



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1:4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
- [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot K_1$ ,  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot K_2$ ,  
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot K_3$ , где  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z} \geq 0$ , а

$K_i \in \mathbb{N}$  и  $\text{HCF}(K_i, 30) = 1$ .  $\text{PI}(abc)$  из

Условие:  $ab : 2^6$ ,  $bc : 2^{14}$ ,  $ac : 2^{16} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 16 \end{cases}$

Условие:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$ . Из условия, что  $ab : 3^{13}$ ,

$bc : 3^{21}$ ,  $ac : 3^{25} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{59}{2} \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \end{cases}$

И.К.  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z} \geq 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$ .

Из условия, что  $ac : 5^{28} \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28$ .

Из макс:  $a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \geq$   
 $\geq 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Самое простое пример:  $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$   
 $b = 2^2 \cdot 3^5$   
 $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

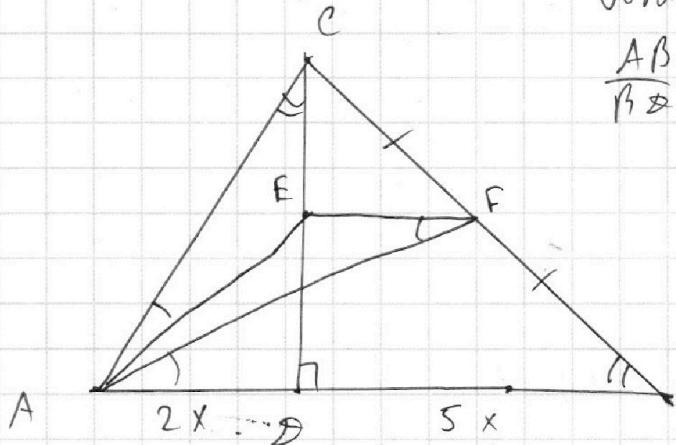
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Пусть } AB = 7x. \quad \text{П.к. } \frac{AB}{BD} = 1,4 \Rightarrow AD = 2x, \quad BD = 5x$$

$\angle CAE = \angle FFA$

$$\text{П.к. } EF \parallel AB \Rightarrow \angle FFA = \angle FAB$$

$$\text{Пусть } \angle CAE = \angle FAB. \quad \angle CBD + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\angle DCB + \angle ACD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle CBD \Rightarrow$$

$$\triangle ACE \sim \triangle AFB \text{ по } 2 \text{ прил} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$$

$$\text{П.к. } \triangle ACD \sim \triangle ACB \text{ по } 2 \text{ прил} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$$

$$AC^2 = AD \cdot AB \Rightarrow AC = \sqrt{14}x. \quad \text{значит } CB = BD \cdot AB$$

$$CB = \sqrt{35}x, \quad \frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$\text{П.к. } \triangle ACD \sim \triangle CBD \text{ по } 2 \text{ прил} \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow$$

$$CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{10}x. \quad \text{П.к. } EF \parallel AD \Rightarrow$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{35}x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}. \quad \frac{CF}{BF} = \frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = 1$$

$$\text{Пусть } CF = BF = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{7}x}{2}. \quad \triangle ACD \sim \triangle FCF \text{ по}$$

$$2 \text{ прил} (\angle CEF = 90^\circ \text{ и } EF \parallel AB, \angle CFE = \angle CBA = \angle ACD, \text{ и.к. } EF \parallel AN). \quad \text{тогда: } \frac{S_{ACD}}{S_{FCF}} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{14x^2}{35x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

П.к.  $\arccos x \in [0, \pi] \Rightarrow$  если  $x$  - решение

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x, \text{ но } 9\pi - 2x \in [0, 10\pi]$$

т.к. значение  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}]$

Возможные решения:  $\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$ :

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 9\pi - 2x \Leftrightarrow 2x - 10\arcsin(\sin x) = 4\pi$$

$$1) x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x, \Rightarrow -8x = 4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x \Rightarrow 2x - 10(\pi - x) = 4\pi \Rightarrow$$

$$12x = 16\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

$$3) x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 2\pi \Rightarrow 2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi \Rightarrow$$

$$8x = 16\pi \Rightarrow x = 2\pi$$

$$4) x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 3\pi - x \Rightarrow 2x - 10(7\pi - x) = 4\pi \Rightarrow$$

$$12x = 34\pi \Rightarrow x = \frac{17}{6}\pi$$

$$5) x \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 4\pi - x \Rightarrow 2x - 10(x - 4\pi) = 4\pi \Rightarrow$$

$$8x = 36\pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{2}$$

Оконч:  $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6}, x = 2\pi, x = \frac{17\pi}{6}, x = \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

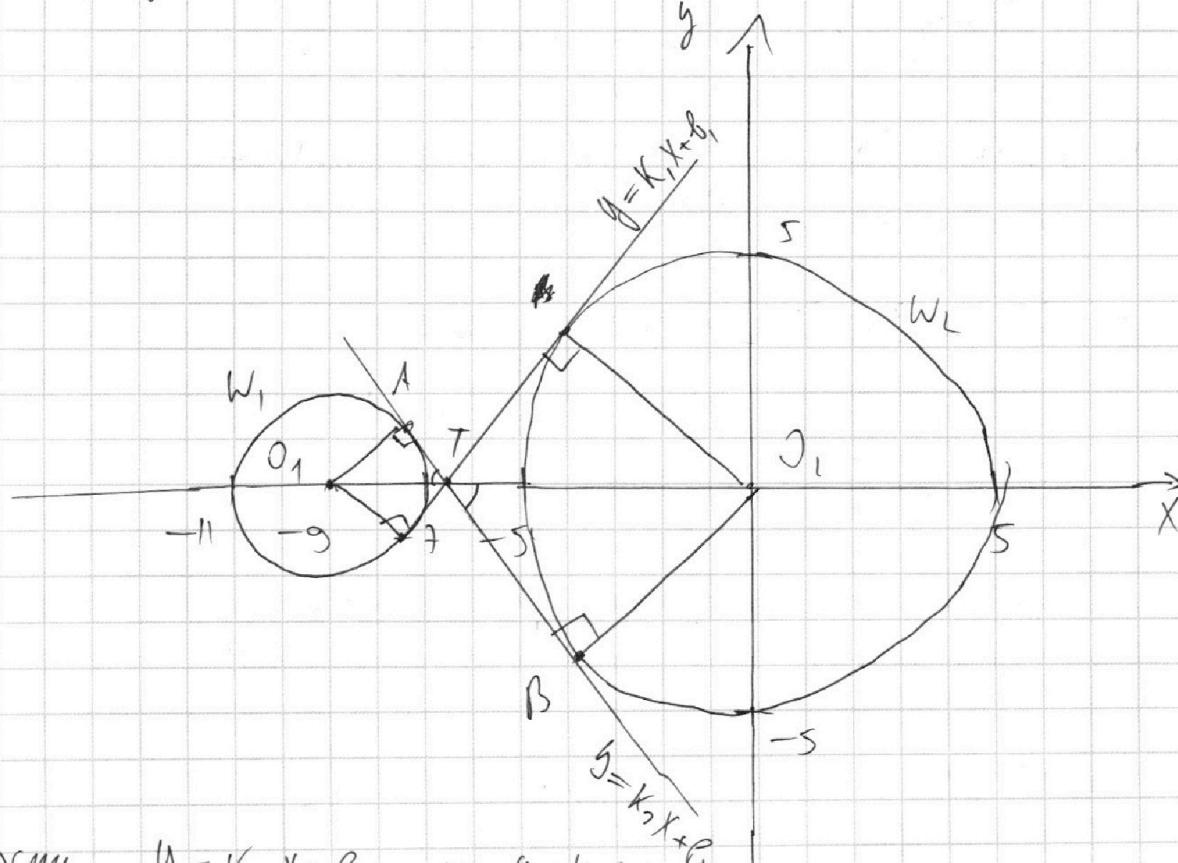


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Слово задача имеет смысл  $x \neq y$ . При  
меньшем значении, значение решения не  
изменится. Тогда:  $y = \frac{6}{5} - 1,2x$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x + 3)^2 + y^2 - 4 = 0$$

Решение уравнения на координатной плоскости  
 $xy$  представляет собой две окружности:



Таким образом  $y = k_1 x + b_1$ , и  $y = k_2 x + b_2$   
это однородное уравнение относящееся к  
форме угла определенного уравнения для  
системы линейных уравнений при  
коэффициентах  $b$ , недостаточно и недетерминировано,  
так как  $-1,2 \in (k_2, k_1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Записано что эта фигура  
имеет форму  $\Delta ABC$ , причем  $AB \perp BC$ .  
Напишите  
запись, что верхнее и  
нижнее квадраты  
имеют общее  
пересечение  
одных вершин  
лежащих на прямой  $OX$ .  
Пусть одна  
окружность  $w_1$ , ее центр  $O_1$ , а другая  $w_2$ ,  
ее центр  $O_2$ .  
Пусть уравнение  $y = k_2 x + b_2$   
пересекает  $w_1$  в точке  $A$ , а  $w_2$  в точке  
 $B$ , ось  $OX$  в точке  $T$ .  
После  $\triangle O_1AT \sim \triangle O_2BT$   
но 2 угла.  $\Rightarrow \frac{O_1T}{O_2T} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$ .  
 $O_1T + O_2T =$   
 $= O_1O_2 = 9 \Rightarrow O_1T = \frac{18}{7}, O_2T = \frac{45}{7}$ .  
Найдем  
 $\angle ATO_1 = \angle BTO_2$ .  
 $AT = \sqrt{O_1T^2 - O_1A^2} =$   
 $= \sqrt{\left(\frac{18}{7}\right)^2 - 4} = \frac{8\sqrt{2}}{7}$ .  
Найдем  $\operatorname{tg} \angle = \frac{2}{\frac{8\sqrt{2}}{7}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$ .  
Найдем уравнение  $y = k_2 x + b_2$ ,  $k_2$  и  $b_2$   
найдутся из условия  $\operatorname{tg} \angle = k_2 = -\frac{7}{4\sqrt{2}}$ .  
Найдем  $K_1 = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow -1,72 \in \left(-\frac{7}{4\sqrt{2}}, \frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$ .  
 $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$ .  
Ответ:  $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}, \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$ .

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Предположим реше: } \log_{11} x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \cdot \log_{11} x} - 5$$

$$\text{Сделаем замену: } \log_{11} x = a: a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \mid \cdot 3a$$

$$3a^5 + 15a = 16. \text{ Предположим реше:}$$

$$\log_{11}^4(0,5g) + \frac{1}{\log_{11}(0,5g)} = -\frac{13}{3 \cdot \log_{11}(0,5g)} - 5$$

$$\text{Сделаем замену: } a = \log_{11} 0,5g = b:$$

$$b^4 - \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \mid \cdot 3b: 3b^5 + 15b = -16$$

$$\text{Рассмотрим функцию } f(t) = 3t^5 + 15t$$

$$f'(t) = 15t^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(t) - \text{бесконечн.}$$

$$\text{Причина решения, т.к. } f(t) = -f(-t) \Rightarrow$$

$$f(t) - \text{нечетная. П.к. } f(t) \text{ - монотонна}$$

$$\text{бесконечн., т.к. решение уравнение } f(t) = 16$$

$$\text{есть 1 (она симметрия, н.к. } f(t) - \text{линейна}$$

$$\text{нечетной линей). Аналогично } f(t) = -16$$

$$\text{есть еще одно решение. Пусть } t_0 -$$

$$\text{решение } f(t_0) = 16. \text{ П.к. } f(t) - \text{нечетное, то}$$

$$f(-t_0) = -16 \Rightarrow -t_0 - \text{решение } f(t) = -16$$

$$\text{Пусть: } \begin{cases} x \\ y \end{cases} \text{ решение системы,}$$

$$\text{то } a = -b \Rightarrow \log_{11} x = -\log_{11} 0,5g \Rightarrow$$

$$\log_{11} 0,5xy = 0 \Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2 \quad \text{Ответ: 2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

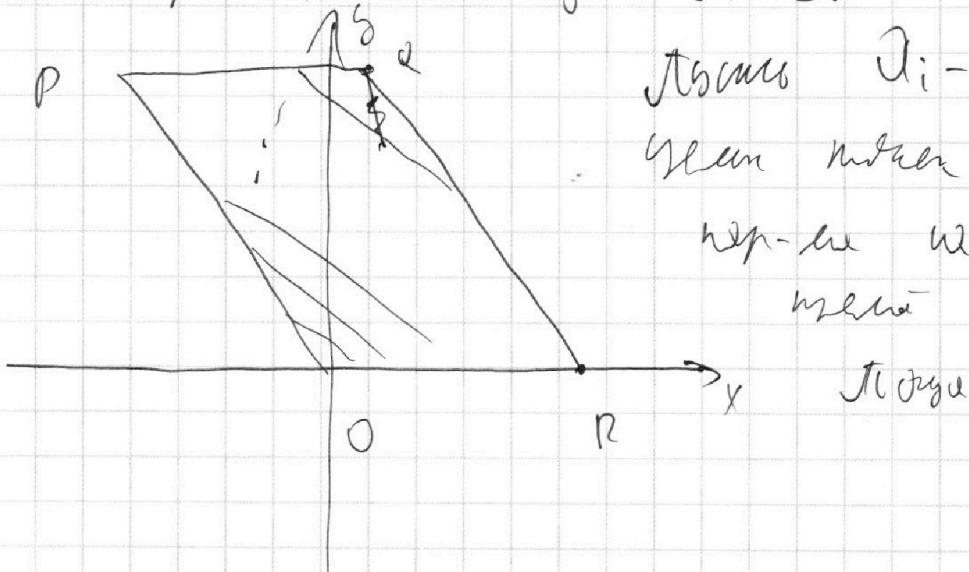
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Точка  $A$  лежит на прямой

$y = b_1 - 6x$ . Тогда чтобы условия выполнить,  
точка  $B$  должна лежать на прямой

$y = 48 + b_1 - 6x$ . Тогда результат будет

на прямой или  $y = -6x + c$ .



Линия  $y = i - 6x$

Линия  $y = j - 6x$

нр-ли  $i$

нр-ли  $j$

нр-ли  $y = i - 6x$

нр-ли

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

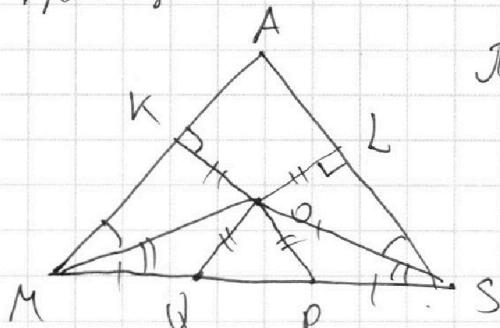
- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

**МФТИ**



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдем  $O$ -чертеж среди  $\triangle QL$ . Доказываем  
что  $OQ = OL$  и  $\angle OQM = \angle OPL$ :



$$\text{П.к. } OQ = OK = OP = OQ$$

которые являются углами  $\Rightarrow$

$$\angle O_1KQ = \angle O_1L = \angle O_1P = \angle O_1Q \Rightarrow$$

$$\triangle O_1QP - \text{т.д} \Rightarrow O_1Q = O_1P$$

$$\angle O_1QK = \angle O_1QP = \angle O_1PQ \Rightarrow \angle O_1QM = \angle O_1PS \Rightarrow$$

$\triangle MKO_1 = \triangle SPQ$ , по 2 признакам  $\angle$  между  
ногами  $\Rightarrow \angle O_1MK = \angle O_1SP$ .  $\triangle MKO_1 = \triangle SLO_1$ ,  
по комбинации признаков  $\Rightarrow \angle MKO_1 = \angle SLO_1 \Rightarrow$

$$\angle AMS = \angle ASO_1 \Rightarrow AM - AS = 20. \text{ Теперь}$$

расставим на-ми  $\triangle ABC$ :

П.к.  $M$ -н. перес. биссектрисы  $\Rightarrow$

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = 10$$

тогда в  $\triangle A_1MC$  вершина

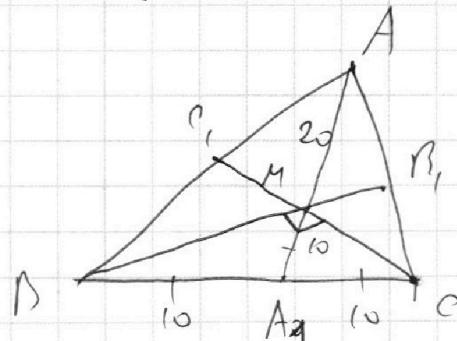
нельзя назвать  $M$  потому  $\angle BMC = 90^\circ$ . Доказать

биссектрису  $AH$  в  $BC$ . Покажем  $S_{AHC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = 180$

$$AH = \frac{300}{BC} = \frac{300}{20} = 15. \text{ Доказать биссектрису } AH_1 \text{ в}$$

$BC$ , тогда  $\triangle A_1MH_1 \sim \triangle A_1AH_1 \Rightarrow \frac{MH_1}{AH_1} = \frac{A_1A}{AA_1} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$$\text{тогда } MH_1 = 6. S_{AHC} = \frac{AH_1 \cdot BC}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

**МФТИ.**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } BM \cdot MC = MH_1, BC = 20, BH = 6 \Rightarrow AM \cdot BH \cdot CH =$$

$$= (20 \cdot 20) = 2400 \quad AA_1 = \frac{3}{2} AM, BB_1 = \frac{3}{2} BH, CC_1 = \frac{3}{2} CH \Rightarrow \\ AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{27}{8} \cdot AM \cdot BH \cdot CH = \frac{27 \cdot 2400}{8} = 8100.$$

$$G = SN = SL \text{ как отрезки высот в } \triangle ABC \Rightarrow AL = AS - \cancel{SN} =$$

$$= 14. AL = AK \text{ как отрезки высот в } \triangle ABC,$$

$$\text{значит: } KH = AM - AK = 6, \text{ П.к.}$$

$$ON = OK = 8 \text{ как радиусы, но } O \notin$$

плоск. пл-мн стягивает угол при верхне BC.

Доказать высоту

$KH_2$  к BC.  $\triangle A_1KH_2 \sim$

$\triangle A_1MH_1$  п.п.  $AH_1 \parallel KH_2$

$$\text{Пусть: } \frac{10}{16} = \frac{A_1H_1}{KH_2} \Rightarrow$$

$$KH_2 = \frac{16 \cdot 6}{10} = \frac{48}{5}$$

П.к.  $OK \perp A_1C \Rightarrow$

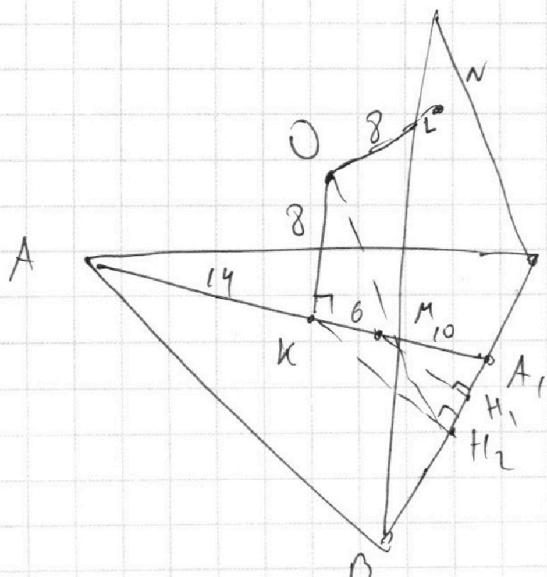
$OK \perp KH_2$ . Но

известно O угол между:  $OK \perp BC$ . Доказано

$$\angle OH_2K = \alpha. \Rightarrow \tan \alpha = \frac{OK}{KH_2} = \frac{8}{\frac{48}{5}} = \frac{8 \cdot 5}{48} = \frac{5}{6}$$

$$\alpha = \arctan \frac{5}{6}. \text{ П.к. } O \in \text{плоск. пл-мн} \Rightarrow \text{уголом}$$

среди углов верхне BC есть 2. Offset: а)  $8100$   
б)  $2 \arctan \frac{5}{6}$





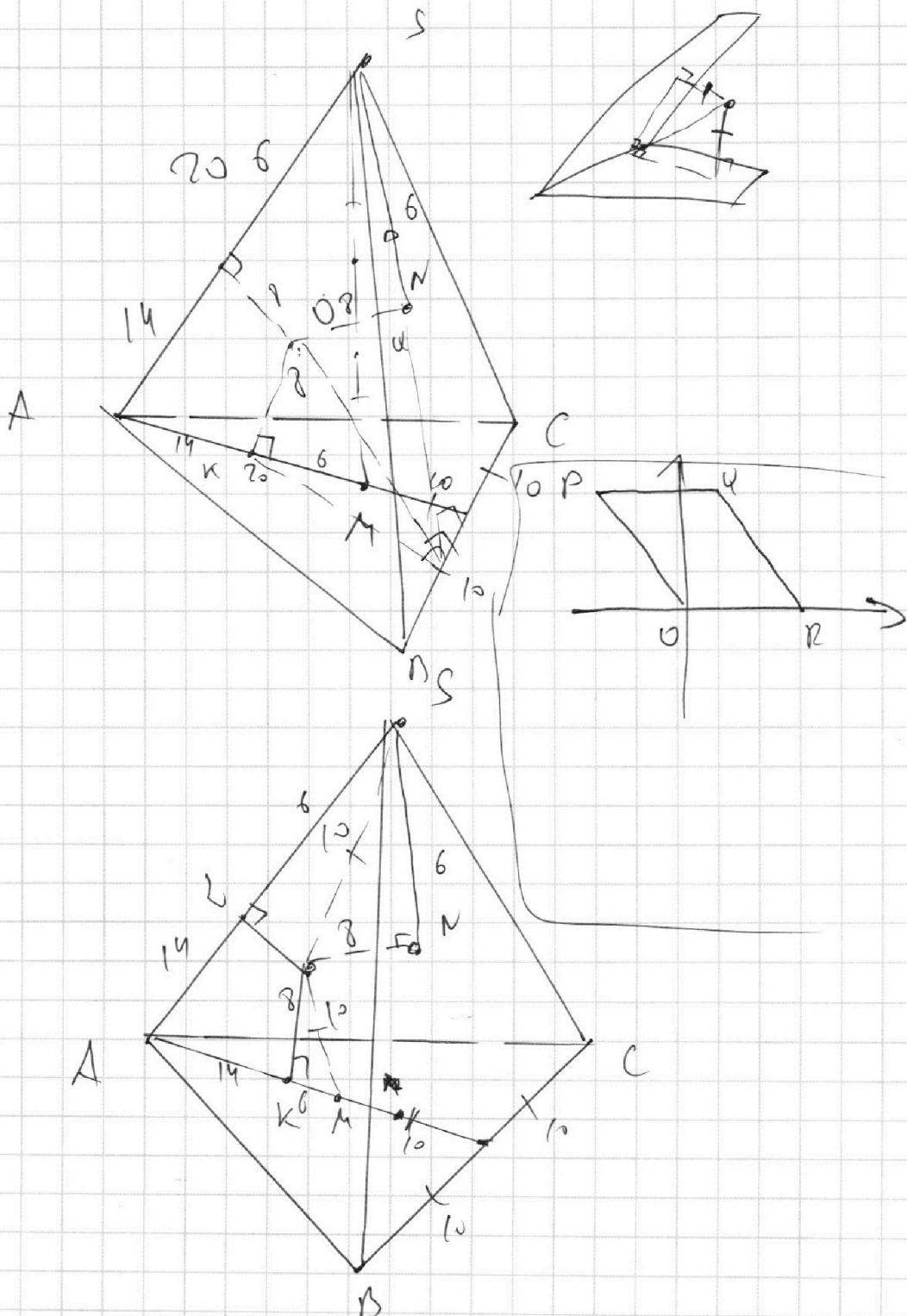
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

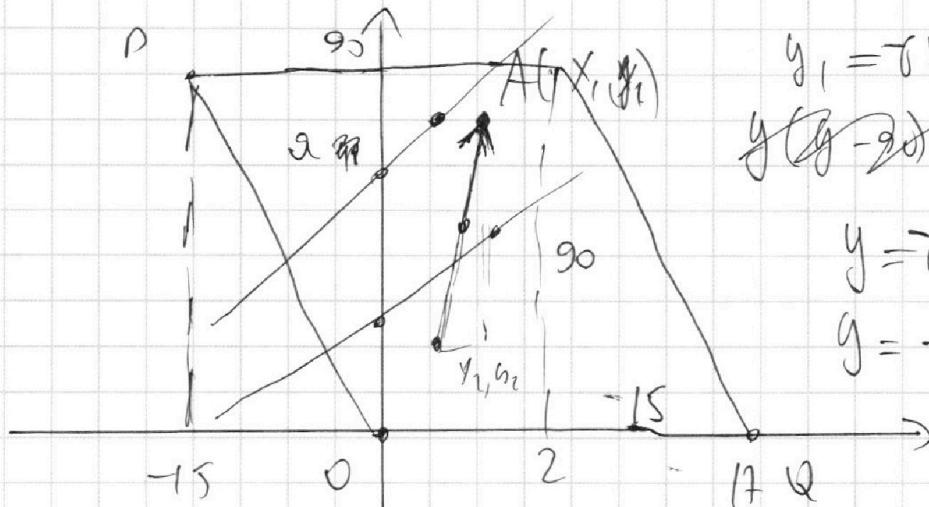
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_1 = -6x_1 + b_2 - 48 + 6x_1$$

$$y_2 = 6x_2 - b_1$$

$$y = -6x + b$$

$$y = -6x + 48 - b$$

$$6y_1 - 6x_1 + b_2 - y_1 = 48$$

$$6(x_1 - x_1) + (b_2 - y_1) = 48$$

$$(6; 1)$$

$$y_1 = b_1 x - 6x_1$$

$$y_2 = b_2 - 6x_2$$

$$b_2 - b_1 + 6y_1 - 6x_1 = b_1 - b_2 + 48$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{x^3} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad \log_{11} x = a$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \Rightarrow 3a^5 - 18 = -2 - 15a$$

$$3a^5 + 17a - 16 = 0$$

$$\log_{11}^4 (156) + \log_{11} 156 = \log_{11} (156)^2 - 5$$

$$\log_{11} 156 = 6$$

$$6^4 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-13) - 5 \quad | \cdot 36$$

$$36^5 + 3 = -13 - 156$$

$$36^5 + 16 + 156 = 0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0 \quad | \checkmark$$

$$3t^5 + 17t - 16 = 0 \quad | \checkmark$$

дл. кор.

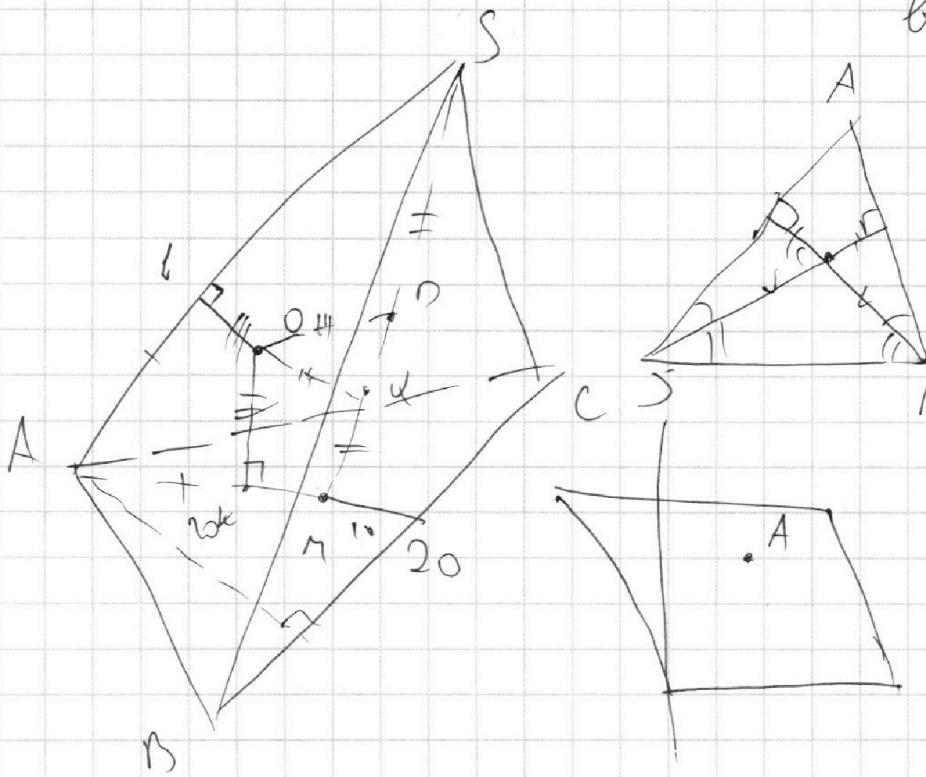
$$t = -4$$

$$\log_{11} x = \log_{11} t$$

$$\log_{11} x + \log_{11} t = 0$$

$$\log_{11} x \cdot t = 0$$

$$(x \cdot t = 1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

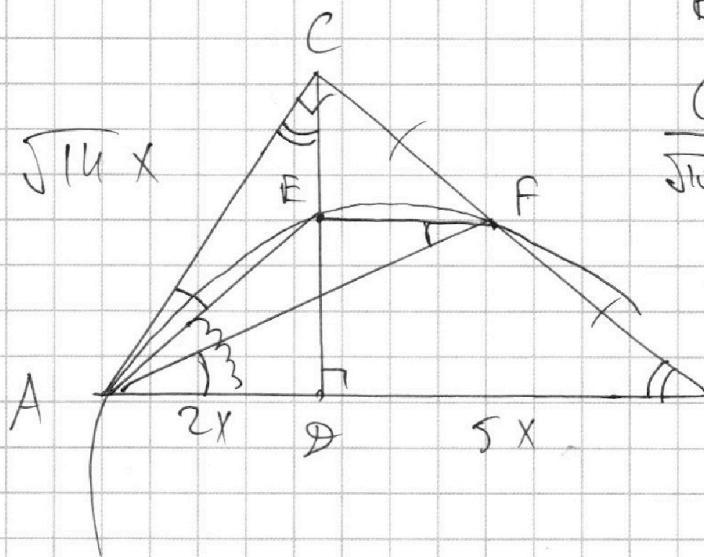
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$$

$$\frac{CE}{\sqrt{14}x} = \frac{CF}{\sqrt{5}x}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$B \quad \frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

↓

$$\frac{BF}{CF} = \frac{\sqrt{2} \cdot 7}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{4}} = 1$$

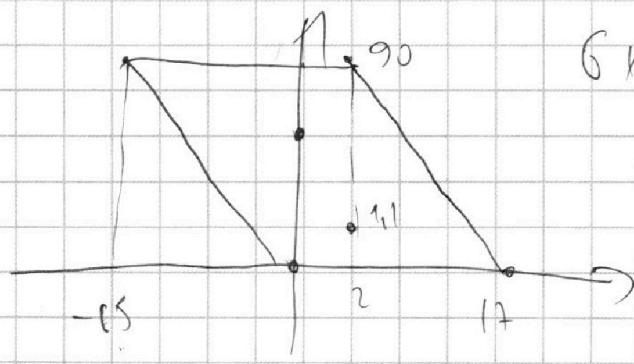


A( $x_1; y_1$ )

B( $y_1; y_1$ )

$$6x_1 + 6y_1 + y_1 - y_1 = 98$$

$$6x_1 + 6y_1 = 98 + y_1 + 6x_1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$2x - 10 \arcsin(\sin x) = 4\pi$$

$$2x \leq 9\pi \quad 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : 2x - 10x = 4\pi$$
$$-8x = 4\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] : 2x - 10(\pi - x) = 4\pi \quad y \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$$

$$2x - 10\pi + 10x = 4\pi$$

$$2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi$$

$$12x = 14\pi$$

$$x = \frac{7}{6}\pi$$

$$2x - 10(x - 2\pi) = 4\pi$$

$$8x = 16\pi$$

$$x = 2\pi$$

$$x \in [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}] \quad \pi - (x - 2\pi) = 3\pi - x$$
$$\sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2}$$
$$\sin \frac{7\pi}{2} = \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$2x - 3\pi + 10x = 4\pi$$

$$x \in [\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}]$$

$$12x = 9\pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi$$

$$2x - 10(x - 4\pi) = 4\pi$$

$$2x - 10x + 40\pi = 4\pi$$

$$10 \arccos(\sin \frac{4\pi}{6}) = 9\pi - \frac{10\pi}{3} =$$

$$2x = 36\pi$$

$$= \frac{27\pi}{3} - \frac{10\pi}{3} = \frac{17\pi}{3}$$

~~$$x = \frac{17\pi}{6}$$~~
$$x \leq \frac{35\pi}{3} = \frac{9\pi}{2}$$

$$\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot k_1$$

$$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot k_2$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot k_3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 16$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{6+14+16}{2} =$$

$$= \frac{20+16}{2} = 18$$

$$\alpha_1 = 9 \quad \alpha_2 = 2 \quad \alpha_3 = 12$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \end{cases}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{13+21+25+1}{2} = 30$$

$$\begin{array}{c} \cancel{\beta_1} \\ \cancel{\beta_2} \\ \cancel{\beta_3} \\ \hline \beta_3 = 16 \end{array}$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 25$$

$$\beta_4 = 9$$

$$\beta_5 = 5$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 11 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq \frac{11+13+19}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

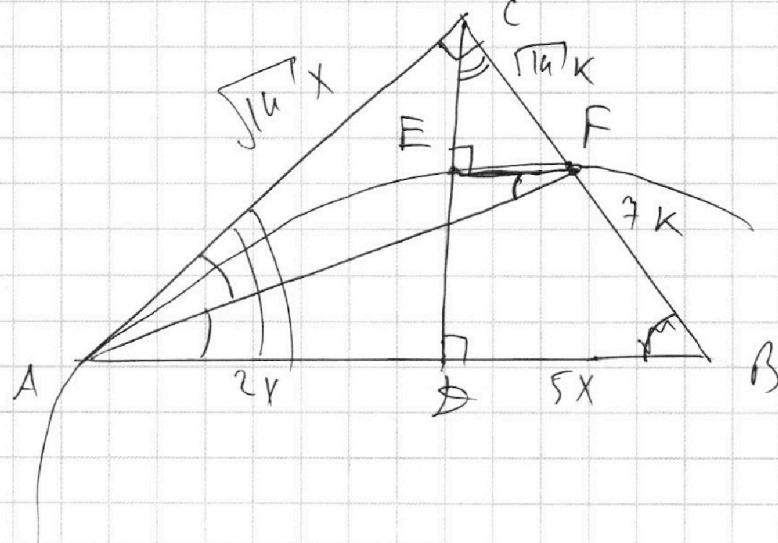
$$\gamma_3 + \gamma_1 \geq 28$$

$$\begin{array}{c} \cancel{\gamma_1} \\ \cancel{\gamma_2} \\ \cancel{\gamma_3} \\ \hline \gamma_1 = 13 \\ \gamma_2 = 15 \end{array}$$

$$a = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot \cancel{5}$$

$$c = 2^{17} \cdot 3^{16} \cdot 5^{15}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

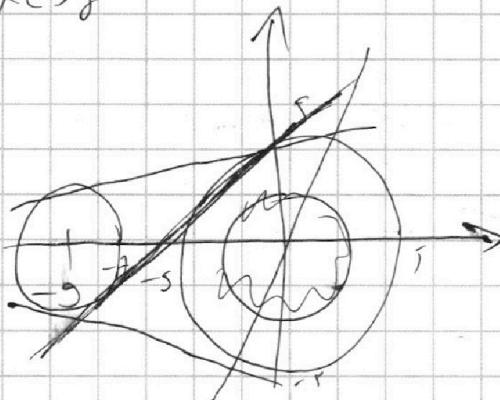
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4)

$$x^2 + y^2 = 25 \quad x \rightarrow g$$

$$(x+3)^2 + y^2 = 4$$



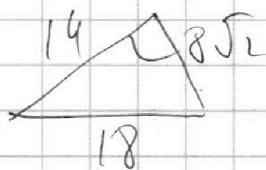
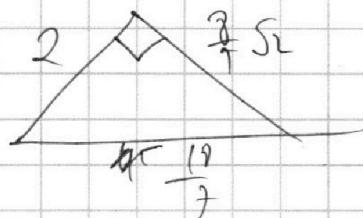
$$5y = b - 6ay$$

$$y = \frac{b}{5} - 1.2ay$$

$$2x + 5x = 94$$

$$7x = 94$$

$$x = \frac{94}{7}$$



$$\sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{4 \cdot 32} = \\ = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$$

$$(8^2 - 14^2) / ((17-15)(17+15)) = 4 \cdot 32 =$$

$$\frac{7}{6\sqrt{2}} : \frac{6}{5} = \frac{7 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{35}{24\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 64}{5 \cdot 18} = \frac{128}{90} = \frac{64}{45}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{11} - 5 \quad \log_x x = t$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{1}{3} \cdot \log_x 11^{-2} - 5 = \frac{1}{3} \cdot (-2)^t - 5$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5 \mid \cdot 3t$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t$$

$$3t^5 + 15t + 16 = 0$$



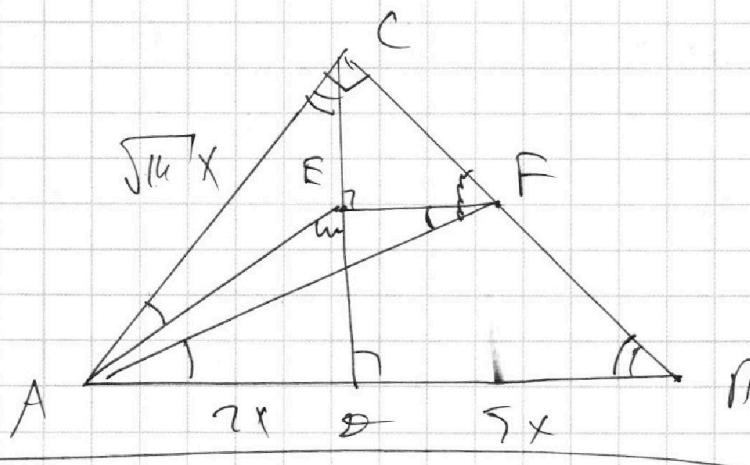
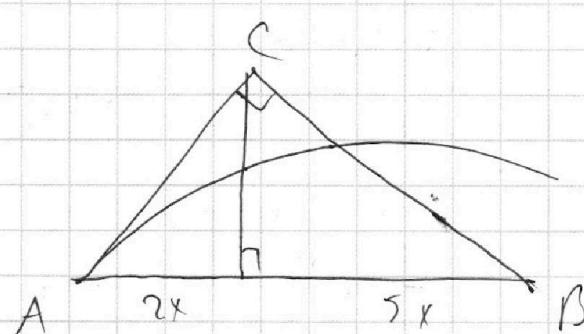
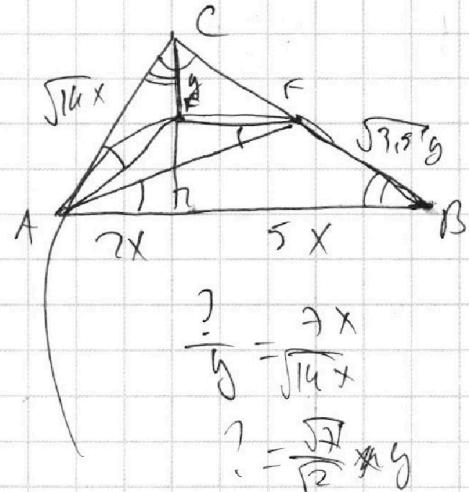
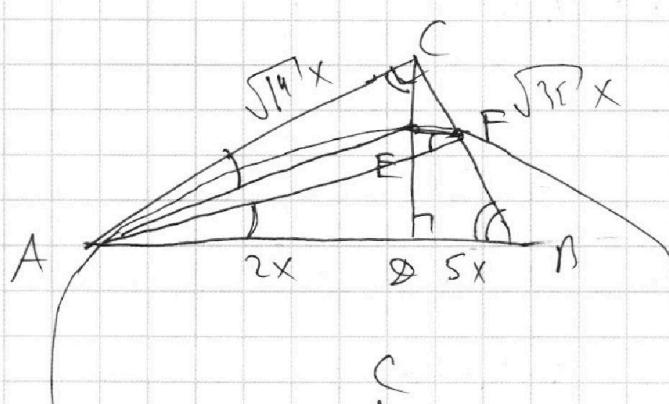
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{17} - 5 \quad \text{ODS: } \boxed{x \neq 1} \\ \boxed{x > 0}$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = \frac{1}{6}e^{-5} \cdot 6t$$

$$6t^5 - 36 = 1 - 30t$$

$$6t^5 + 30t - 37 = 0$$