nu_2(b)$, $c_2 = \nu_2(c)$,
аналогично определим $a_3, b_3, c_3, a_5, b_5, c_5$.

$\nu_p(n)$ – степень вхождения p в n.

Из условий:

$$\begin{cases} ab : 2^7 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 7 \\ bc : 2^{13} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 13 \\ ac : 2^{14} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 7 + 13 + 14 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 17.$$

Аналогично для 3 и 5 получаем

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \\ a_3 + c_3 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \quad a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 43 \end{cases} \Rightarrow 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \quad a_5, b_5, c_5 \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 38$$
Но $a_5 + c_5 \geq 43 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$

$$\Rightarrow \nu_2(abc) = a_2 + b_2 + c_2 \geq 17$$
$$\nu_3(abc) = a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$
$$\nu_5(abc) = a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17} 3^{22} 5^{36} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

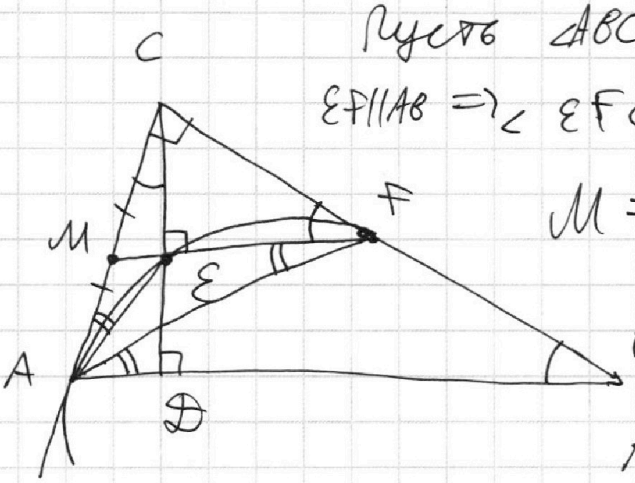
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

... Это достигается при

~~$a_2 = 4$~~ $\begin{cases} a = 2^4 3^7 5^{21} \\ b = 2^3 3^5 5^0 \\ c = 2^{10} 3^{10} 5^{22}. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Ответ: $\min(abc) = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:
1 2 3 4 5 6 7
МФТИ
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle ABC = \varphi$.

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle EFC = \varphi$. $\angle ACD = \frac{\pi}{2} - \angle ECF = \varphi$.

$M = EF \cap AC$.

$\angle MEE = \angle CFE \Rightarrow$

$\Rightarrow (CFE)$ касается MC.

$\Rightarrow ME \cdot MF = pow(M, (CFE)) = MC^2$.

$pow(P, \omega)$ – степень точки P отн. ω.

(AFE) касается $AC \Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF$.

$\Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF = MC^2 \Rightarrow MA = MC$.

$\Rightarrow S_{\triangle CFE} = \frac{1}{4} S_{\triangle CBD}$. ($EF \parallel BD$ и $MA = MC$

$\Rightarrow MF$ – ср. линия $\triangle CBD \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{BCD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (AB - BD)}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot BD} = \frac{0{,}3}{1} = 0{,}3.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = 4 \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = 1{,}2.$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2x}{10} + 2\pi k \quad (1) \\ -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \quad (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$4x = 4\pi + 10\pi k$$

$$x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

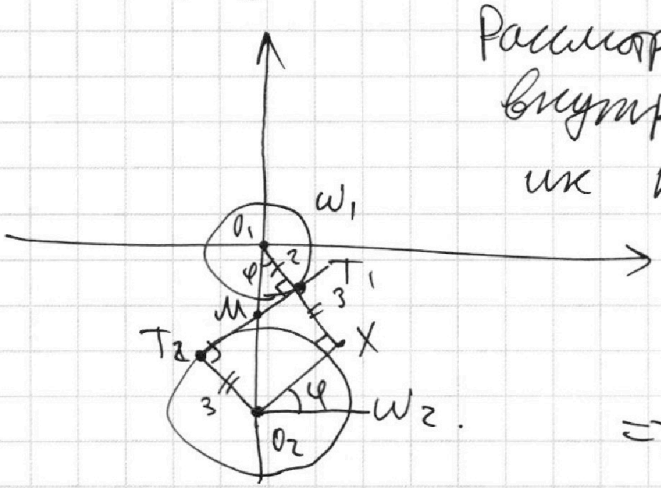
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}.$$

Построим графики. Это будут окружности с центрами в $(0;0)$ и $(-7;0)$ и радиусами 2 и 3.

Рассмотрим их общие внутренние касательные и их коэффициенты наклона.



$O_1X = R_1 + R_2 = 5$

$O_1O_2 = 7.$

$\Rightarrow O_2X = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}.$

$\Rightarrow$ для 1ой касательной

коэф. наклона $\psi_1 = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{O_2X}{O_1X} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}.$

$(\varphi = \angle \dfrac{\pi}{2} - \angle O_1O_2X = \angle O_2O_1X).$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для второй касательной, из симметрии, $\psi_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$. $k = -\frac{1}{3a}$.

Тогда, ~~если $\phi \neq k$~~ $(1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = kx + \frac{7b}{3a} = \omega(x)$

$\Rightarrow$ При $k \in [\psi_2; \psi_1]$, если любая прямая такого вида ($\omega(x)$) будет пересекать одну из окружностей в 2 точках, то она не будет пересекать другую, т.к. ~~для~~

~~$k \neq 0$ $|k| <$~~ $\psi_2 \leq k \leq \psi_1$.

$\Rightarrow$ Такое возможно при $k \in (-\infty; \psi_2] \cup [\psi_1; +\infty)$.

Выберем b такое, что $\frac{7b}{3a} = y_M$, где $M = T_1T_2 \cap O_1O_2$. $\Rightarrow$ При $k > \psi_1$ или $k < \psi_2$ коэф. наклона $\omega(x)$ будет больше, чем у касательной (общей) $\Rightarrow$ она пересечет обе окружности в 2 точках.

$\Rightarrow -\frac{1}{3a} \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty\right) \Rightarrow$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{6\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{6\sqrt{6}}{5}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(\log_7 y)^5 + 4\log_7 y = -\frac{7}{2} = -\left((\log_7 w)^5 + 4\log_7 w\right)$,

то получаем, что $\log_7 y = -\log_7 w$

$\Rightarrow \log_7 y + \log_7 w = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_7 (yw) = 0 \Rightarrow yw = 1$

$\Rightarrow 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$.

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$.

Других значений для xy нет, так как мы делали равносильные переходы и получили однозначный ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad (1) \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4. \quad (2) \end{cases}$$

$y>0$ и $6x>0 \Rightarrow y=|y|,\ x=|x|$.

Пусть $|6x| = w$. $w>0$., $|w|=w$.

Перепишем выражения. $\ln w \neq 0$, $\ln y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7}\right)^4 - 2\left(\frac{\ln 7}{\ln w}\right) = \frac{\ln 343}{\ln w^2} - 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7}\right)^4 - 2\left(\frac{\ln 7}{\ln w}\right) = \frac{3\ln 7}{2\ln w} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7}\right)^5 - \frac{7}{2} + 4\left(\frac{\ln w}{\ln 7}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (\log_7 w)^5 + 4\log_7 w = \frac{7}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^4 + 6\frac{\ln 7}{\ln y} = \frac{5\ln 7}{2\ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^5 + \frac{7}{2} \cancel{\frac{\ln y}{\ln 7} + 4 = 0}. + 4\frac{\ln y}{\ln 7} = 0.$$

$$\Rightarrow (\log_7 y)^5 + 4\log_7 y = -\frac{7}{2}.$$

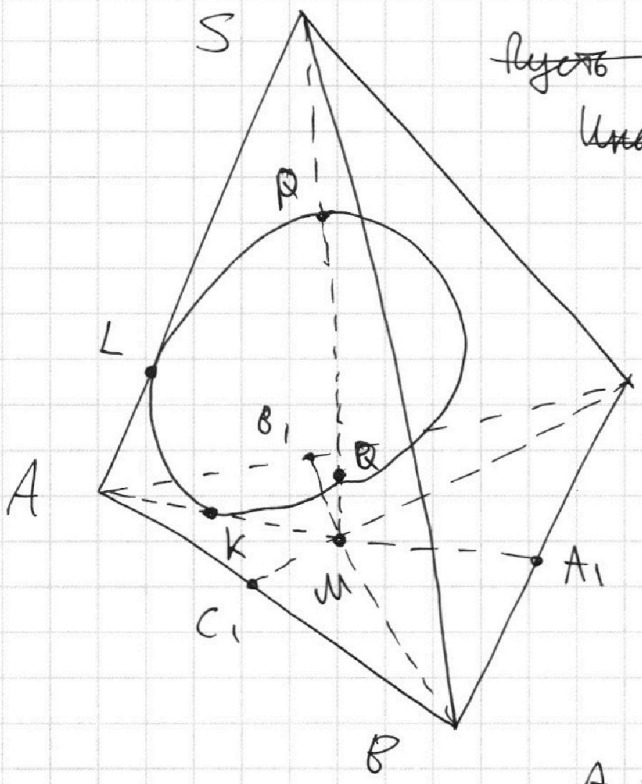
функции $y=x$, $y=x^5$ и $y=\log_7 x$ принимают каждое значение в единственной точке $\Rightarrow$ так как

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■

МФТИ

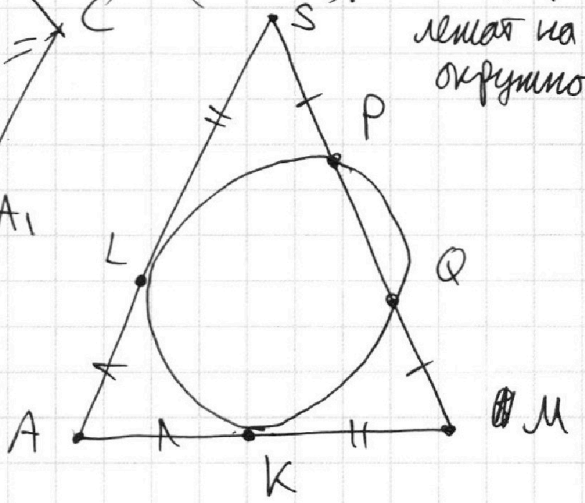
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Пусть $SP < SQ$.~~

~~Иначе $SP^* = SP - PQ = SQ^*$.~~

Рассмотрим плоскость (ASM). $\Rightarrow$ P, Q, L, K лежат на окружности.



(☆) $SP = MQ \Rightarrow SP \cdot PSQ = PM \cdot QM \Rightarrow$

$\Rightarrow pow(S, (PQLK)) = pow(M, (PQLK)) \Rightarrow$

$\Rightarrow MK^2 = LS^2 \Rightarrow MK = LS$.

Но $AL = AK = \sqrt{pow(A, (PQKL))} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = SA = AL + LS = AK + KM$.

$\Rightarrow AM = SA = 10$.

Рассмотрим $\triangle ABC$.

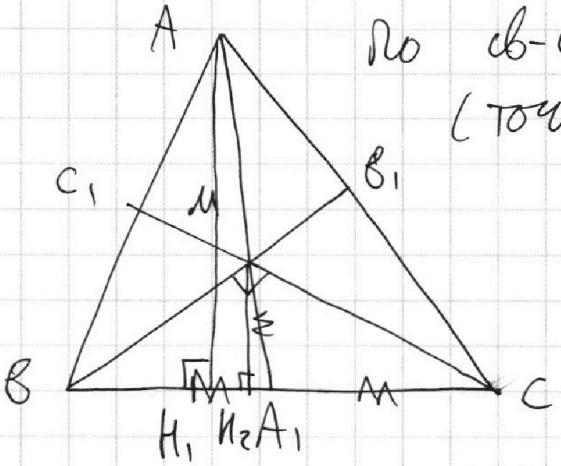
(☆) [если P и Q были в другом положении, т.е. $SP > SQ$, то равенство всё равно выполняется].

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ■

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По св-ву центра масс (точки M), $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2$.

$\Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 5$.

Но $BA_1 = CA_1 = \frac{1}{2} BC = 5 = MA_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $\triangle BMC$ медиана MA_1 равна половине стороны $\Rightarrow \angle BMC = \frac{\pi}{2}$.

$MC = \frac{2}{3} CC_1$; $MB = \frac{2}{3} BB_1 \Rightarrow BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1$.

Пусть $H_1, H_2 \in BC$: $AH_1 \perp BC$; $MH_2 \perp BC$.

$H_1A \parallel MH_2 \Rightarrow \triangle A_1H_2M \sim \triangle A_1H_1A \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{H_2M}{H_1M} = \frac{\frac{1}{2} H_2M \cdot BC}{\frac{1}{2} H_1M \cdot BC} = \frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{60}{3} = 20$.

Но $S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC \Rightarrow$

$\Rightarrow BM \cdot MC = 2 S_{\triangle BMC} = 40$.

Но $BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{40}{4} \cdot 9 = 90$.

$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 =$

$= 90 \cdot 15 = 1350$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

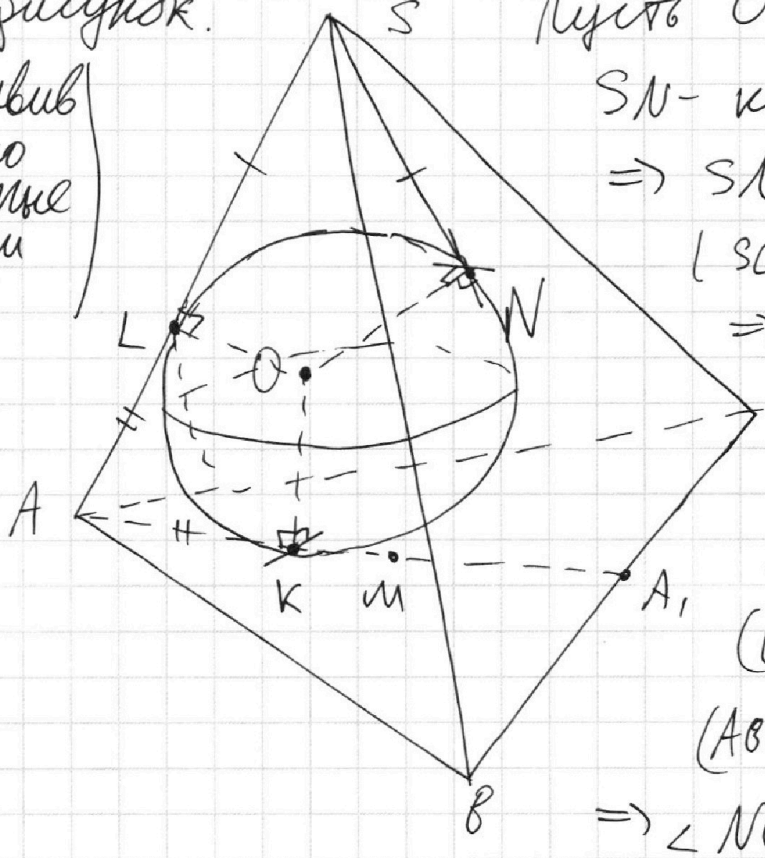
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

... Осталия пункт б). Сделаем новый рисунок.

(оставив только нужные точки)



Пусть O - центр Ω

SN - касательная ⇒

⇒ SN = SL = 3.

(SL - тоже касательная)

⇒ AL = AS - SL =

= 10 - 3 = 7.

AK = AL = 7.

Ω касается (BSC) в N ⇒ и (ABC) в K ⇒

⇒ ∠NOK дополняет искомый двугранный угол ψ при BC до π, так как

Если мы соединим O с точкой T так, чтобы

OT = ρ(O, BC), и опустим из O перпендикуляры OX, OY на (ABC) и (BSC), то ~~они из-за~~

(OXTY) будет вписанным и ∠XOY + ∠YTX = π.

(в данном случае X = K, Y = N.)

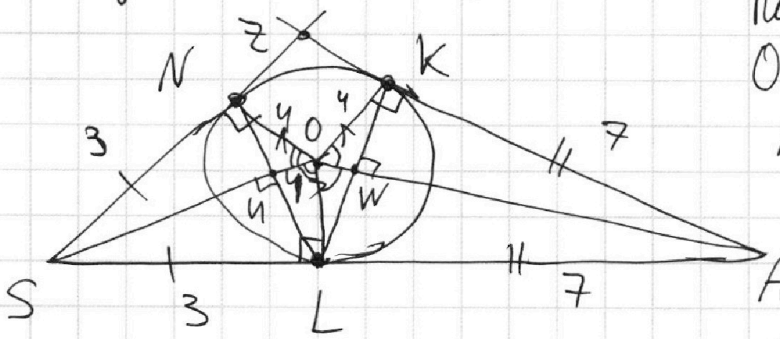
LO = ρ(O, AS) и, NO = ρ(O, (BSN)), OK = ρ(O, (ABC))

⇒ (LOKA) и (SNLO) по (SLO) и (SLA) и (OLA).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒
МФТИ
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

это одна и та же плоскость ⇒

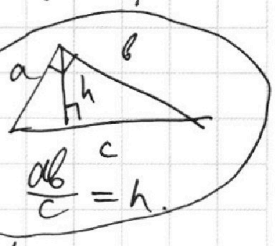
⇒ N, S, L, O, A, K лежат на одной плоскости. рассмотрим её и найдем $\angle KON$. (или $\angle MON$).



По т. Пифагора,

$OS = \sqrt{OL^2 + SL^2} = 5$

$AO = \sqrt{AL^2 + OL^2} = \sqrt{65}$.



в $\triangle$, $\frac{ab}{c} = h$.

$SO \perp NL$ и $OA \perp LK$

$$\Rightarrow \frac{NL}{2} = \rho(L, OS) = \frac{SL \cdot OL}{OS} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{12}{5}$$

$NL = \frac{24}{5}$. Аналогично,

$LK = \frac{56}{\sqrt{65}}$.

$$\angle KOL = 2\arcsin\left(\frac{KL}{2OK}\right) = 2\arcsin\left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right)$$

$$\angle NOL = 2\arcsin\left(\frac{LN}{2R}\right) = 2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right).$$

$$\Rightarrow \angle NOK = 2\left(\pi - \left(\arcsin\left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right).$$

$$\Rightarrow \psi = \pi - \angle NOK = 2\arcsin\left(\frac{7}{\sqrt{65}}\right) + 2\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - \pi$$

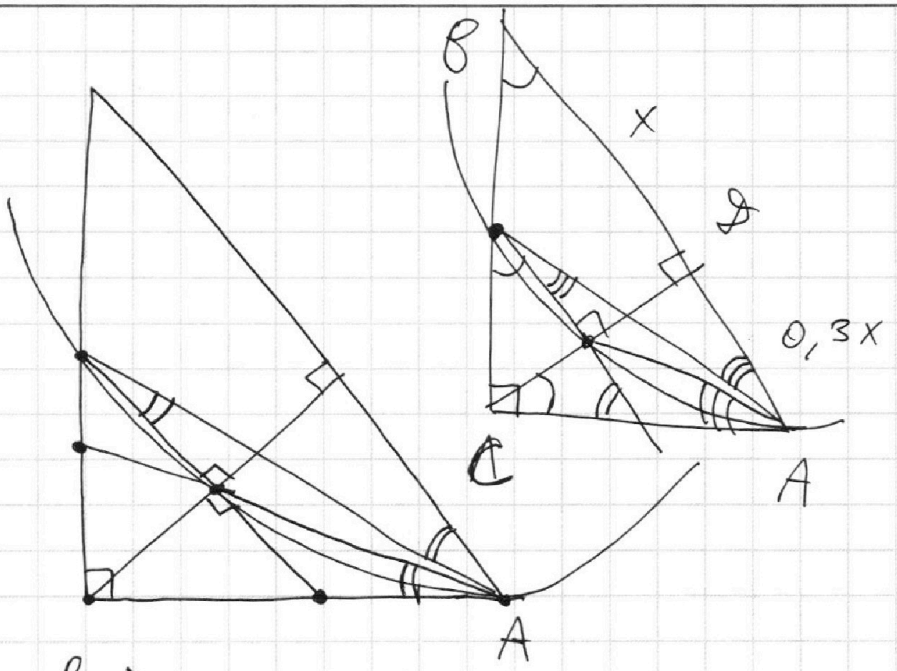
Что и требовалось найти.

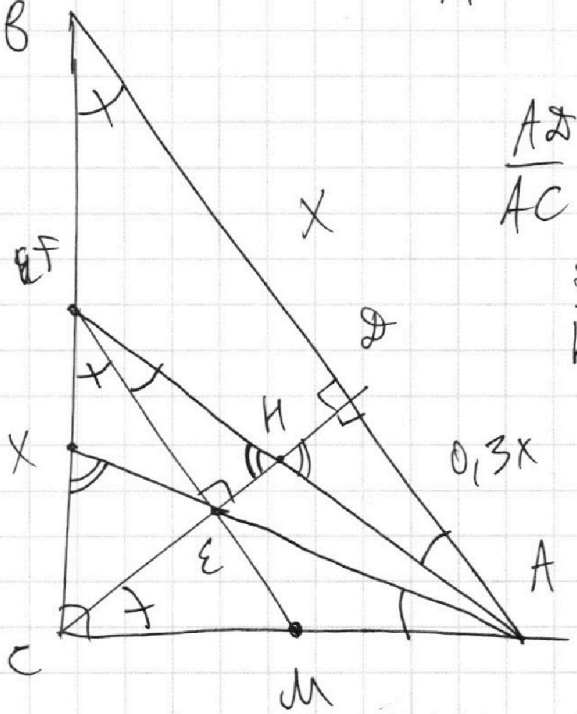
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





$$\frac{AD}{AC} = \frac{DH}{CX} = \frac{HE}{FE}$$

$$\frac{DH}{HE} = \frac{AD}{FE}$$

$$MC^2 = MF \cdot ME = $$

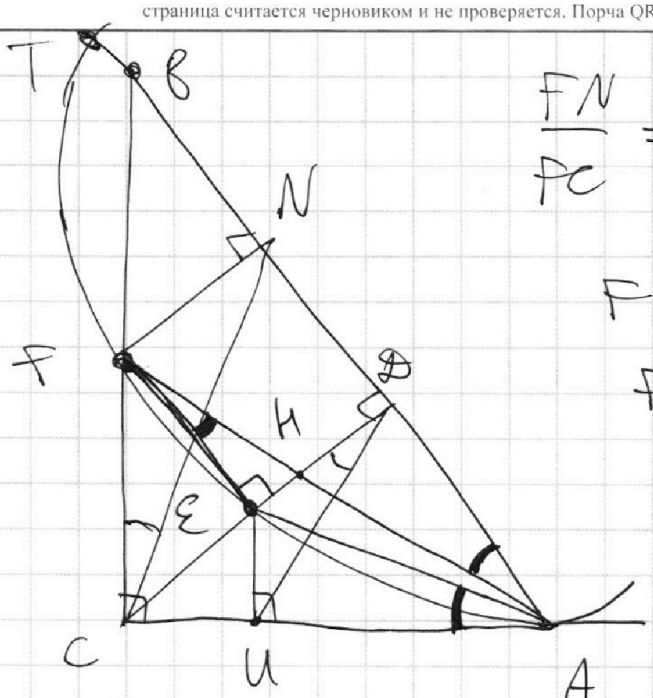
$$= 0{,}3\,k^2x^2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

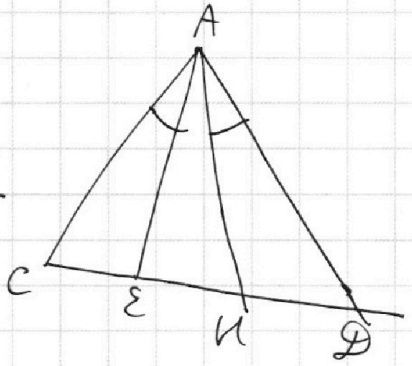
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

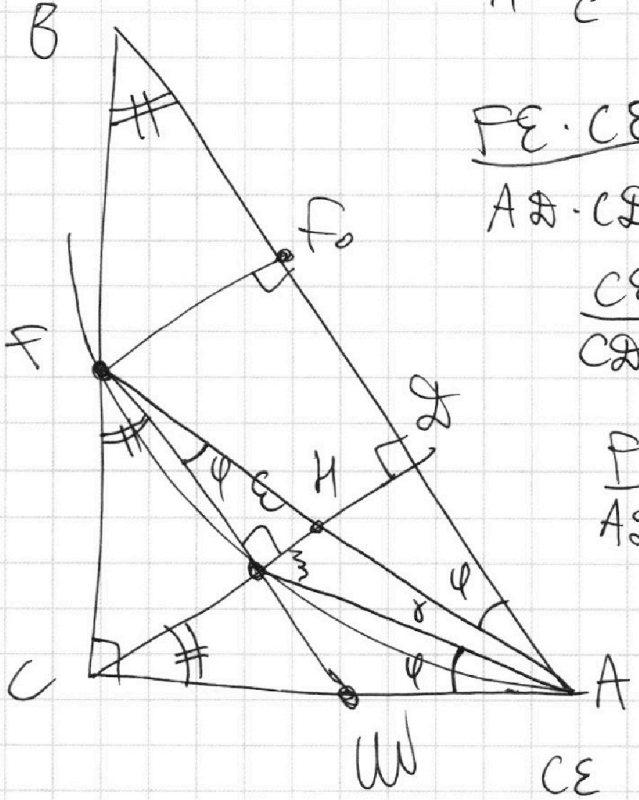


$$\frac{FN}{FC} = \frac{EU}{ED}$$

$$FC \cdot EU = FN \cdot ED$$

$$FC \cdot EU = ED^2.$$





$$\frac{FE \cdot CE}{AD \cdot CD}.$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD}.$$

$$\frac{FE}{AD} = \frac{EH}{HD}.$$

$$\frac{CE}{CD} \cdot \frac{DH}{HC} = \left(\frac{AD}{CD}\right)^2 (?!)$$

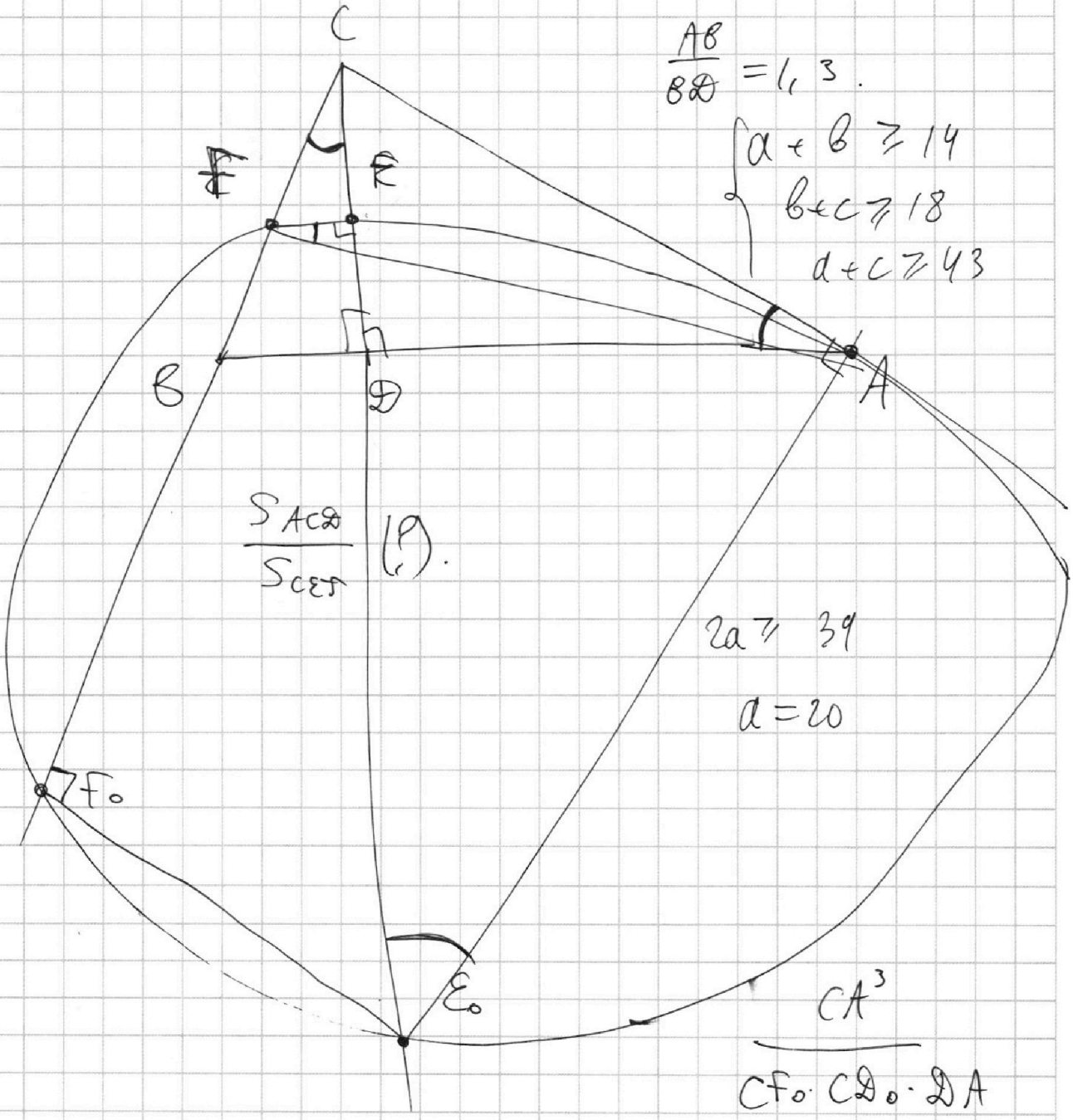
$$\frac{CE \cdot CH}{ED \cdot HD} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AB}{BD} = 1,3.$

$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 18 \\ a+c \geq 43 \end{cases}$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ (?).

$2a \geq 39$

$a = 20$

$\frac{CA^3}{CF_0 \cdot CD_0 \cdot DA}$

$CF \cdot CF_0 = CE \cdot CE_0 = CA^2.$

$\frac{S_{CFE}}{S_{ACD}} = \frac{CE \cdot FC}{CA \cdot DA} = \frac{CA^4}{CF_0 \cdot CD_0 \cdot CA \cdot DA}$

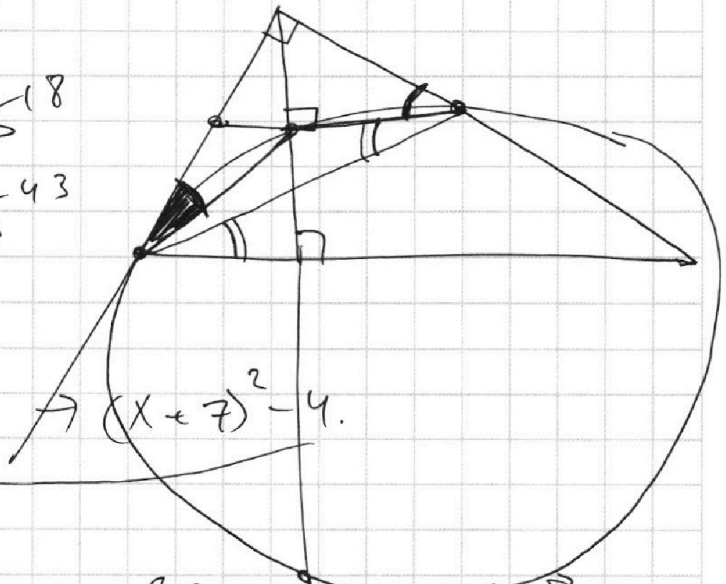
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ab : 2^7 3^{11} 5^{14} \\ bc : 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac : 2^{14} 3^{17} 5^{43} \end{cases}$$



$x^2 + 14x + 45 \to (x+7)^2 - 4.$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 7 \\ a_2 + c_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow 2a_2 = 21 - 13 = 8$$

$$\begin{cases} a_2 = 4 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 10 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases} \Rightarrow 2a_3 = 13,\ a \geq 7.$$

$a = 7$
$b = 5$
$c = 10$

$\Rightarrow 2(a+b+c) \geq (\ldots).$

$$\begin{cases} 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 34 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \end{cases} \Rightarrow \text{ez}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\ln a$

$\ln b$

$$\begin{cases} \log_7^5 y + 4\log_7 y = -\frac{7}{2} \\ \log_7^5 6x + 4\log_7 6x = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_7 y = -\log_7 6x \Rightarrow y = (6x)^{-1}$$

$$\frac{\ln y}{\ln 7} = -\frac{\ln 6x}{\ln 7}$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}.$$

$$\ln y = -\ln 6x$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

~~$\Rightarrow y = -6x$~~

$$\Rightarrow y \neq e^{\ln y} = e^{-\ln 6x}$$

$$e^{\ln y + \ln 6x} = 1$$

$$\ln y + \ln 6x \neq 0$$

$$\ln(6xy) \neq 0$$

$$\ln y + \ln 6x = 0$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\ln(6xy) = 0, \quad 6xy = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

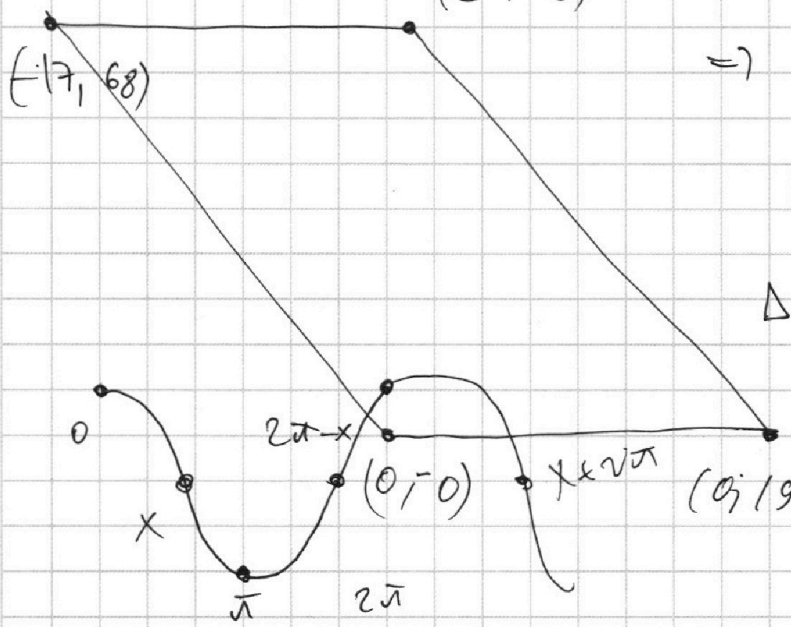
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0;0)$, $P(-17,68)$, $Q(2,68)$, $R(19,0)$.

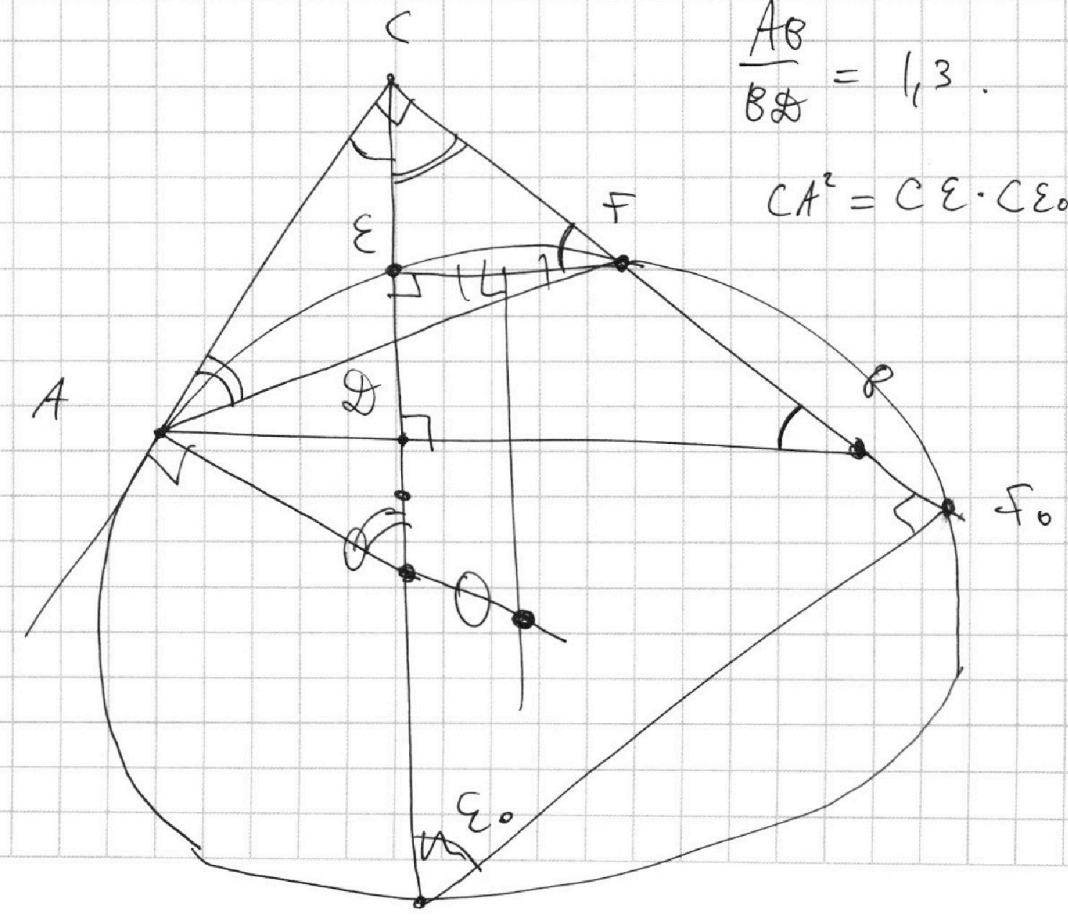
$4(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=40$.

$\Rightarrow 4\Delta x+\Delta y=40$

$\Delta \begin{pmatrix} (1;36) \\ (2;32) \\ (3;28) \\ \vdots \\ (10;0) \end{pmatrix}$.



$\frac{S_{CEF}}{S_{ACB}}=\frac{CA^4}{CE_0\cdot CF_0\cdot CA\cdot CD}$



$\frac{AB}{BD}=1{,}3$.

$CA^2=CE\cdot CE_0=CF\cdot CF_0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5 $\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi + 2x}{10}\right)$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi + 2x}{10}\right)$

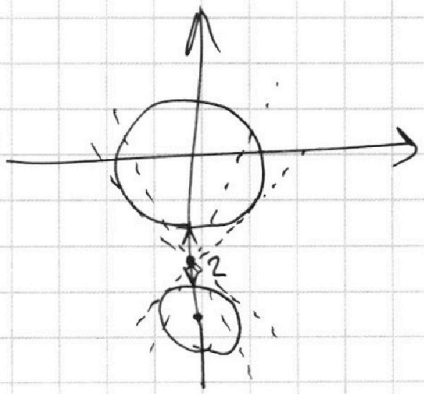
$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi + 2x}{10} + 2\pi k$

$5\pi - 10x = 3\pi + 2x + 20\pi k$

$12x = 2\pi + 20\pi k$.

$x = \frac{\pi + 10\pi k}{6}$.

$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ $\Rightarrow$

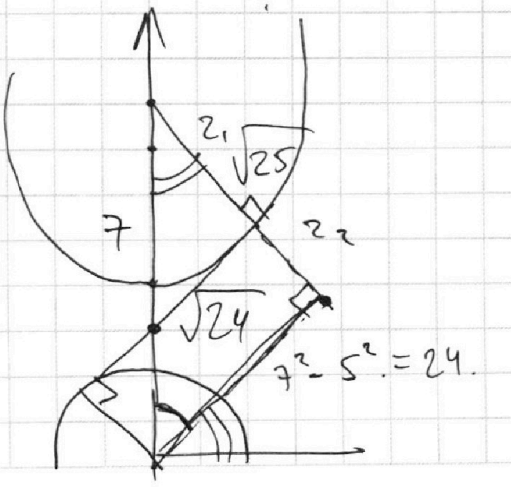


$y = -\frac{x}{3a} + \left(\frac{7b}{3a}\right)$

$y = -\left(\frac{1}{3a}\right)x + C$

$y = kx + C$

$\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Δ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$6x > 0$

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}(7) = \log_{36x^2} 343 - 4.$$

$$\left(\frac{\ln(6x)}{\ln(7)}\right)^4 - 2\left(\frac{\ln 7}{\ln 6x}\right) = \frac{\ln 343}{\ln(36x^2)} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^4 - 2\frac{\ln 7}{\ln 6x} = \frac{3\ln 7}{2\ln 6x} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 - \frac{7}{2} + 4\frac{\ln 6x}{\ln 7} = 0. \quad \Rightarrow (?!)$$

$$2x^5 - 7 + 4x = 0.$$

$$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^4 + 6\left(\frac{\ln 7}{\ln y}\right) = \frac{5\ln 7}{2\ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 + 4\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right) = \frac{7}{2} \\ \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^5 + 4\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right) = -\frac{7}{2}. \end{cases}$$

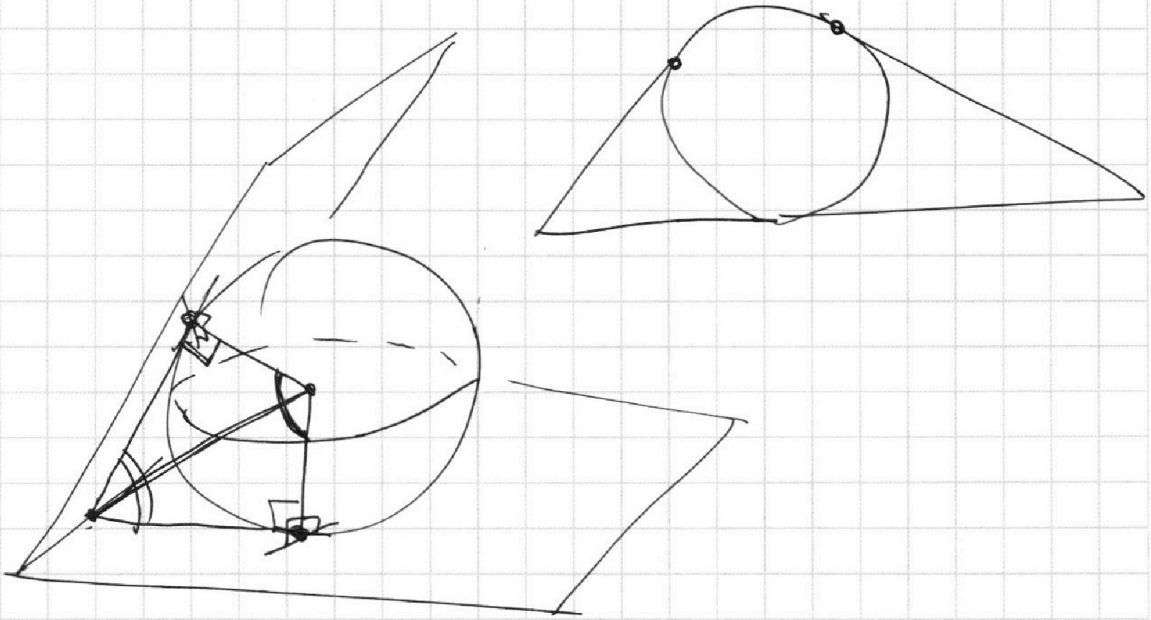
$$(\ln 6x)^5 + 4(\ln 6x)(\ln 7)^4 + (\ln y)^5 + 4(\ln y)(\ln 7)^4$$

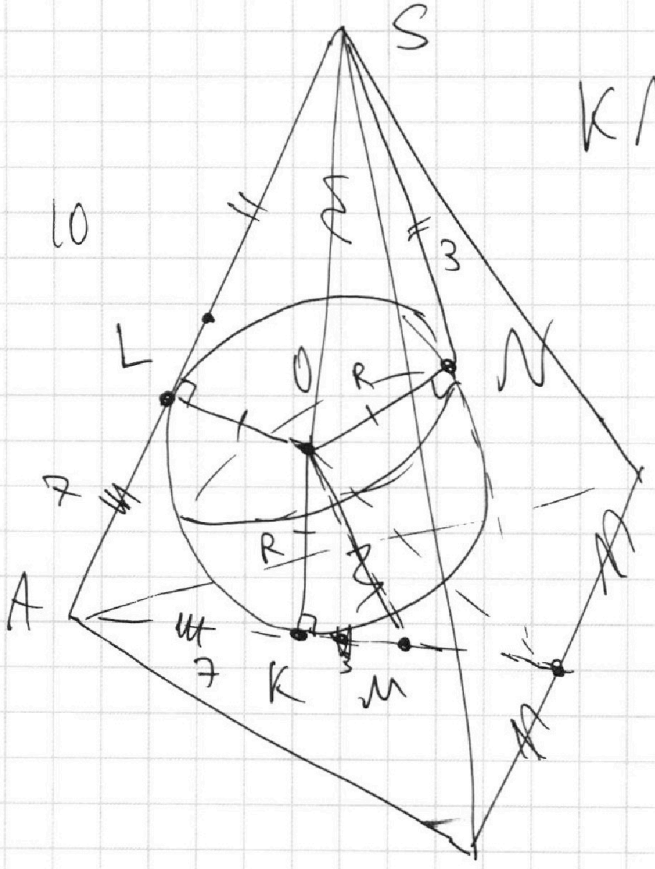
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





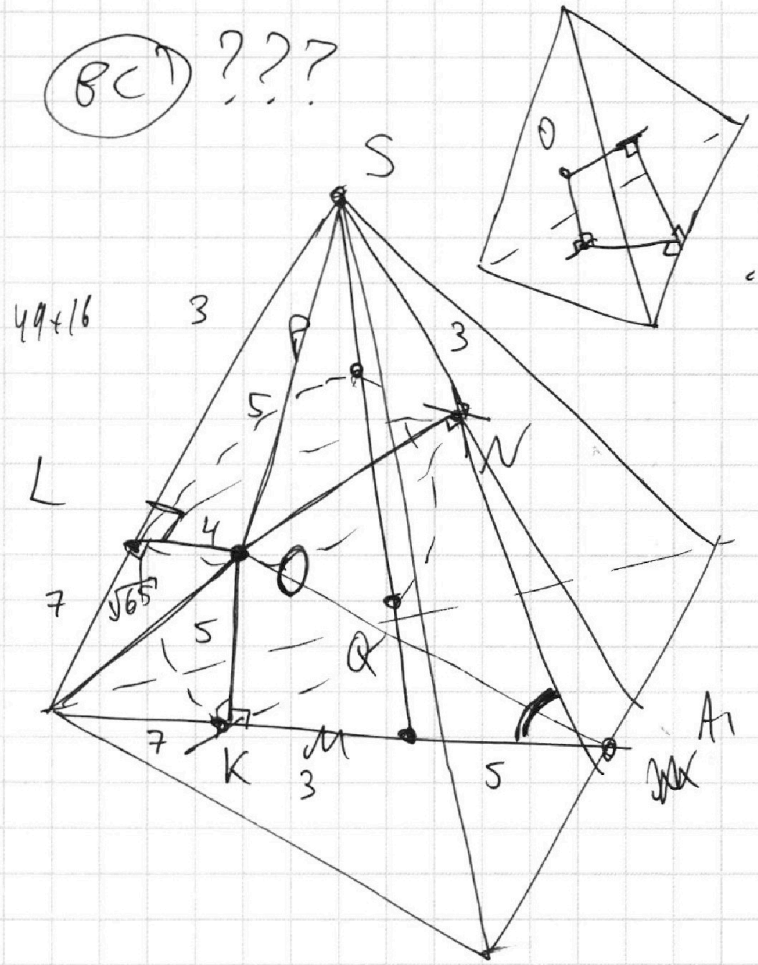
KN (???).

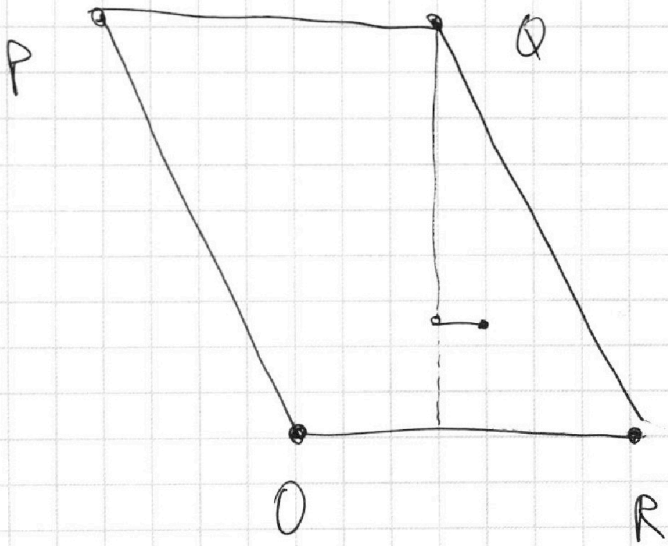
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

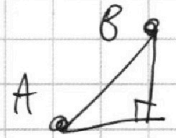
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

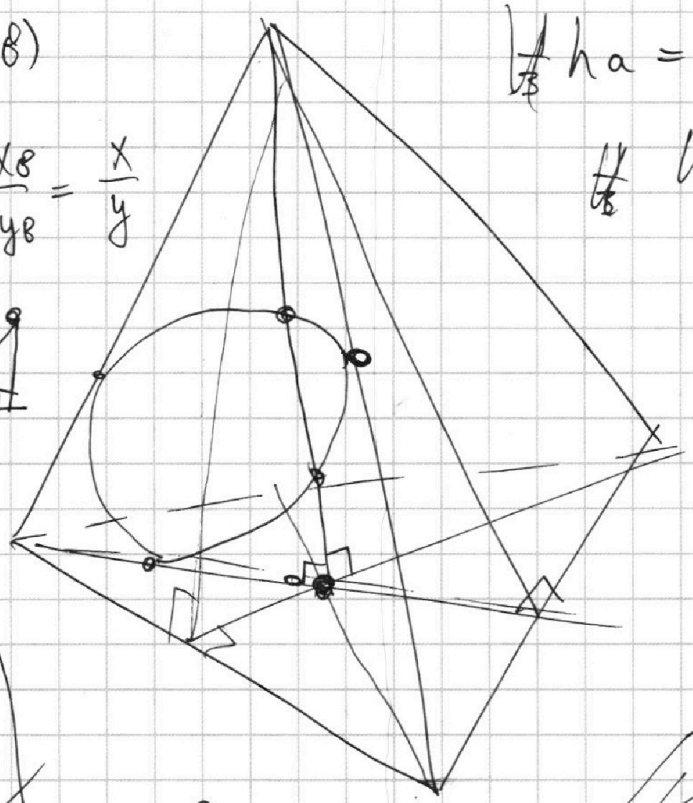
$l(A,B)$

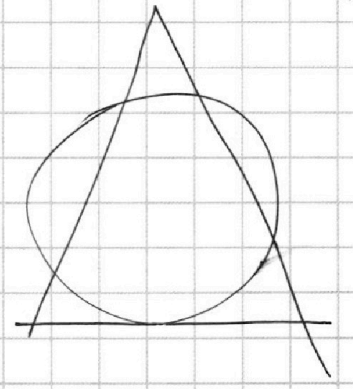
$\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} = \frac{x}{y}$

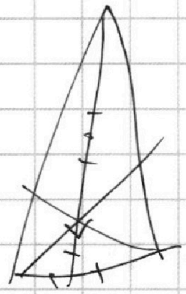


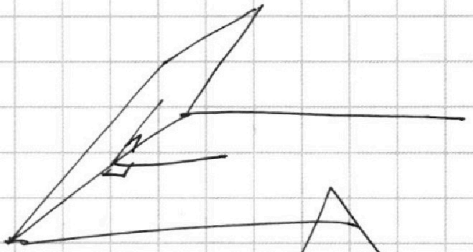
$h_a = \frac{2S}{BC} = \ldots 12.$

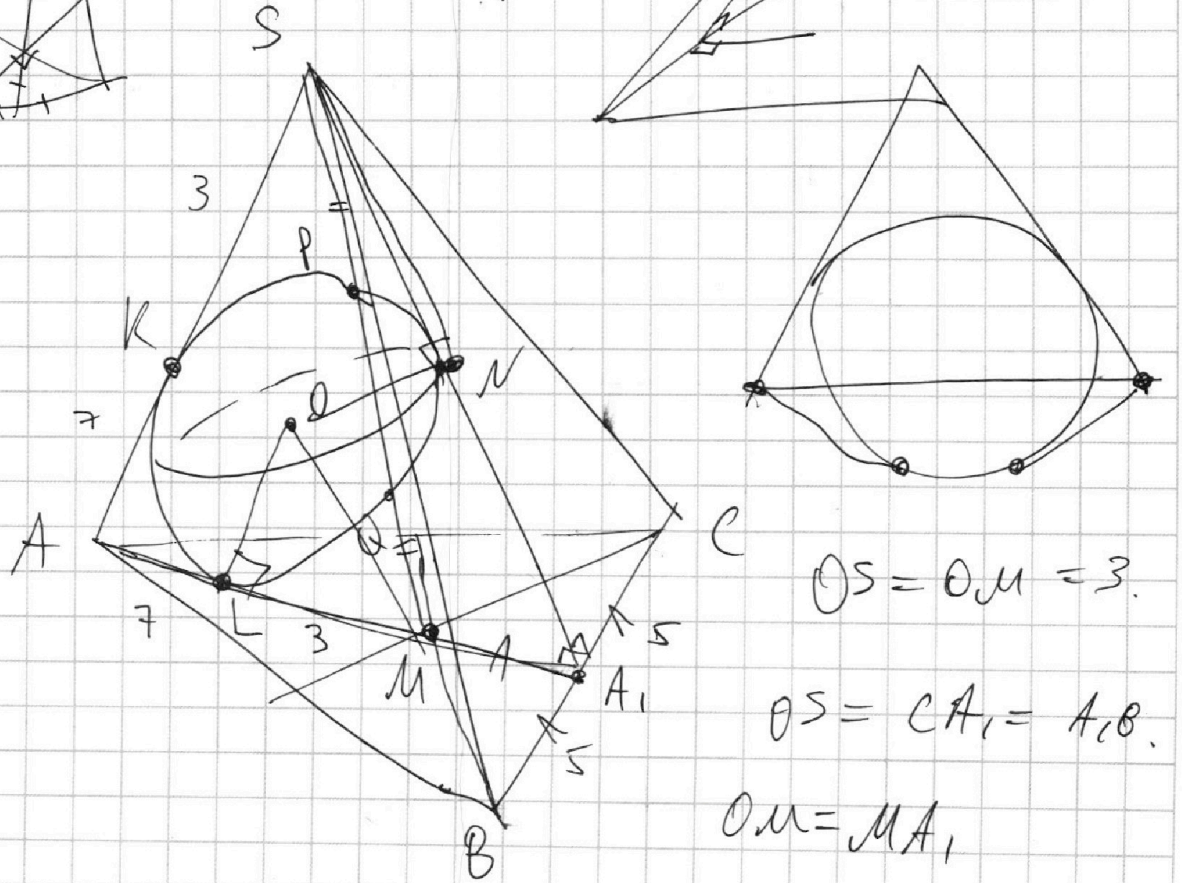
$h_c = ?$











$OS = OM = 3.$

$OS = CA_1 = A_1B.$

$OM = MA_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

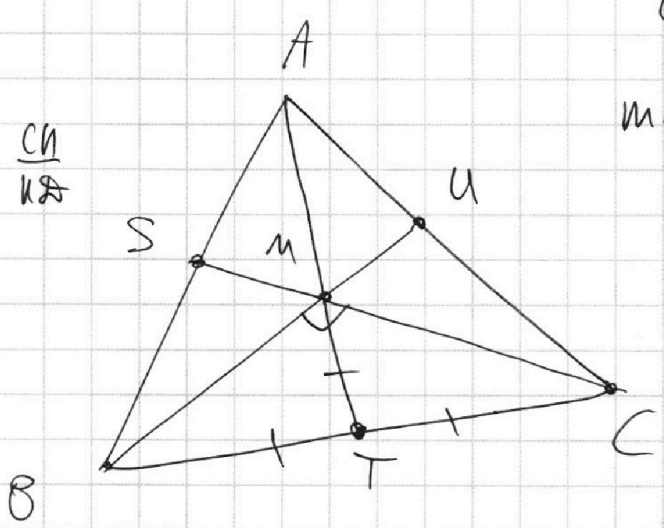
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{CE}{ME}$

$\frac{CE}{DE} \cdot \frac{CN}{NB}$



$BC = AM$

$man + dad = bmb + cnc$

$m = n = 5$

~~$25a + m^2a = mb^2 + nc^2$~~

$BC = 10$

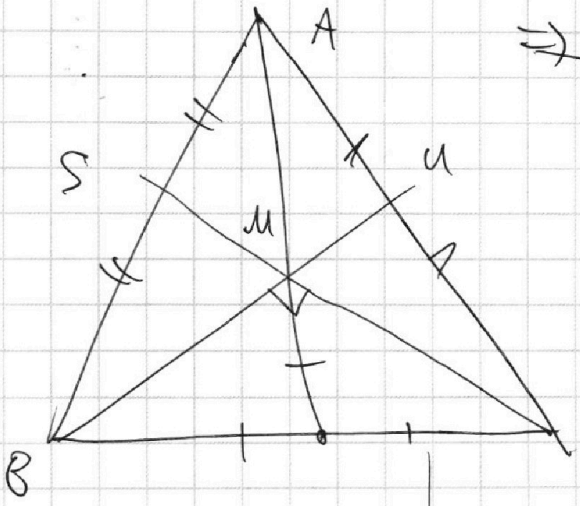
$S = 60$

$AM = 10$

~~$\Rightarrow AT = 15$~~

~~$MC = MB = 5\sqrt{2}$~~

$\Rightarrow$ $BM \perp CM$



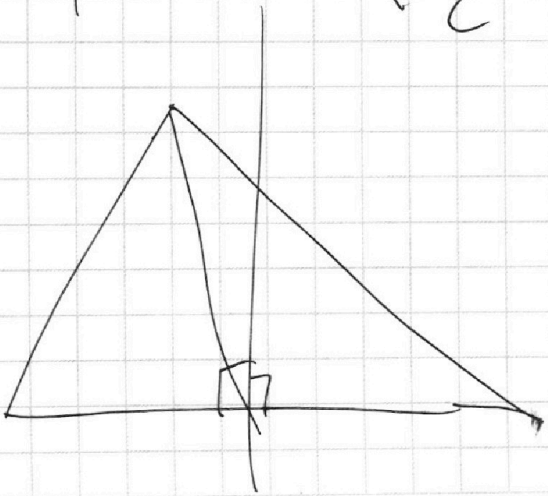
~~$\Rightarrow CS = BN =$~~

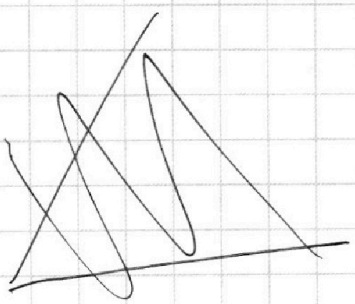
$MB \cdot MC = \frac{4}{9} CS \cdot BN$

$\frac{1}{2} MB \cdot MC = S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$

$MB \cdot MC = 40.$

$CS \cdot BN = 90 \Rightarrow$ ez.





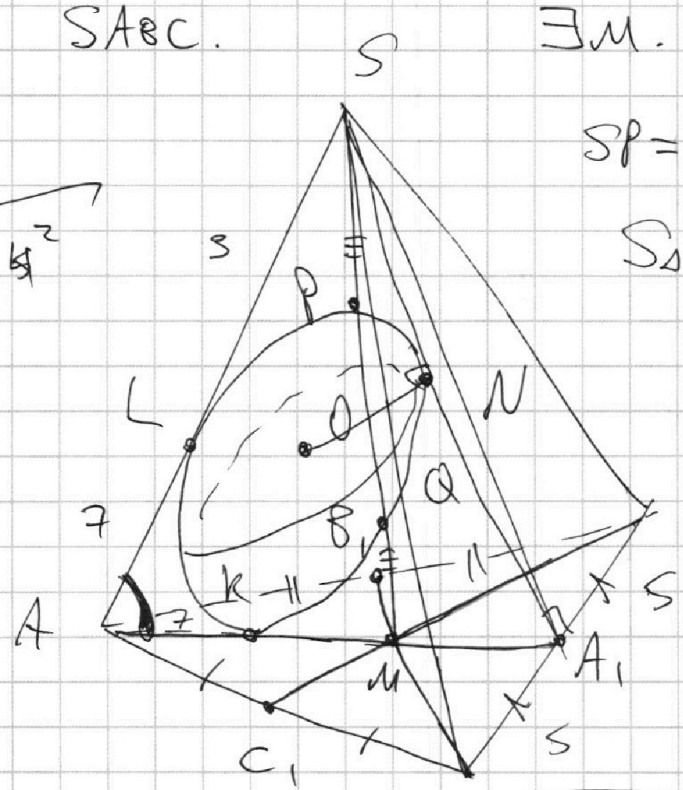
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

SABC. ∃M.



$\sqrt{7^2+5^2}$

$SP = MQ$

$S_{\triangle ABC} = 60$

$SA = BC = 10.$

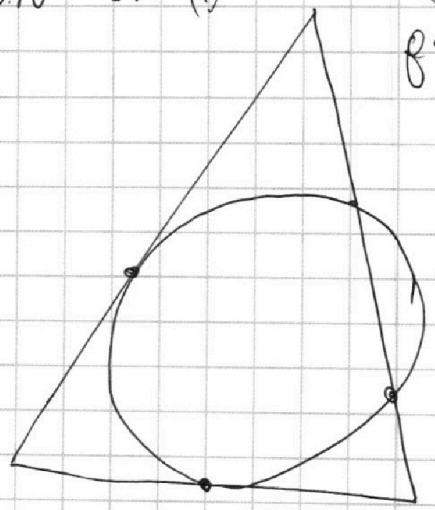
$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ (?)

$AL = AK = 7.$

$\varphi(P)$.

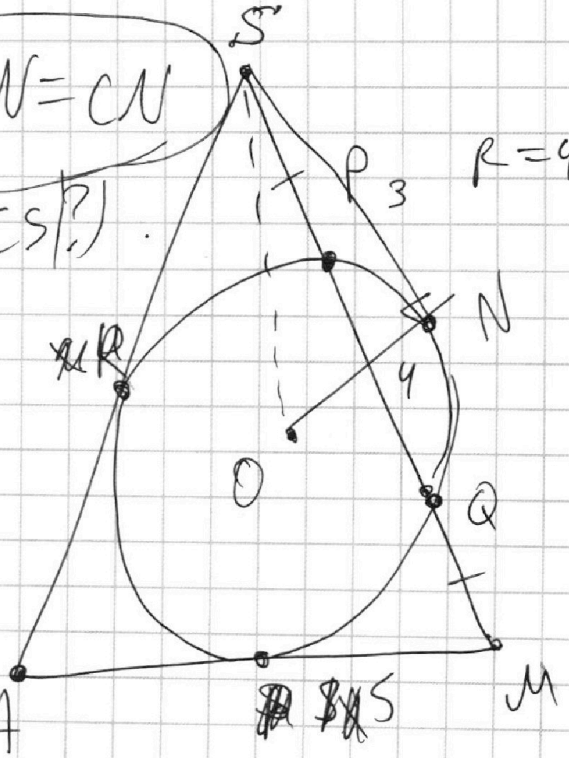
$SN = 3$

$BN = CN$ (?)



$BN = CN$

$BS = CS$ (?).



$R = 4.$

$SP \cdot SQ = MQ \cdot MP$

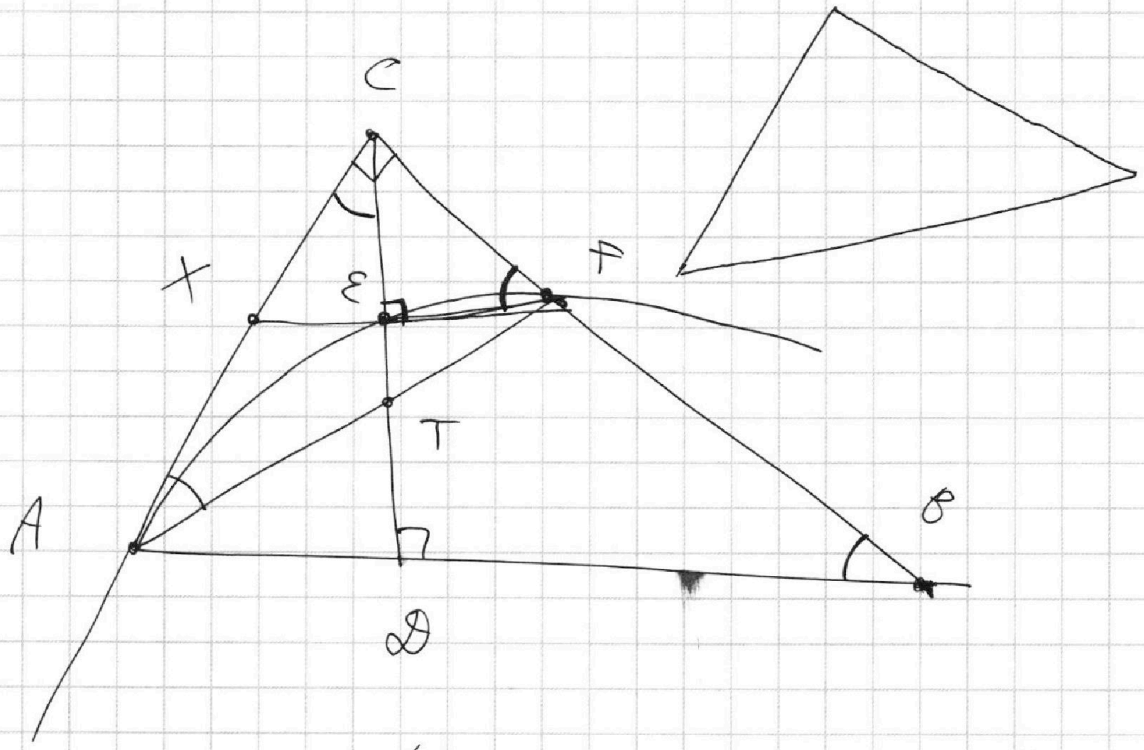
$\Rightarrow MS = AS \Rightarrow AM = 10 = AS.$

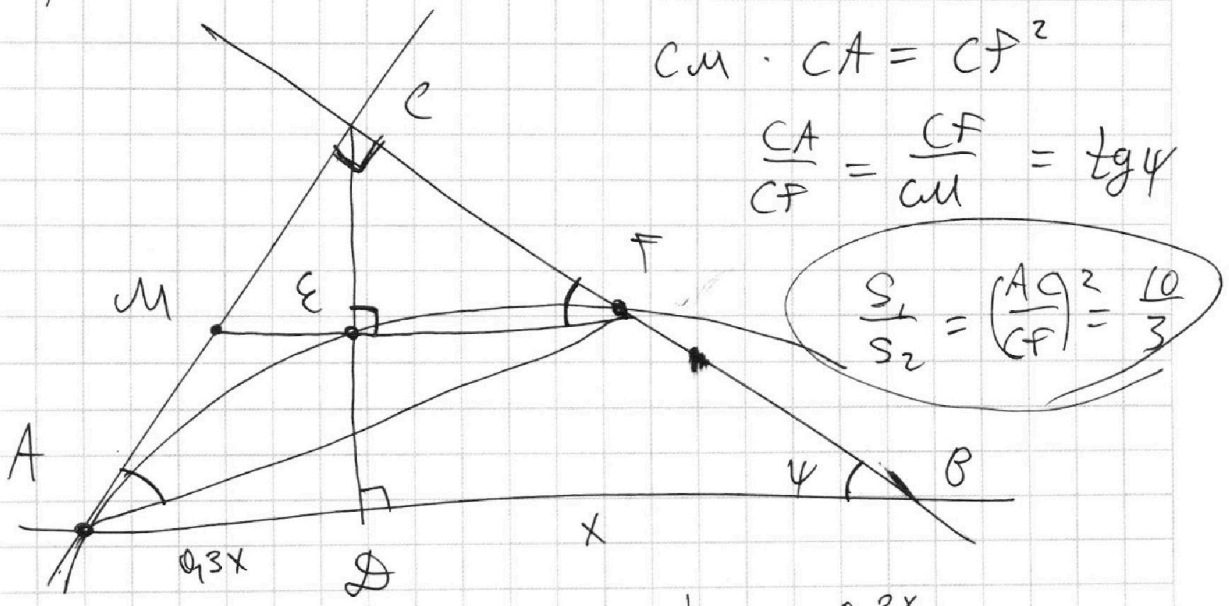
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$CM \cdot CA = CF^2$

$\frac{CA}{CF} = \frac{CF}{CM} = tg\psi$

$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{10}{3}$

$tg\psi = \frac{h}{x} = \frac{0,3x}{h}$

$h = \sqrt{0,3}\,x$.

$\Rightarrow tg\psi = \sqrt{\frac{3}{10}}$. $\Rightarrow$

