МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 1

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$ $\qquad abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2}$

$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$

$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$

Тогда из условия понятно:

$$\begin{cases} x_1+x_2 \geq 7 \quad (1) \\ x_2+x_3 \geq 13 \quad (2) \\ x_1+x_3 \geq 14 \quad (3) \\ y_1+y_2 \geq 11 \quad (4) \\ y_2+y_3 \geq 15 \quad (5) \\ y_1+y_3 \geq 17 \quad (6) \\ z_1+z_2 \geq 14 \quad (7) \\ z_2+z_3 \geq 18 \quad (8) \\ z_1+z_3 \geq 43 \quad (9) \end{cases}$$

Т.к. содержание в abc степеней 2, 3 и 5 не зависит друг от друга нужно получить

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = \min_x \\ y_1+y_2+y_3 = \min_y \\ z_1+z_2+z_3 = \min_z \end{cases}$$

$x_1+x_2+x_3 \geq 14 + x_2$

$(2) \Rightarrow x_3 \geq 13 - x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3) \Rightarrow x_1 + 13 - x_2 \geq 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \geq x_2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1) \Rightarrow x_2 + 1 + x_2 \geq 7$

$x_2 \geq 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1. Тогда $x_1+x_2+x_3 \geq 13$ – достигается
(продолжение) при $x_1=4, x_2=3, x_3=10$

$y_1+y_2+y_3 \geq 17+y_2$

Из (4) $\Rightarrow y_1 \geq 11-y_2 \Rightarrow$ (6) $11-y_2+y_3 \geq 17$

$\Rightarrow y_3 \geq y_2+6 \Rightarrow$ (5) $\Rightarrow 2y_2+6 \geq 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_2 \geq 5$

Тогда $y_1+y_2+y_3 \geq 17+5=22$ – достигается

при $y_1=6, y_2=5$ и $y_3=11$

$z_1+z_2+z_3 \geq 43+z_2$

(7) $\Rightarrow z_1 \geq 14-z_2$

(8) $\Rightarrow 14-z_2+z_3 \geq 43 \Rightarrow z_3 \geq 29+z_2$

(8) $\Rightarrow z_2+29+z_2 \geq 18 \Rightarrow z_2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1+z_2+z_3 \geq 43$ – достигается при

$z_1=14$

$z_3=29, z_2=0$

Тогда $abc \geq 2^{13} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ – ~~при~~ достигается

при $a=2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{14}$; $b=2^3 \cdot 3^5$ и $c=2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$

Ответ: $2^{13} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

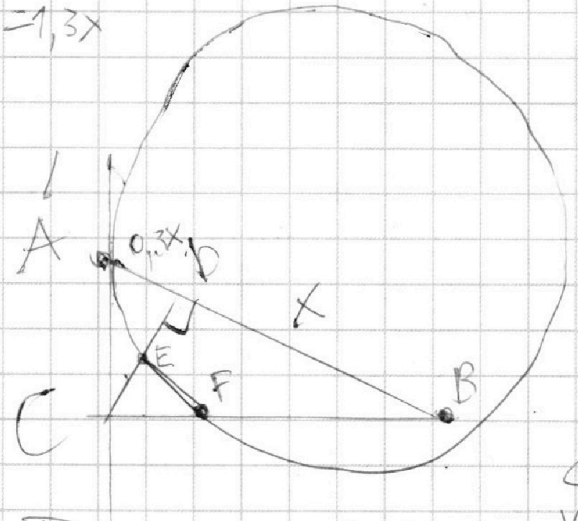
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 2

$BD = x \Rightarrow$
$AB = 1{,}3x$



$CD = \sqrt{0{,}3x \cdot x} = \sqrt{0{,}3}\,x$ — как высота

$AC = \sqrt{0{,}39x^2 + 0{,}3x^2} = \sqrt{0{,}39}\,x$

$BC = \sqrt{0{,}3x^2 + x^2} = \sqrt{1{,}3}\,x$

$\angle CAB = \beta$

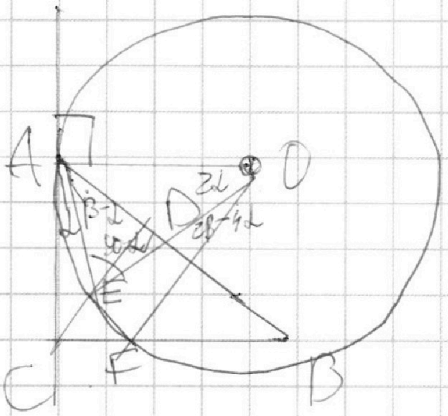
Пусть $\angle CAE = \alpha$, $\angle EAB = \beta - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AED = 90 + \alpha - \beta \Rightarrow \angle DEO =$

$= \angle OEA - \angle AED =$

$\angle OAE - \angle AED =$

$= 90 - \alpha - 90 - \alpha + \beta = \beta - 2\alpha$



$\angle DEF = 90 = \angle EDB$, т.к

$EF \parallel BD \Rightarrow$

$\angle OEF = 90 - \beta + 2\alpha \Rightarrow$

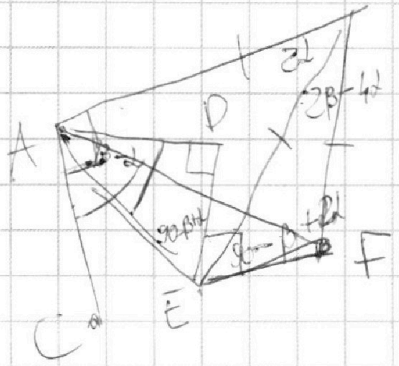
$\Rightarrow \angle AOF = 180 - 2\angle OEF =$

$= 2\beta - 4\alpha \Rightarrow \angle AOF =$

$= 2\beta - 4\alpha + \angle AOE =$

$= 2\beta - 4\alpha + 180 - 2\angle AED =$

$= 2\beta - 4\alpha + 180 - 2(90 - \alpha) =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

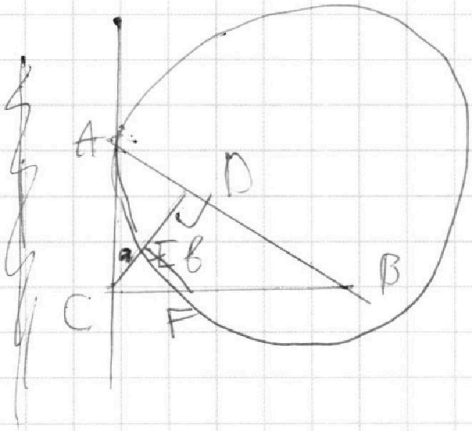
МФТИ

№ 2 (продолжение)

$= 2\beta - 2\alpha \Rightarrow \angle ADF = 2\beta - 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAF = \frac{1}{2}\angle ADF = \beta - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~AC~~ ~~изогонально~~ AF. $\angle CAF = \angle EAD = \beta - \alpha$



$\triangle EAD \sim \triangle CAF \Rightarrow$

$\frac{CF}{AC} = \frac{ED}{AD}$ (1)

$CE = a,\ FE = b \Rightarrow$

$\Rightarrow CF = \sqrt{a^2+b^2}$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$: $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{0,3}x} = \frac{b}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{0,3}b$

$(1) \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{0,39}\,x} = \frac{\sqrt{0,3}x - a}{0,3x}$

$\sqrt{1,3}b = \sqrt{0,3}(x - b)\sqrt{0,39}$

$(\sqrt{1,3} + \sqrt{0,3}\cdot\sqrt{0,39})b = \sqrt{0,3}\sqrt{0,39}\,x$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0,3}x\cdot 0,3x}{\frac{1}{2}ab} = \frac{\sqrt{0,3}x\cdot 0,3x}{\sqrt{0,3}bc} =$

$= \frac{0,3\cdot(\sqrt{1,3}+\sqrt{0,3\cdot 0,39})^2}{0,3\cdot 0,39} = \frac{1,3^2}{0,3} = \frac{16,9}{3}$

Ответ: $\frac{16,9}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3: $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$$\arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$\arccos y \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \le \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \le \pi$

$$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} \in [-2\pi, 3\pi]$$

I сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [0, \pi] \Rightarrow \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = x - \frac{\pi}{2}$

$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow x = \pi$ – уд

II сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = x - \frac{3\pi}{2}$

$x - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{4}\pi$ – уд

III сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [2\pi, 3\pi] \Rightarrow \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = x - \frac{5\pi}{2}$

$x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{28}{10}\pi \Rightarrow x = \frac{7}{2}\pi$ – уд

IV сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [-2\pi, -\pi] \Rightarrow \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{3\pi}{2}$

$x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = -1{,}2\pi \Rightarrow x = -\frac{3}{2}\pi$ – уд

V сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [-\pi, 0] \Rightarrow$ аналогично $x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow$

Ответ: $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{7}{2}\pi\right\}$ $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

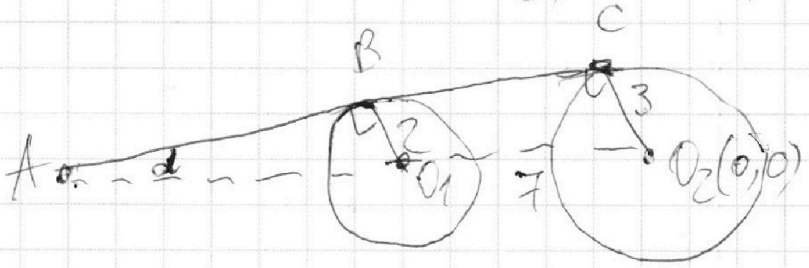
МФТИ

№ 4 (продолжение)

Пусть i-ю кас-ю задачи угловой коэф-нт k_i ⇒ При $k>0$: $k\in(k_3,k_1)\cup(k_1,+\infty)$

При $k<0$: $k\in(k_2,k_4)\cup(-\infty,k_3)$

Из симметрии ⇒ $k_1=-k_2$; $k_3=-k_4$



Из подобия

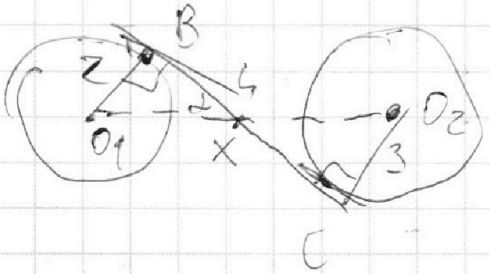
$$\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{2}{3}\Rightarrow$$

$$AO_1=\frac{2}{3}AO_1+\frac{2}{3}\cdot 7\Rightarrow$$

$$AO_1=14$$

$$k_1=\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{14^2-4}}=k_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{48}}$$



Из подобия: $\frac{O_1X}{XO_2}=\frac{2}{3}\Rightarrow$

$$O_1X=\frac{2}{3}(7-O_1X)$$

$$O_1X=\frac{14}{5}=2{,}8$$

$$k_4=-\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{2{,}8^2-4}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{0{,}96}}=-k_3$$

Ответ:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4: $\sqrt{\Pi}$.к. $k = -\frac{1}{3a} \Rightarrow a = -\frac{1}{3k} \Rightarrow$

(продолжение

$\Rightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{1}{3k_1}\right) \cup$

$\cup \left(-\frac{1}{3}k_1, -\frac{1}{3}k_3\right) \cup \left(-\frac{1}{3}k_1, -\frac{1}{3}k_2\right) \cup \left(-\frac{1}{3}k_2, +\infty\right)$

Ответ:

$a \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{48}}{3}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{48}}{3}, -\frac{\sqrt{0,96}}{3}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{\sqrt{0,96}}{3}, \frac{\sqrt{48}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{48}}{3}, +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4: $\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ ((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$

~~(1) – ∀ прямая с угл. коэф-ом $= -\frac{1}{3a}$~~

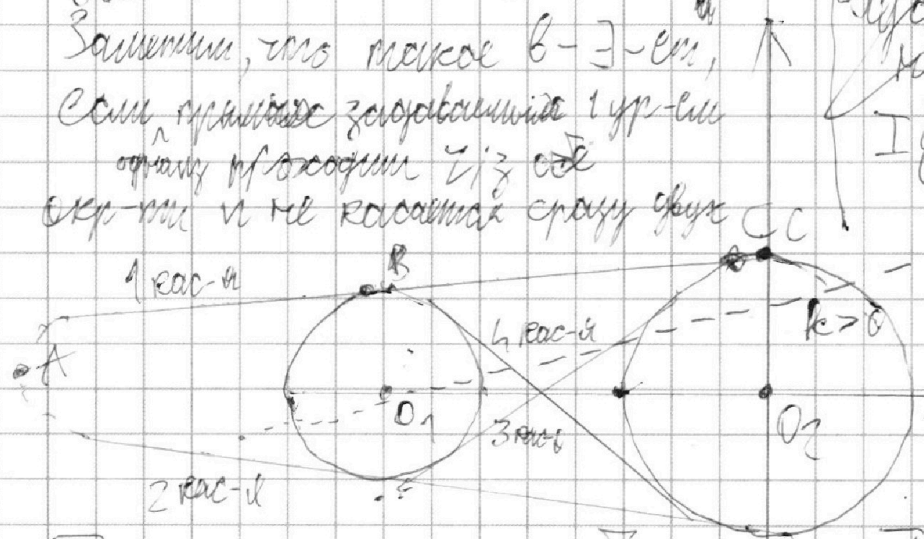
(1) $\Rightarrow -\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}=y$ – прямая с $k=-\frac{1}{3a}$,

а т.к. b – ∀-е, то это произвольная прямая

(2): $\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \text{ – окр-ть с центром в } (-7,0) \text{ и } R=2 \\ x^2+y^2=9 \text{ – окр-ть с центром в } (0,0) \text{ и } R=3 \end{array}\right.$

Построим эти окр-ти:

Заметим, что такое b – $\exists$-ется, сама прямая задаваемая 1 ур-ем обязательно проходит $\exists$ из окр-ти и не касается сразу двух



~~Пусть l – и касательную задаем a_i:~~

~~I сл: $a_1 a_2<0 \Rightarrow -\frac{1}{3a_1}>0 \Rightarrow -\frac{1}{3a_2}<0$~~

~~II сл: $a_1 a_2>0 \Rightarrow -\frac{1}{3a_1}<0 \Rightarrow -\frac{1}{3a_2}<0$~~

Тогда прямая может быть при $k>0$ лишь ~~прямой по к~~ между 1 и 3 касательной (по k), лишь круче 1 ~~лишь между~~

Аналогично с отр-ным $k<0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 (продолжение

~~Заметим, что $g(-a)=f(a) \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow b_1 = -a_2$, $b_2 = -a_1$, $a_1 + b_2 = 0$ $\Rightarrow \log_7 6x_2 + \log_7 y_1 = 0$~~

~~$6x_2 y_1 = 1 \Rightarrow x_2 y_1 = \frac{1}{6}$~~

~~$\log_7 6x_1 + \log_7 y_2 = 0$~~

~~$6x_1 y_2 = 1 \Rightarrow x_1 y_2 = \frac{1}{6}$~~

Заметим, что $f'(a) = 4a^3 + \frac{3,5}{a^2} = 0$ при

$a_0 = -\sqrt[5]{\frac{3,5}{4}} < 0$

Заметим, что при $a>0$ $f(a)$ монотонна и возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ $\Rightarrow$ имеет 1 корень. При $a=0$ $f(a)$ ~~убывает~~ убывает

~~при a от $(-\infty, a_0)$ и возрастает при $a \in (a_0, 0) \Rightarrow$ если $f(a_0)$, то~~

При $a<0$ $f(a) > 4 > 0 \Rightarrow$ корней не имеет.

Сл-но $f(a)$ имеет один корень, и т.к. $f(a) = g(-a)$, то $g(b)$ тоже, причем их $\Sigma = 0$

Тогда $\log_7 6x + \log_7 y = \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5:

$$\begin{cases} \log_7^4 6x - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^3) - 4 \\ xy = 7 \end{cases}$$

ОДЗ:
$y \neq 1$
$x > 0$
$x \neq \frac{1}{6}$
$y > 0$

$a \neq 0, b \neq 0$

$\log_7 6x = a \Rightarrow a^4 - \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{a} - 4$

$\log_7 y = b \Rightarrow b^4 + \frac{6}{b} = \frac{3}{2b} - 4$

$\log_{6x} 7 = \frac{1}{a}$

$\log_y 7 = \frac{1}{b}$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0 \Rightarrow f(a) = 0 \\ b^4 + \frac{3,5}{b} + 4 = 0 \quad g(b) = 0 \end{cases}$$

$f(a) - f(b) = a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 - b^4 - \frac{3,5}{b} - 4 =$

$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2) + \frac{3,5(a+b)}{ab} = 0$

$(a+b)$

$f'(a) = 4a^3 + \frac{3,5}{a^2} = 0 \Rightarrow$ один экстремум $a = \sqrt[5]{\frac{3,5}{4}} \Rightarrow$ т.к.

$f(-\frac{1}{2}) < 0$, а $a^4 > \frac{3,5}{a}$ при больших a,

то у $f(a)$ ровно 2 корня $a_1 < a_2$

Аналогично у $g(b)$ - 2 корня $b_1 < b_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6. Заметим, что ГМТ точек $B(x_2, y_2)$ отн-но $A(x_1, y_1)$ таких, что $4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$ – ромб с диагоналями 10 и 40 перпендикулярными осям Ox. На его границе, содержащая $\frac{40}{\left(\frac{4}{1}\right)} \cdot 4 =$

$= 40$ различных точек B с целочисленными координатами

Заметим, что 2 стороны ромба $\parallel$ 2 сторонам $\parallel$-ма т.к. $\frac{4}{1} = \frac{68}{17}$ – обозначим их за I и III

~~Заметим, что длина стороны I-ма $\geq 10 \times = 19$ т.к. $10 < 19 < 2 \cdot 10$. Тогда одно либо I, либо III сторона полностью выйдет за пределы параллелограмма, а кол-во в нем можно будем посчитать как одна (мб не полностью будет внутри). Тогда~~

~~$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$:~~

~~$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 68 \\ \frac{4x_1}{4} + y_1 \le -\frac{1}{4}(x + 19) \\ 0 \le x_2 \le 68 \\ -\frac{1}{4}x_2 \le y_2 \le -\frac{1}{4}(x_2 + 19) \end{cases}$~~ – т.к. внутри ромба

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6:

$$\cancel{\left[\begin{array}{l} y_2 = -\frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10) \\ y_2 = -\frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10) \\ y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1 + 10) \\ y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10) \end{array}\right.}$$

ур-я сторон ромба

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

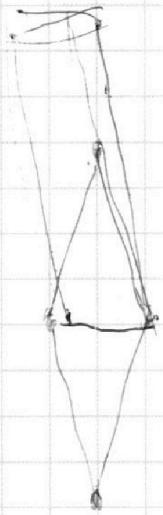
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

$$\begin{cases} y_1 > -\frac{1}{4}x_1 \\ y_1 < -\frac{1}{4}x_1 + 19 \\ 0 < x_1 < 68 \\ \left[\begin{array}{l} y_2 = -\frac{1}{4}x_2 - 40 \\ y_2 = -\frac{1}{4}x_2 + 40 \end{array}\right. \end{cases}$$



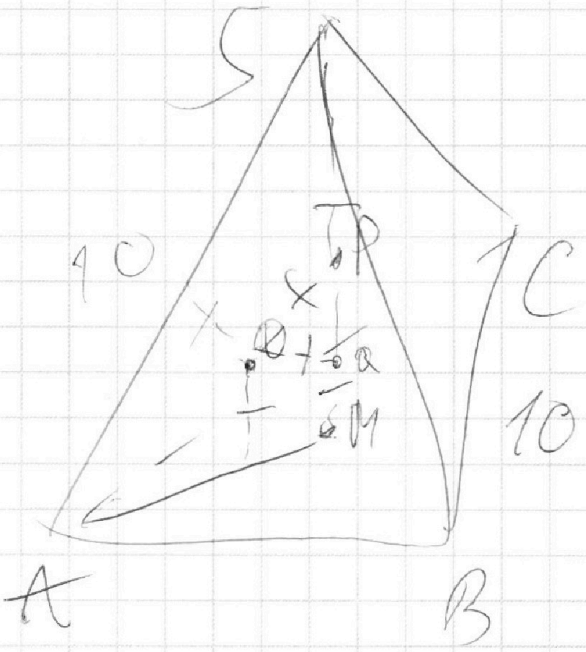
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

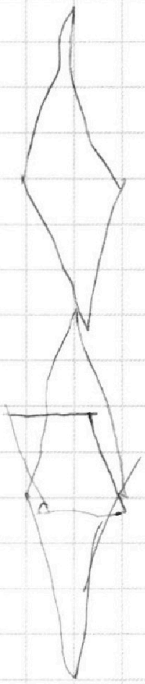
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

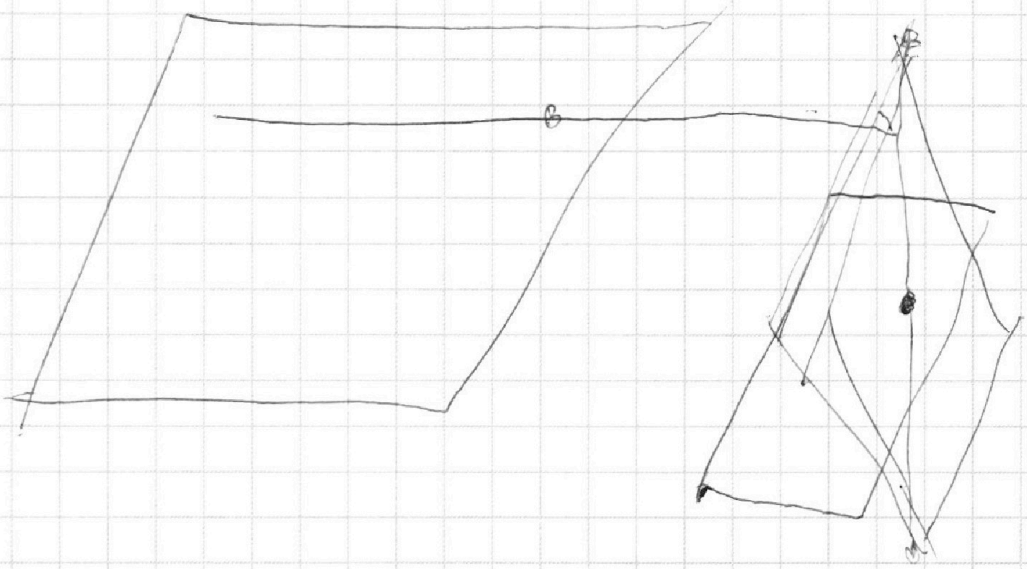
МФТИ

Черновик





№6.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$90-\alpha-(90-\beta+\alpha)=\beta-\alpha$

$(a_1+a_2)(a_1^2+a_2^2)+\frac{3,5}{a_1a_2}$

$a^5+4a-3,5=0$

$\frac{68}{17}=4$

b_1+a_1

$b_1a_2=0$

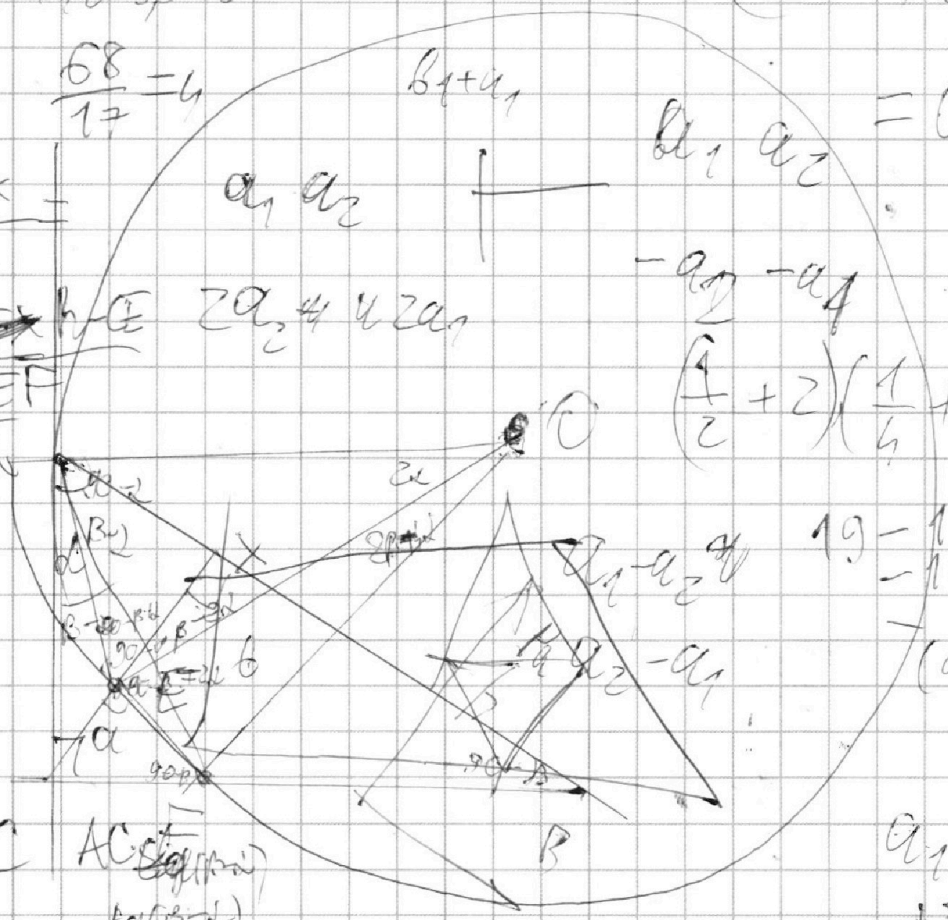
$\frac{AX}{AC}=\frac{EF}{AC}$

a_1a_2

$-a_2-a_1$

$2a_2+4$ и $2a_1$

$\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{4}+b_1\right)+\frac{3,5}{2}$



$19-10$

-11

a_1-a_2

a_2-a_1

(a_1-a_2)

C $AC\frac{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}{\operatorname{tg}\beta}$

$a_1^4-a_2^4-$

$+3,5(a_1-a_2)=0$

a_1a_2

$F(\alpha)=\alpha^4-\frac{3,5}{\alpha}+4=0$

$90-\alpha+x=180-\beta+\alpha$

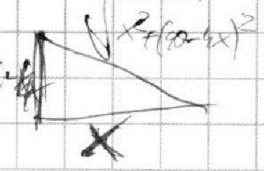
$x=90-\beta+\alpha$

$\begin{cases}a_1^4-\frac{3,5}{a_1}+4=0\\ a_2^4-\frac{3,5}{a_2}+4=0\end{cases}$

$x_2-x_1+y_2-y_1$

$\frac{CE}{a}=\frac{EF}{AB}$

$\sqrt{0,3}\,EF=\alpha$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(a^2b-ab^2)(a^2+b^2)=a^4b-a^3b^2+a^2b^3-ab^4-3,5$

$a+b=\log_{\frac{1}{7}}6xy=$

$x(x-2b)($

b_1+a_2 — ответ 1

b_2+a_1

$ab(a^2+b^2)$

$a^4-b^4-\frac{3,5}{a}+\frac{3,5}{b}=0$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)-$

$\frac{1}{2}\ 0,3x^2\cdot\sqrt{0,3}$

$\frac{3,5(a+b)}{ab}=0$

$(a+b)($

$a_1=$

a_2

$6-\frac{5}{2}=3,5$

$\log_{\frac{1}{7}}6x$

$\log_7 6x=a$

$(a+b)(a-b$

$a^4-\frac{2}{a}=\frac{3}{2a}-4$

$ab(a-b)(a^2+b^2)=$

$4a^3+\frac{3,5}{a^2}=0$

$a^4-\frac{3,5}{a}+4=0$

$a^5-3,5=0$ $a^5+4a-3,5=0$

$\frac{5}{6}ax=2$ $b^4+\frac{6}{b}=\frac{5}{2b}-4$

$1,96-$

$\begin{cases} a^4-\frac{3,5}{a}+4=0 \\ b^4+\frac{3,5}{b}+4=0 \end{cases}$

черновик

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

№1: $ab : 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

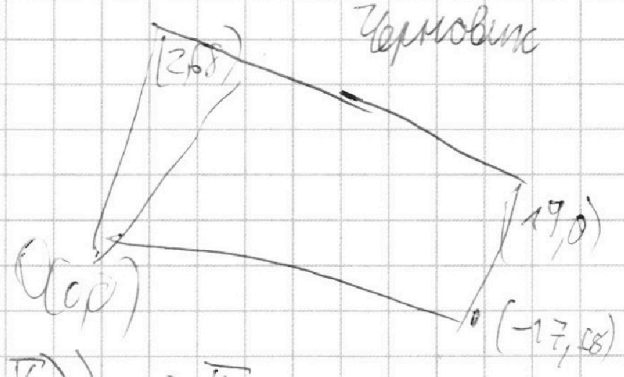
$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$

$\frac{4}{5}x = \frac{18\pi}{10}$

$= \frac{9}{5}\pi$

$\frac{9}{4}\pi - \frac{\pi}{2} =$



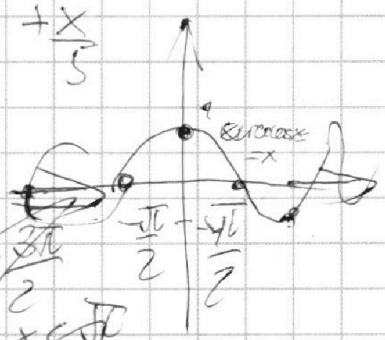
№3: $\arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$\frac{4}{5}x = \frac{8}{5}\pi$

$\frac{4}{5}x =$

$\pi - \frac{\pi}{2} \le \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5} \le \frac{5\pi}{2}$

$\frac{\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{3\pi}{2}$



$\arccos \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{3\pi}{10} + x \le \frac{\pi}{2}$

$3 + 2\pi =$

$\frac{4}{5}x =$

$\frac{\pi}{2} - x$

$-\frac{9}{5}\pi \le \frac{\pi}{5}$

I сл: $x - \frac{\pi}{2} \le 0$

$x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$

$3 - 15$

$x - \frac{\pi}{2}$

$-\frac{13}{10}\pi \le x - \frac{\pi}{2} \le -\frac{3\pi}{10}$

$\arccos(\cos 3\pi) = 0$

$0 \le \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \le \pi$

$\frac{4x}{5} = \frac{3\pi}{10}$

$-\frac{13}{10}\pi$

$x \ge -\frac{3\pi}{2}$

$\frac{6}{5}$

$-\frac{3\pi}{10}$

$6\pi \ge x \ge -4\pi$

$\frac{7}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = 3\pi$

$x = 2\pi$

$\arccos\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$

$\frac{x}{5} \le \frac{7\pi}{10}$

$\arccos\cos x = x + 2\pi z = -\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$= \arccos(0) =$

$= \frac{\pi}{2}$

$x \le \frac{7\pi}{2}$

$\frac{4x}{5} + 2\pi z = -\frac{3\pi}{10}$

$x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\cos 0\pi)) = \pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

N1:

$a = 5^x$

$b = 5^y$

$c = 5^z$

$x_1 + x_2 + x_3 =$

$= 14 + x_2$

$x_3 \geq 13 - x_2$

$x_1 + 13 - x_2 \geq 14$

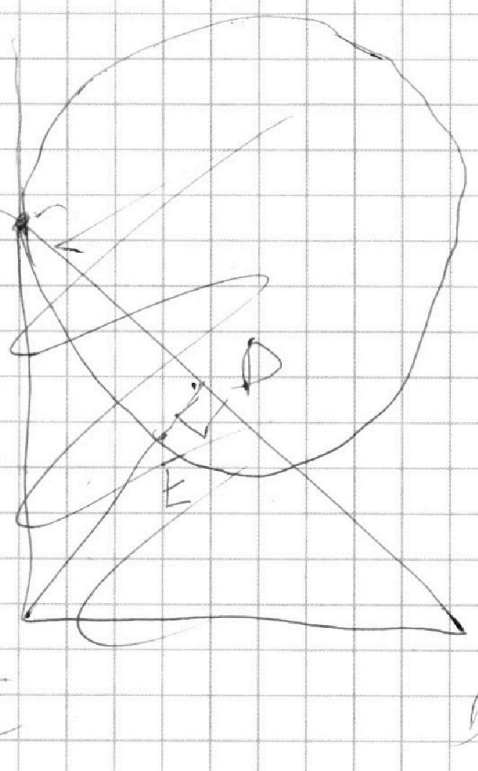
$x_1 \geq 1 + x_2$

$x_2 \geq 3$

$x_2 = 3 \Rightarrow$

$x_1 = 4$

$x_3 = 10.$



$\begin{cases} x + y \geq 14 \\ y + z \geq 18 \\ x + z \geq 43 \\ x + y + z = max \end{cases}$

$43 - z + y \geq 14$

$y \geq 14 - 43 + z$

$2z + 14 - 43 \geq 18$

$z \geq \frac{7}{2} =$

$= 24$

$z = 24 \Rightarrow$

$x = 43 - 24 =$

9 $((x^2+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

$y_2 = -5$

$y_1 = 6$

$y_3 = 11$

$x \geq 14 - y$

$14 - y + z \geq 43$

$\frac{4}{5}x = -\frac{1}{5}\pi$

$x = -\pi$

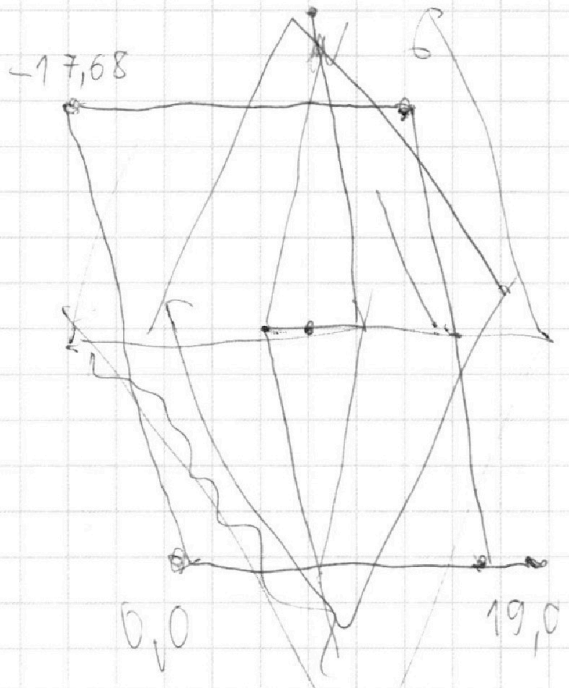
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик.



$\sqrt{\ }$

$$a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0$$

$$(a+b)^4 - \frac{3,5}{a+b} + 4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 < 17,8 \\ x_1 > 0 \\ y_1 > -4x \\ y_1 < -4x + 19 \end{cases}$$

$$4a^3 + \frac{3,5}{a^2} = 0$$

$$a = -\sqrt[5]{\frac{3,5}{4}}$$

$$(\sqrt{1,3})^2 = 0,3$$

$$\frac{(\sqrt{1,3}(1,3))^2}{0,39} = \frac{1,3^2}{0,3}$$

$$\sqrt[5]{\frac{4 \cdot 3,5}{3}} +$$

$$1 - 3,5 + 4$$

$$\in \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$$

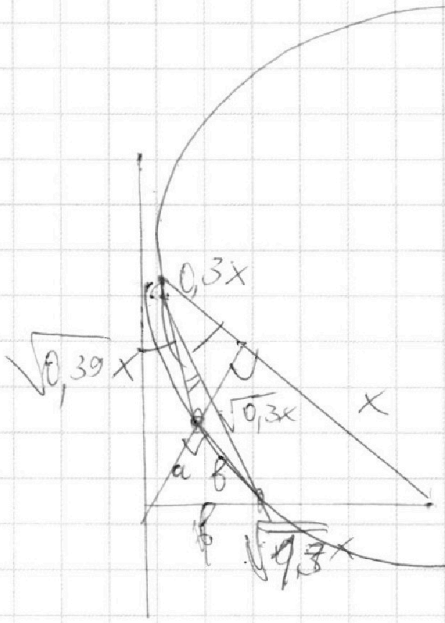
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



$$\frac{a}{\sqrt{0,3x}} = \frac{в}{\cancel{\sqrt{0,3x}}\ x}$$

$$\frac{\sqrt{0,3x} - a}{\cancel{\sqrt{0,}}}$$

$$\frac{\sqrt{\cancel{a^2 \cdot 0,09}\ 1,09a^2}}{\sqrt{0,39x^2}} = \frac{\sqrt{0,3x - a}}{0,3x}$$

$$\frac{1,09a^2 \cdot 0,09}{0,39} =$$

$$\frac{0,3x \cdot \sqrt{0,3x}}{\cancel{a}\ \cancel{\sqrt{0,}}\ в^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

№ 1

$$\frac{x}{-7b} + \frac{y}{-\frac{7b}{3a}} + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{3a}x + 7b = y$$ — прямая

$$C\ k = -\frac{1}{3a}$$

$-17{,}68$

$(2{,}68)$

68

19

$19{,}0$

$\frac{7b}{3a}$

$-7b$

$3a$

$-\frac{7b}{3a}$

19

288

A

$\sqrt{0{,}3x}$

O

D

x

C

F

B

$a_1 = 68 \times 68$

544

408

4624

$\sqrt{4624} =$

72×72

144

504

5184

3

0

3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

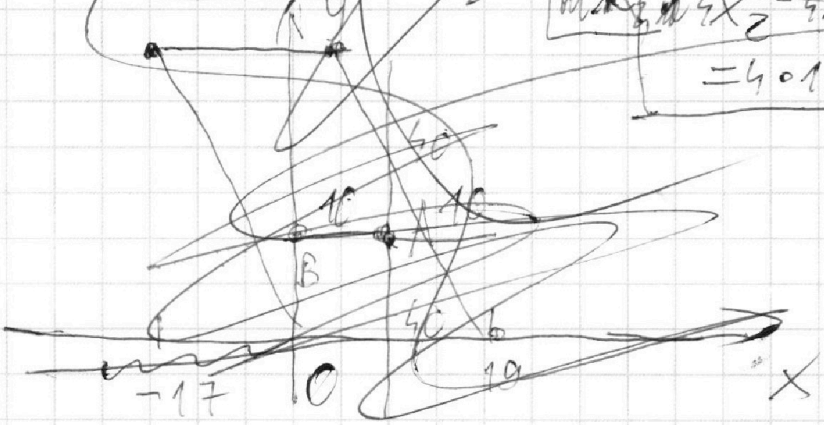
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~№6: Заметим, что мн-во точек, отн-но $A(x_1, y_1)$ и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ — выглядит как ромб с отн-ем диагоналей 40 и 10. Заметим, что высоты пар-лиграмма равны 8 и 9. Заметим, что наименьшее расстояние между двумя точками по оси Ox в ~~ромбе~~ равно 19~~

~~Заметим, что расстояние м/у двумя т-ми по оси $Ox = 19 \le 10 \Rightarrow$ в ромб выборе x точки A будет существовать ровно одна B такая, что $AB = 10$, $AB \parallel Ox \Rightarrow$ точки A и B подходят м.к. $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 4 \cdot 10 + 0 = 40$~~



Черновик