МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0$;
$\alpha_1 = 5, \beta_1 = 3, \gamma_1 = 9$.

Для минимальной $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = 28$ — тоже есть решение; $\alpha_2 = 8$; $\beta_2 = 7$; $\gamma_2 = 13$.

В то же время, т.к. $\alpha_3+\beta_3 \geq 39$, и $\beta_3 \geq 0$,

$\Rightarrow \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 39$; Пусть она $= 39$;

$\alpha_3 = 17$; $\beta_3 = 0$; $\gamma_3 = 22$.

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$, при

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$, $b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0$, $c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{22}$

Ответ: $abc(\min) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$a \cdot b : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ (1)

$b \cdot c : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$ (2) ; Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot d_1$,

$a \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$ (3) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \in \mathbb{Z}$, $d_1 \in \mathbb{N}$.

$b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot d_2$, $d_2 \in \mathbb{N}$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}, \geq 0$

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot d_3$, $d_3 \in \mathbb{N}$.

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{Z} \geq 0$.

Тогда, из условий (1) $\Rightarrow$: $\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases}$

Из условия (2): $\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases}$; и из (3): $\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$.

Тогда: $(\alpha_1 + \beta_1) + (\beta_1 + \gamma_1) + (\alpha_1 + \gamma_1) \geq 8 + 12 + 14 = 34$

$(\alpha_2 + \beta_2) + (\beta_2 + \gamma_2) + (\alpha_2 + \gamma_2) \geq 14 + 20 + 21 = 55$

$(\alpha_3 + \beta_3) + (\beta_3 + \gamma_3) + (\alpha_3 + \gamma_3) \geq 12 + 17 + 39 = 68$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 27{,}5$; т.к. $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{Z} \geq 0 \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 34$.

Тогда, минимальная $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 17$ — и такая есть

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot d_1 d_2 d_3 \geq$

$\geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \cdot d_1 d_2 d_3 \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$.

Это возможно при $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$

$b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$c = 2^9 \cdot 3 \cdot 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow k = \frac{1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{(\sqrt{14}-2)}}{1 - \frac{\sqrt{14}}{7}}.$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{CDD}} = \frac{k^2}{1} \Rightarrow S_{CEF} = k^2 S_{CDD},$$

$$S_{CDD} = \frac{5}{7} S_{ABC} \Rightarrow$$

$$S_{CEF} = \frac{5}{7} k^2 S_{ABC}. \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{7}{5k^2}.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{7}{5 \cdot \frac{(1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{\sqrt{14}-2})^2}{(1-\frac{\sqrt{14}}{7})^2}} = \frac{7\left(1 - \frac{2\sqrt{14}}{7} + \frac{\sqrt{14}}{7}\right)}{5\left(1 - \frac{2\sqrt{10}}{5}\sqrt{\sqrt{14}-2} + \frac{2}{5}(\sqrt{14}-2)\right)} =$$

$$= \frac{(7 - 2\sqrt{14} + 2)}{(5 - 2\sqrt{10}\sqrt{\sqrt{14}-2} + 2(\sqrt{14}-2))} = \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5 - 2\sqrt{10}\sqrt{\sqrt{14}-2} + 2(\sqrt{14}-2)}$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{9 - 2\sqrt{14}}{(5 - 2\sqrt{10}\sqrt{\sqrt{14}-2} + 2(\sqrt{14}-2))}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $FO^2 = (OB - FB)^2 + (BC - CH)^2$.

$CH = CF \cdot \cos\alpha = kx\sqrt{10} \cdot \frac{x\sqrt{55}}{7x} = kx\frac{\sqrt{550}}{7}$.

$r^2 = \left(r - \frac{kx\sqrt{140}}{7}\right)^2 + \left(x\sqrt{14} - \frac{kx\sqrt{550}}{7}\right)^2$

$r^2 = r^2 - \frac{2rkx\sqrt{140}}{7} + \frac{k^2x^2 \cdot 140}{49} + 14x^2 - \frac{2kx^2\sqrt{14}\cdot\sqrt{550}}{7} + \frac{k^2x^2 \cdot 550}{49}$.

$\frac{x(14+10k^2)}{2k\sqrt{10}} \cdot \frac{2kx\sqrt{140}}{7} = \frac{k^2x^2 \cdot 140}{49} + 14x^2 - 2kx^2 \cdot 10 + \frac{k^2x^2 \cdot 350}{49}$.

$\frac{x^2(14+10k^2)}{\ldots} \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} = k^2x^2 \cdot 10 + 14x^2 - 2kx^2 \cdot 10$

$(14+10k^2) \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} = 10k^2 - 20k + 14$.

$2\sqrt{14} + \frac{10}{7}\sqrt{14}k^2 = 10k^2 - 20k + 14$

$k^2\left(10 - \frac{10}{7}\sqrt{14}\right) - 20k + \left(14 - 2\sqrt{14}\right) = 0$

$D = 20^2 - 4 \cdot 10\left(1 - \frac{\sqrt{14}}{7}\right)\left(14 - 2\sqrt{14}\right) =$

$= 20^2 - 40\left(\sqrt{14} - 2\right)\left(\sqrt{14} - 2\right) =$

$= 20^2 - 40\left(\sqrt{14} - 2\right)^2 = 40\left(10 - \left(14 + 4 - 4\sqrt{14}\right)\right) =$

$= 40\left(10 - 18 + 4\sqrt{14}\right) = 40\left(4\sqrt{14} - 8\right) = 160\left(\sqrt{14} - 2\right)$.

$k = \frac{20 \pm 4\sqrt{10} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{14} - 2\right)}}{20\left(1 - \frac{\sqrt{14}}{7}\right)} = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{\left(\sqrt{14} - 2\right)}}{1 - \frac{\sqrt{14}}{7}}$.

Корни $k = \frac{1 + \frac{\sqrt{10}}{5}\sqrt{\left(\sqrt{14} - 2\right)}}{1 - \frac{\sqrt{14}}{7}} > 1$ – нет.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

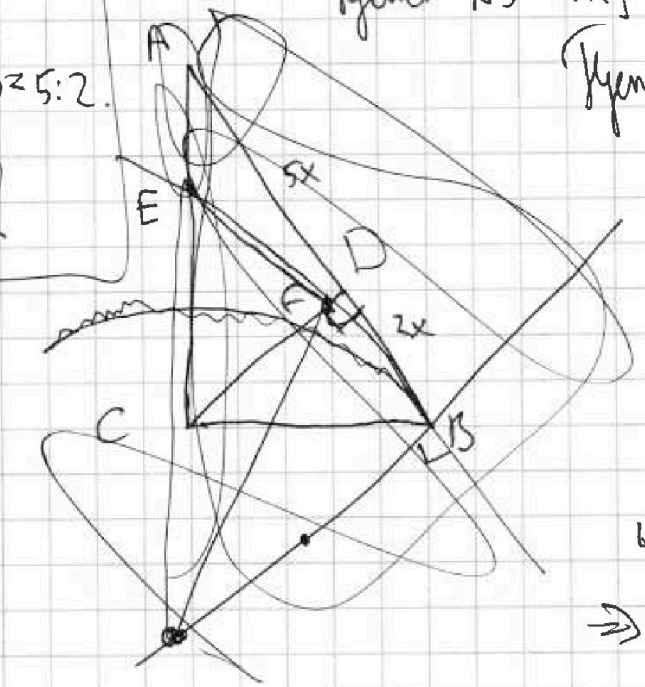
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ABSIFE

AD : DB = 5 : 2.

$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}}$ - ?



Пусть AB = 7x; AD = 5x, BD = 2x

Пусть $\angle\alpha = CAD$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{5x}$.

$\operatorname{tg}(\angle CBD) = \frac{CD}{2x}$.

$\operatorname{tg}(90-\alpha) = \frac{CD}{2x}$.

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{CD}{2x}$.

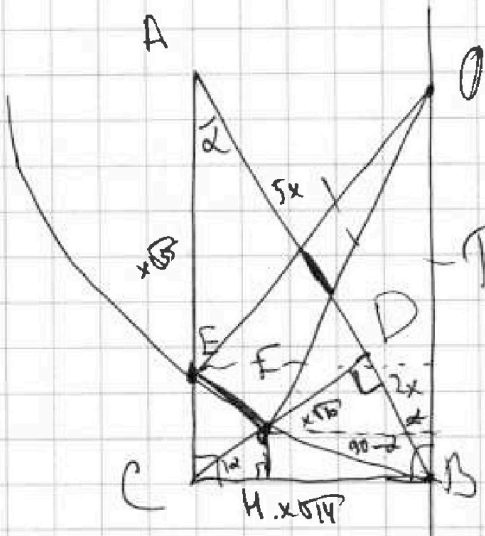
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 = \frac{CD^2}{10x^2}$.

$\Rightarrow CD = x\sqrt{10}$.

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{x\sqrt{10}}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

$\Rightarrow AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35}$

$BC = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = x\sqrt{14}$



Пусть $OB = r$; $\frac{CE}{CA} = k$.

$CE = kx\sqrt{35}$, $CF = kx\sqrt{10}$.

Пусть FH - высота из точки F на BC.

Пусть 1: $OE^2 = (OB - CE)^2 + (x\sqrt{14})^2$

$r^2 = (r - kx\sqrt{10})^2 + 14x^2$

$r^2 = r^2 - 2rkx\sqrt{10} + k^2x^2 \cdot 10 + 14x^2$

$2rkx\sqrt{10} = x(14 + 10k^2) \Rightarrow$

$r = \frac{x(14+10k^2)}{2k\sqrt{10}}$.

$FH = FC \cdot \sin\alpha = kx\sqrt{10} \cdot \frac{x\sqrt{14}}{7x} = \frac{kx\sqrt{140}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$4\pi = 10\arccos(\cos x) - 2x$

$2\pi = 5\arccos(\cos x) - x$.

$0 \le \arccos(\cos x) \le \pi$

$0 \le \frac{2\pi + x}{5} \le \pi$

$0 \le 2\pi + x \le 5\pi$

$-2\pi \le x \le 3\pi$.

Если $x \in [-2\pi; -\pi)$, то из вида графика $\cos x$,

$\arccos(\cos x) = x + 2\pi$.

$2\pi = 5(x + 2\pi) - x$; $2\pi = 4x + 10\pi$,

$x = -2\pi - \frac{\pi}{2}$.

Если $x \in [-\pi; 0)$, то из вида графика $\cos x$, и его четности,

$\arccos(\cos x) = -x$

$2\pi = -6x$, $x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$.

Если $x \in [0; \pi]$, то $\arccos(\cos x) = x$

$4x = 2\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$.

Если $x \in [\pi; 2\pi]$, то $\arccos(\cos x) = 2\pi - x$;

$2\pi = 10\pi - 5x - x$; $6x = 8\pi \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi$. - ✓.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и **не проверяется**. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Если $x \in (2\pi; 3\pi]$, то $\arccos(\cos x) = x - 2\pi$,

$2\pi = 5(x - 2\pi) - x$

$2\pi = 5x - 10\pi - x$. $4x = 12\pi$ $x = 3\pi - y$.

Ответ: $x \in \{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi; 3\pi\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$ $\cos\varphi_1 = \frac{\frac{16}{7}}{\frac{16\cdot 7}{7\cdot\sqrt{51}}} > \frac{\sqrt{51}}{7}$.

$\Rightarrow$ $\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$

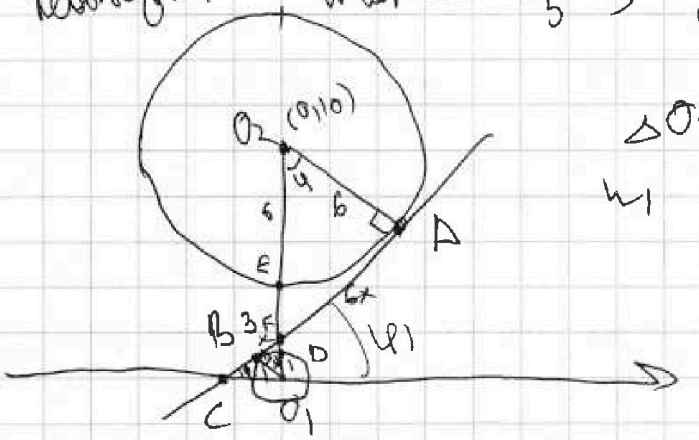
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть l_1 и l_2 — 2 внутренние кас-ые к ω;
ω пусть, l_1 — для ω, имеет
$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ $\cap$ ω = в 4-х точках,
необходимо чтобы $\frac{a}{3} > \operatorname{tg}\varphi_1$ или $\frac{a}{3} < -\operatorname{tg}\varphi_1$.



$\triangle O_1BD \sim \triangle O_2AF$,

$\frac{AF}{BF} = \frac{O_2F}{O_1F} = \frac{6}{1}$.

$O_2F + O_1F = 10$, $\Rightarrow$

$\frac{O_2F}{10 - O_2F} = \frac{6}{1}$.

$O_2F = 60 - 6O_2F \Rightarrow O_2F = \frac{60}{7}$; $O_1F = 10 - \frac{60}{7} = \frac{10}{7}$.

$\Rightarrow F\left(0; \frac{10}{7}\right)$. Сделаем спецрис.,

$\triangle CO_1F$ тоже $\sim \triangle O_2AF$. $\Rightarrow$

$\frac{CF}{O_2F} = \frac{FO_1}{AF} = \frac{CO_1}{AO_2}$.

$\frac{CF}{\frac{60}{7}} = \frac{\frac{10}{7}}{6x} = \frac{CO_1}{6}$. $\quad \frac{CF}{\frac{10}{7}} = \frac{\frac{10}{7}}{x} = CO_1$.

$CF = \frac{100}{49x}$; $CO_1 = \frac{10}{7x}$.

$CO_1^2 + FO_1^2 = CF^2$; $\quad \frac{100}{49x^2} + \frac{100}{49} = \frac{100^2}{49^2x^2}$

$\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{100}{49} \cdot \frac{1}{x^2}$ $\quad 1 = \frac{51}{49}\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{51}{49}$,

$x = \frac{\sqrt{51}}{7}$. $\Rightarrow CO_1 = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{x} = \frac{10}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{51}} = \frac{10}{\sqrt{51}}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

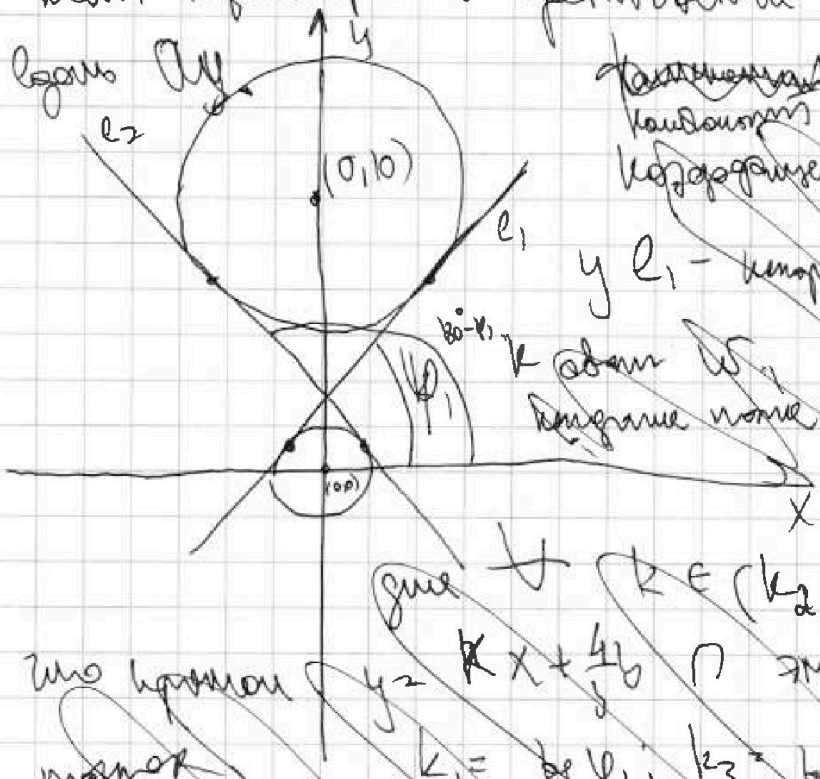
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b \geq 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2\cdot y\cdot 10+100-36)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3} \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-10)^2-36) \geq 0 \end{cases}$$

Второе ур-ие задает 2 окр.: 1-ую с центром в (0,0), и радиусом 1, и 2-ую – с центром (0; 10) и радиусом 6. Параметр a задает сем-во прямых с угловым к-том $\frac{a}{3}$, а параметр b задает всевозможные сдвиги этой прямой вдоль Oy.



Коэффициенты наклонов
Коэффициент угловой ~~наклонов~~ ~~коэффициент~~ ℓ_1 – которая образует φ_1 с осью Ox, и наиб-ую ℓ_2 которая тоже образует φ_1 с осью Ox.

Тогда $\forall\, k \in (k_2; k_1)$ $\exists\, b$: что прямая $y = kx + \frac{4b}{3}$ при этом b будет

$k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$; $k_2 = \operatorname{tg}(180°-\varphi_1) = -\operatorname{tg}\varphi_1$;

$\Rightarrow \frac{a}{3} \in (-\operatorname{tg}\varphi_1; \operatorname{tg}\varphi_1)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_5^4(2x) - \log_5^3(2x)\log_5 y + \log_5^2(2x)\log_5(y) - \log_5(2x)\log_5^3(y) +$
$+ \log_5^4 y + 3 = 0$, где $a = \log_5 2x$, $z = \log_5 y$ умножим (1)

$(a^5 + b^5) + 3(a+b) = 0$.

$a^5 + 3a = -(b^5 + 3b)$.

$f(x) = x^5 + 3x$

$-f(x) = f(-x)$

Ср-я строгая, $f'(x) = 5x^4 + 3 > 0$

$\Rightarrow$ f-ция строго возрастающая, $\Rightarrow$ для неё ~~$\forall$~~ x $\exists!$ y:

$f(x) = -f(y)$, и в силу неотрицат будущим, что $y = -x$.

$\Rightarrow \log_5(2x) + \log_5 y = 0$,

$\log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1$, $xy = \frac{1}{2}$.

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_5^4(2x) + 3\log_{2x}5 = \log_{(2x)^3}5^{-4} - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}5^{-1} - 3$

Заметим, что $2x>0,\ 2x\neq 1,\ (2x)^3>0,\ (2x)^3\neq 1,$
$y>0,\ y\neq 1,\ y^3>0,\ y^3\neq 1,$
т.к. $x>0,\ x\neq\frac{1}{2},\ y>0,\ y\neq 1.$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3.$

$\log_5^6(2x) - 3 = \frac{4}{3} - 3\log_5 2x$

$\log_5^5(2x) + 3\log_5 2x - \frac{13}{3} \geq 0 \quad (1)$

$\log_5^4(y) + \frac{4}{\log_5 y} \geq -\frac{1}{3\log_5 y} - 3$

$\log_5^5(y) + 4 + \frac{1}{3} + 3\log_5 y \geq 0$

$\log_5^5(y) + 3\log_5 y + \frac{13}{3} \geq 0 \quad (2)$

Сложим (1) и (2):

$(\log_5^5(2x) + \log_5^5(y)) + 3(\log_5(2x) + \log_5(y)) + \frac{13}{3} - \frac{13}{3} \geq 0 \quad (3)$

$(\log_5(2x) + \log_5(y))(\log_5^4(2x) - \log_5^3(2x)\log_5 y + \log_5^2(2x)\log_5^2 y - \log_5(2x)\log_5^3(y) + \log_5^4 y + 3) \geq 0$

$\left[\begin{array}{l}\log_5(2xy) \leq 0, \\ (\dots) \geq 0\end{array}\right.$ $\quad 2xy \geq 1 \Rightarrow xy \geq \frac{1}{2}.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Будем замечать, что ур-ие пр-й $OP: y+5x=0$, а ур-ие пр-й QR : $y+5x-90=0$.

Обозначим $l_{ij} = y+5x-i \vdots 9$

Тогда $l_j - l_i = 5x_j + y_j - j - 5x_i - y_i + j$

В то же время $5x_j - 5x_i + y_j - y_i = 45 \Rightarrow$

$9 = l_j - l_i = 45 - (j-i) \Rightarrow (j-i) = 45 -$

$-$ и $+2$ точки на точках пр-х содержат ≥ 1 корду. Заметим, что на одной такой пр-й $= 17$ точек с целыми координатами.

$\Rightarrow$ для того l_{45} и l_{46} - 17 т, l_{44} и l_{46} - 17, ..., l_{45} и l_{90} - 17 т. $\Rightarrow$

Всего точек $46 \cdot 17 = 460 + 280 + 42 = 460 + 322 = 782$.

Ответ: 782 пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$O(0,0)$
$P(-16,80)$
$Q(2,80)$
$R(18,0)$.

$5(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\geq 45$.

Пусть $t=x_2-x_1$, $z=y_2-y_1$.

$z=45-5t$, при $t\in[-34;34]$, $z\in[-80;80]$.

$-80\leq 45-5t\leq 80$

$80\geq 5t-45\geq -80$

$16\geq t-9\geq -16$

$25\geq t\geq -7$

~~Пусть $t=25$: $z=45-5\cdot 25\geq 45-125=-80$~~

~~Т.е. если $A(x_1;y_1)$, то $B(x_1+25;\ y_1-80)$~~

~~$\begin{cases}-16\leq x_1\leq 18\\ 0\leq y_1\leq 80\end{cases}$ $\begin{cases}-16\leq x_1+25\leq 18\\ 0\leq y_1-80\leq 80\end{cases}$ $\Rightarrow$ $-16\leq x_1\leq -7$ $y_1\geq 80$~~

~~Такие точки [10]~~

$B(x_1+t;\ y_1+45-5t)$.

В моем случае,

$-16\leq x_1+t\leq 18$, $-16\leq x_1\leq 18$ $OP\leq A\leq QR$

$0\leq y_1+45-5t\leq 80$ $0\leq y_1\leq 80$ $OP\leq B\leq QR$

$-16-t\leq x_1\leq 18-t$; $-16\leq x_1\leq 18$

$5t-45\leq y_1\leq 5t+35$ $0\leq y_1\leq 80$.

Ур-ие OP: $y=-5x$

Ур-ие QR: $y=-5x+90$.

~~$t\geq 0$, тогда $-16\leq x_1\leq 18-t$ $\Rightarrow$ тогда~~

$\Rightarrow$ $y_1\geq -5x_1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

а) (продолжение):

$$= \sqrt{\frac{24}{49} \cdot \frac{74}{49}} = \frac{\sqrt{24 \cdot 74}}{49} =$$

$$= \frac{\sqrt{16 \cdot 3 \cdot 37}}{49} = \frac{4\sqrt{111}}{49}.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{24^2 + 8^2 - 2 \cdot 24 \cdot 8 \cdot \frac{4\sqrt{111}}{49}} =$$

$$= 8\sqrt{3^2 + 1 - 6 \cdot \frac{4\sqrt{111}}{49}} =$$

$$= 8\sqrt{10 - 6 \cdot \frac{24\sqrt{111}}{49}}; \quad AB = 8\sqrt{10 + \frac{24\sqrt{111}}{49}}$$

Заметим, что AB_1 и BC могут быть помещены медианами.

Пусть $BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(16^2 + 8^2\left(10 + \frac{24\sqrt{111}}{49}\right)\right) - 8^2\left(10 - \frac{24\sqrt{111}}{49}\right)} =$

$$= \frac{8}{2}\sqrt{2\left(4 + 10 + \frac{24\sqrt{111}}{49}\right) - 10 + \frac{24\sqrt{111}}{49}} =$$

$$= 4\sqrt{18 + 3 \cdot \frac{24\sqrt{111}}{49}}.$$

Симметрично: $CC_1 = 4\sqrt{18 - 3 \cdot \frac{24\sqrt{111}}{49}}$.

$$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{18^2 - \frac{9 \cdot 24^2 \cdot 111}{49^2}} =$$

$$= 24 \cdot 12 \cdot 4\sqrt{6^2 - \frac{24^2 \cdot 111}{49^2}} = 24^3 \cdot 12\sqrt{1 - \frac{49 \cdot 111}{49^2}} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) (нед. вред.)

$= 24^2 \cdot 12 \sqrt{\frac{49^2 - 16 \cdot 111}{49^2}} =$

$= 24^2 \cdot 12 \sqrt{\frac{2401 - 1776}{49^2}} =$

$= 24^2 \cdot 12 \sqrt{\frac{25^2}{49^2}} =$

$= \frac{24^2 \cdot 12 \cdot 25}{49}$.

49×49: $441 + 196 = 2401$

$2401 - 1776 = 625$

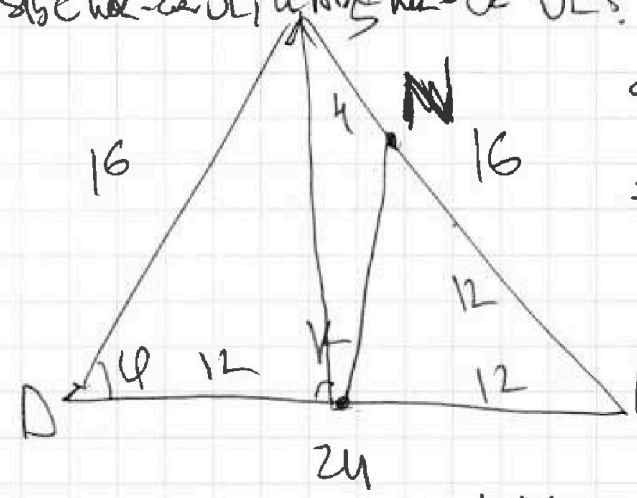
111×16: $666 + 111 = 1776$

Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{24^2 \cdot 12 \cdot 25}{49}$.

б) (продолжение): $\Rightarrow$ т.к. $SN = 4$, а $AN = 12$ (по),

$\Rightarrow N \in (SAA_1)$ (т.к. $\perp$ пл. $\Rightarrow \perp SAA_1$);

и $SN \cap KM = M$, $M \in KM$.



$\cos\varphi = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

$\Rightarrow KM^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12^2 \cdot \frac{3}{4} =$

$= 12^2 \left(2 - 2 \cdot \frac{3}{4}\right) =$

$S = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$KM = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

$\Rightarrow KM^2 = KO^2 + ON^2 - 2 \cdot KO \cdot ON \cdot \cos(\angle KON)$

$36 \cdot 2 = 50 - 50\cos(\angle KON) \Rightarrow \cos(\angle KON) = -22$,

$\cos(\angle KON) = -\frac{22}{50} \Rightarrow \angle KON = \arccos\left(-\frac{22}{50}\right) \Rightarrow$

$\angle$ мин. между $BC = \arccos\left(\frac{22}{50}\right)$. Ответ: $\arccos\left(\frac{22}{50}\right)$.

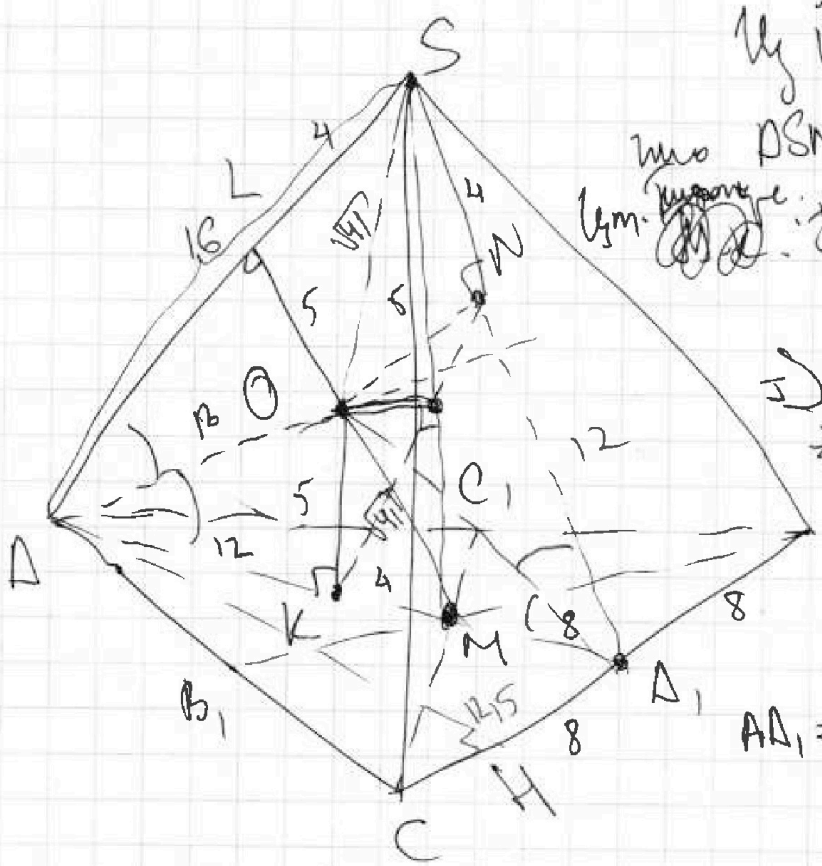
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) Найти BC, если $SN=4$, $RS=5$.



Из пункта а) известно, что $\triangle SNM$ – р/б – ч.

Т.к. $SN \perp (ABC)$, то $\triangle SNO$ – п/у. Тогда $OS=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

$\Rightarrow SL=\sqrt{41-25}=4$.

$\Rightarrow OL=12$;

$AK=12$,

$KM=4$,

$MD_1=8$ – т.к.

$AA_1=24$; $AH=12{,}5$.

$ON \perp (BCS)$, $OK \perp (ABC)$. $\Rightarrow \angle KON = 180^\circ - \angle(SCB;ABC)$,

т.е. $\angle(SCB;ABC)=180^\circ-\angle KON$

$AO=\sqrt{AK^2+OK^2}=13$.

В то же время, $AO=OA_1$ – т.к. OK – медиана и высота,

$\Rightarrow D_1O=13$; Тогда $A_1N=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

~~$\Rightarrow M \in (SBB_1)$ т.к. $SM+MA_1=$~~

Чтд. далее – на гр. сила.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

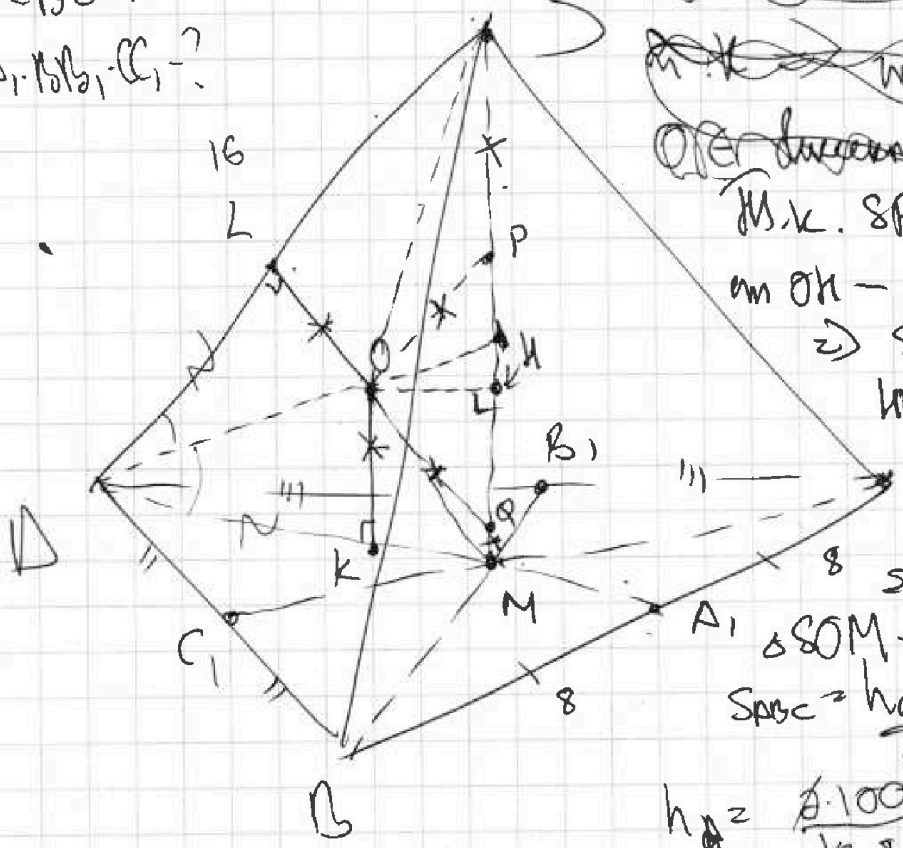
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$S_{ABC} = 100$

$SA = BC = 16$

d $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 - ?$



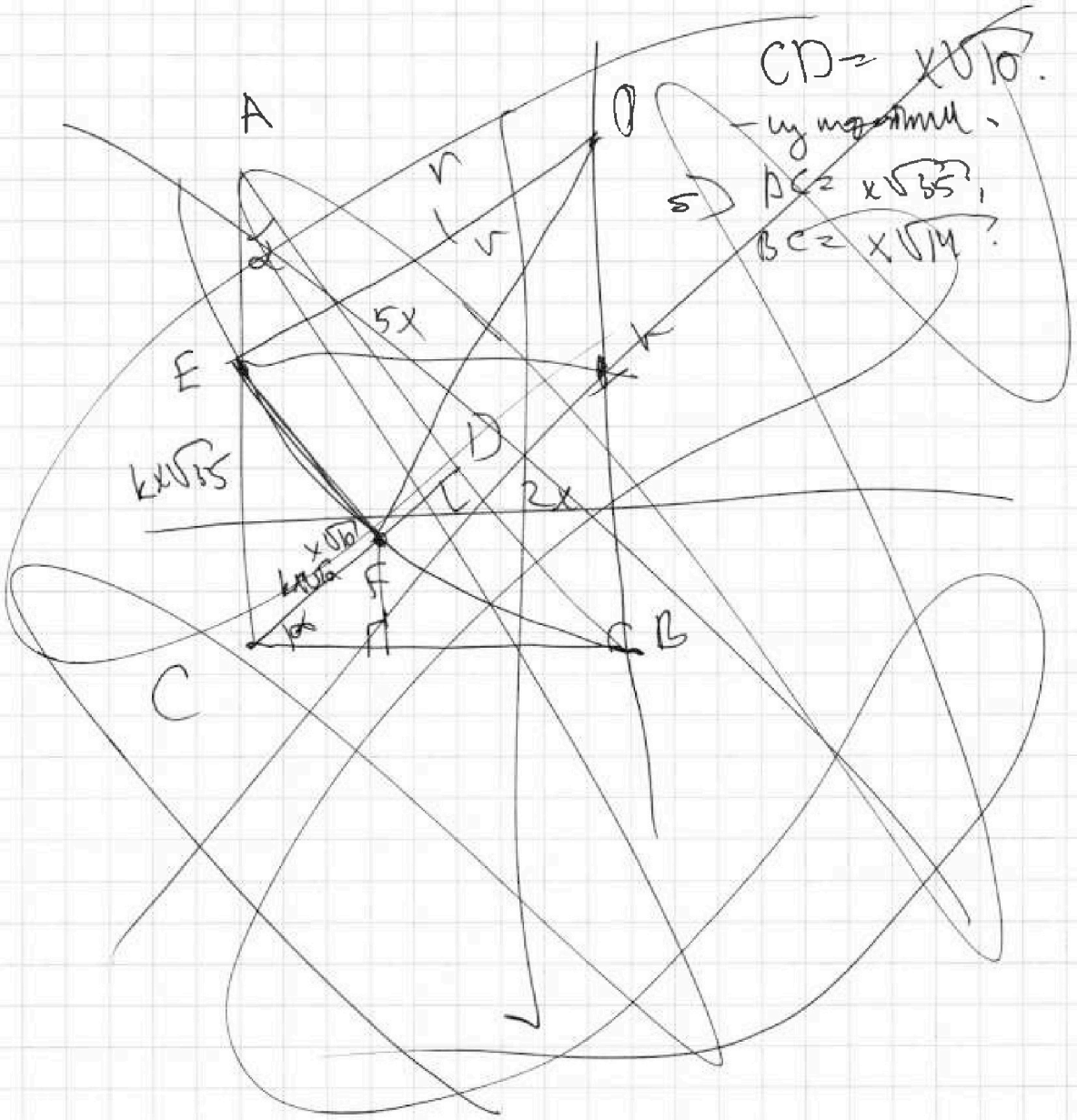
~~Рассмотрим плоскость~~ ~~(SAM)~~ ~~(SBC)~~ ~~(SAM)~~ ~~(SBC)~~ ~~(SAM)~~ ~~(SBC)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos x) \geq \pi - 2x$.

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -10\frac{\pi}{2} \leq 10\arcsin(\cos x) \leq 10\cdot\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$

$\begin{cases} \pi - 2x \geq -5\pi \\ \pi - 2x \leq 5\pi \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \leq 6\pi \\ 2x \geq -4\pi \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \end{cases}$.

Если $x \in [-2\pi; -\pi]$, то $\arcsin(\cos x) + \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2}$,

то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi) =$

$= \frac{\pi}{2} - x - 2\pi = -x - \frac{3\pi}{2}$.

$10\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right) \geq \pi - 2x$

$-10x - 15\pi \geq \pi - 2x$; $8x \leq -16\pi$; $x \leq -2\pi$ – у.

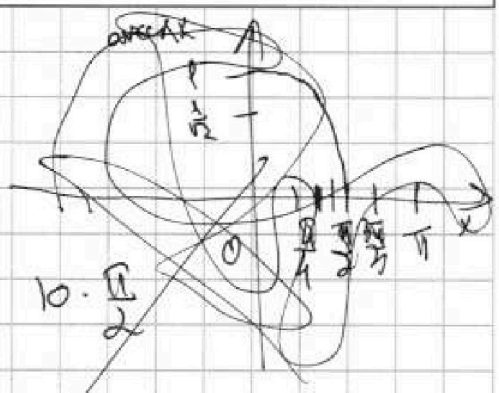
Если $x \in [-\pi; 0]$, то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) =$

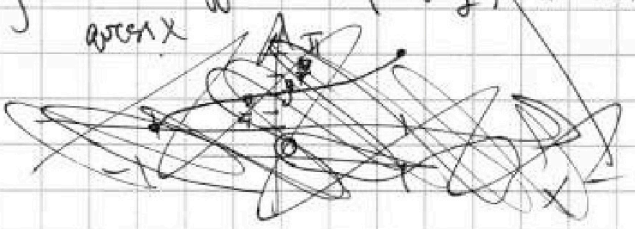
$= \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi)$.

Если $x \in [-\pi; 0)$, то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) =$

$= \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi) = -x - \frac{3\pi}{2}$; $\Rightarrow$ у нас не $10\left(-x - \frac{3\pi}{2}\right) \geq \pi - 2x$

$\Rightarrow$ 1 корень, и $x = -2\pi$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\max \frac{l}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$10\left(\frac{\pi}{2}-\arccos(\sin x)\right)=\pi-2x$$

$$5\pi-10\arccos(\sin x)=\pi-2x$$

$$4\pi=10\arccos(\sin x)-2x$$

$$7\pi=5\arccos(\sin x)-x$$

$$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$$

$$x=-2\pi+\frac{5\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4} \qquad x=-2\pi+\frac{6\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}. \qquad \arccos(0)=\frac{\pi}{2}.$$

$$c=\frac{\log_5 2x}{\log_5 y}.$$

$$\alpha=\log_5 2x+\log_5 y=\log_5 2xy.$$

$$\beta=\log_5 2x\log_5 y.$$

$$\log_5^2+\log_5^2=\alpha^2-2\beta$$

$$\log_5^4+\log_5^4=(\alpha^2-2\beta)^2-2\beta^2=\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2$$

$$c^4-c^3+c^2-c+1=0$$

$$c^2(c^2+1)-c(c^2+1)+1=0$$

$$(c^2+1)(c^2-c)+1=(c^2+1)c(c-1)+1$$

$$f(c)=c^4-c^3+c^2-c+1 \qquad f'(c)=4c^3-3c^2+2c-1$$

$$\log_5 2x\cdot\log_5 y.$$

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta+5\beta^2+3=0$$

$$\alpha\left(\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2-\beta(\alpha^2-2\beta)+\beta^2+3\right)=0$$

$$\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2-\beta\alpha^2+2\beta^2+\beta^2+3=0.$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $x \in [0; \pi]$: $\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$.

$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) 10 = \pi - 2x$.

$5\pi - 10x = \pi - 2x$, $8x = 4\pi$, $x = \frac{\pi}{2}$ - ур.

Если $x \in (\pi; 2\pi]$: $\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} + (x - \frac{3}{2}\pi) =$

$= x - 1{,}5\pi$ $10|x - 1{,}5\pi| = \pi - 2x$

$12x = 16\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$ - ур.

$10(x - 1{,}5\pi) = \pi - 2x$, $8x = 44\pi$, $x = \frac{44}{8}\pi = \frac{11}{2}\pi = 5{,}5\pi$ - ур.

Если $x \in (2\pi; 3\pi]$: $\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) =$

$= x - 1{,}5\pi$. $10(x - 1{,}5\pi) = \pi - 2x$ - имеет ед-ое

$10(4{,}5\pi - x) = \pi - 2x$ $45\pi - 10x = \pi - 2x$,

$8x = 44\pi$, $x = 5{,}5\pi$ - ур.

Ответ: $x \in \{-2\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi\}$. решения, $x = \frac{4}{3}\pi$.

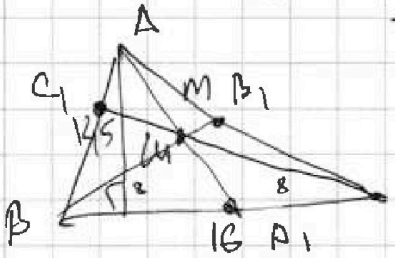
Ответ: $x \in \{-2\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi\}$.

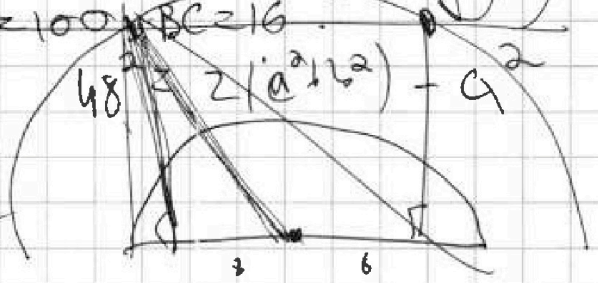
$\log_5^3(2x) \cdot \log_5 \frac{2x}{y} + \log_5(2x) \log_5^2 y \left(\log_5 \frac{2x}{y} + \log_5^2 y\right) =$

$= \log_5(2x) \log_5\left(\frac{2x}{y}\right) \left(\log_5^2(2x) + \log_5^2(y)\right) + \log_5^4 y$

$S = 100$ $BC = 16$

$48^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$



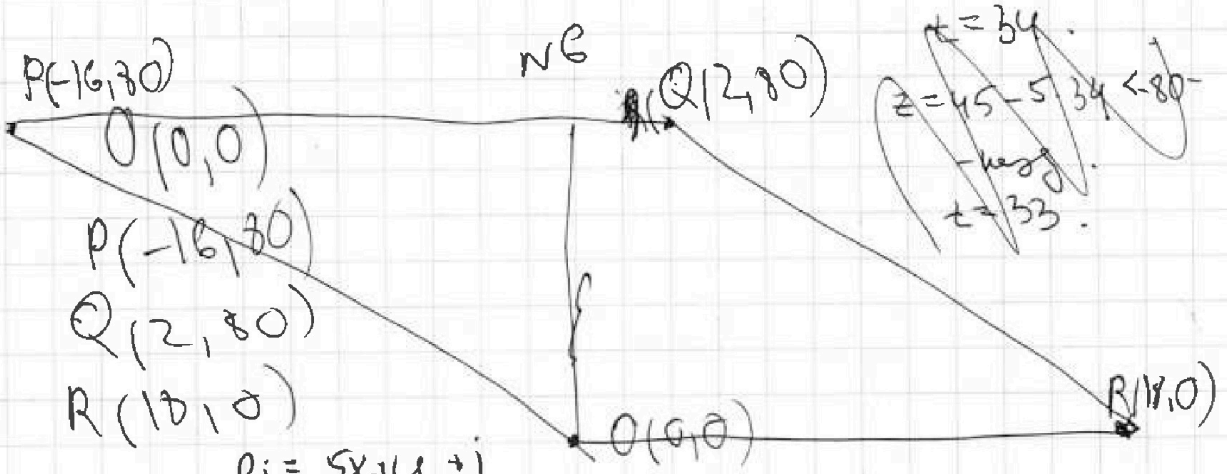


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



P(-16,30)
Q(2,80)
R(18,0)

$z = 45 - 5 \cdot 34 < -80$ — мало.
$t = 33$.

$t = 34$.

$R_i = 5x + y + i$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$B(x_2, y_2)$
$A(x_1, y_1)$.

$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$

$\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \cdot 16 \geq t - 9 \geq -16$

$\overline{AB} \cdot (\overline{5,1}) = 45$

$|AB| \cdot |5,1| \cdot \cos\varphi = 45$

$|AB| \cdot \cos\varphi = \frac{45}{\sqrt{26}}$

$|z_1, z_2| \cdot \cos\varphi = \sqrt{26}$.

$\overline{p}(5, y_2 - y_1)$.

$\overline{q}(x_2 - x_1, 1)$.

$\overline{p} \cdot \overline{q} = 45$

$-80 \leq 45 - 5z \leq 80$

$80 \geq 5z - 45 \geq -80$

$z = y_2 - y_1 = 45$

$t = x_2 - x_1$.

$5t + z = 45$

$z = 45 - 5t$.

$t \in [-34; 34]$.

$z \in [-80; 80]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \frac{4}{\log_5 2x\cdot p} - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} \le \frac{4}{3}\cdot\frac{l}{\log_5 2x} - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3}\cdot\frac{l}{\log_5 2x} + 3 \ge 0$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} \le -\frac{l}{3\log_5 y} - 3$

$\log_5^4 y + \frac{13}{3}\cdot\frac{l}{\log_5 y} + 3 \le 0$

$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) + \frac{13}{3}\left(\frac{l}{\log_5 2x} + \frac{l}{\log_5 y}\right) \le 0$

$\left(\log_5^2(2x) - \log_5^2(y)\right)\left(\log_5^2(2x) + \log_5^2(y)\right) = \frac{13}{3}\left(\frac{\log_5 2xy}{\log_5 2x \log_5 y}\right)$

$\log_5 \frac{2x}{y}\log_5 2xy\left(\log_5^2(2x) + \log_5^2(y)\right) = \frac{13}{3}\frac{\log_5^2 2xy}{\log_{2x}\log_5 y}$

$\alpha^5 + \beta^5 + 3(\alpha+\beta) = 0$

$(\alpha+\beta)(\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4 + 3) = 0$

$\alpha^5 + \beta^5 = 0 \cdot \alpha = -\beta \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^5 \cdot \alpha+\beta \ge 0$, тк

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^5 + 1 \ge 0$, тк

$\alpha^3(\alpha+\beta) + \beta^3(\alpha+\beta) + 3(\alpha+\beta) + \alpha^2\beta^2 \ge 0$

$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta) + 3 + \alpha^2\beta^2 \ge 0$

$\beta^5 - \alpha\beta^4 - \alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2 - \alpha^4\beta + 3\beta \ge 0$

$\alpha^5 + 3\alpha - \frac{13}{3} = 0$

$\beta^5 + 3\beta + \frac{13}{3} = 0$

$(\alpha+\beta)$

$\alpha^5 \to (\alpha^4\beta^3\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3\beta^2 + \alpha\beta^3\beta^3 + \beta^4) =$

$= -\beta^5 - 3\beta$

$\alpha^5 - \alpha^4 - \alpha^3\beta - \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 - \beta^4 =$

$= -\beta^5 - 3\beta$