



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0$;
 $\alpha_1 = 5, \beta_1 = 3, \gamma_1 = 9$.

Для минимальной $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 28$ - можно иметь
решение: $\alpha_2 = 8, \beta_2 = 7, \gamma_2 = 13$.

Возможно также, так. $\alpha_3 + \beta_3 \geq 39, \beta_3 \geq 0$,

$\Rightarrow \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 39$; Пусть $\alpha_3 = 39$;

$\alpha_3 = 17, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 22$.

$\Rightarrow a \cdot b \cdot c \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$, или

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}, b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0, c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{22}$

Ответ: $abc(\text{мин.}) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a \cdot b : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad (1)$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$b \cdot c : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad (2) \quad \text{Пусть } a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot d_1$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, d_1 \in \mathbb{N}$

$$a \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \quad (3) \quad b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot d_2, \quad d_2 \in \mathbb{N}$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$

$$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot d_3, \quad d_3 \in \mathbb{N}$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$

Из условия (1) \Rightarrow :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12 \end{cases}$$

Из условия (2) :

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 \geq 12 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 20 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 17 \end{cases} \quad \text{и из (3) : } \begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39 \end{cases}$$

Итого :

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \beta_1) + (\beta_1 + \gamma_1) + (\alpha_1 + \gamma_1) &\geq 8 + 12 + 14 = 34 \\ (\alpha_2 + \beta_2) + (\beta_2 + \gamma_2) + (\alpha_2 + \gamma_2) &\geq 14 + 20 + 21 = 55 \\ (\alpha_3 + \beta_3) + (\beta_3 + \gamma_3) + (\alpha_3 + \gamma_3) &\geq 12 + 17 + 39 = 68 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 27, 5 \quad ; \quad \text{т.к. } \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$$

~~$$\alpha_1 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 34$$~~

Итого, минимальная сумма $(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) + (\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) = 17 + 28 + 34 = 79$

~~$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$~~

~~$$\begin{aligned} \text{Это возможно при } a &= 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \\ b &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ c &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow k = \frac{1 - \frac{\sqrt{10}}{5} \sqrt{\sqrt{14} - 2}}{1 - \frac{\sqrt{14}}{7}}$$

$$\frac{S_{CEP}}{S_{CDD}} = \frac{k^2}{1} \Rightarrow S_{CEP} = k^2 S_{CDD}$$

$$S_{CDD} = \frac{5}{7} S_{ABC} \Rightarrow$$

$$S_{CEP} = \frac{5}{7} k^2 S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEP}} = \frac{7}{5k^2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEP}} = \frac{7 \left(1 - \frac{2\sqrt{14}}{7} + \frac{14}{7 \cdot 49}\right)}{5 \left(1 - \frac{2\sqrt{10}}{5} \sqrt{\sqrt{14} - 2} + \frac{10}{25} (\sqrt{14} - 2)\right)} = \frac{7 - 2\sqrt{14} + 2}{(5 - 2\sqrt{10} \sqrt{\sqrt{14} - 2} + 2(\sqrt{14} - 2))} = \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5 - 2\sqrt{10} \sqrt{\sqrt{14} - 2} + 2(\sqrt{14} - 2)}$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEP}} = \frac{9 - 2\sqrt{14}}{(5 - 2\sqrt{10} \sqrt{\sqrt{14} - 2} + 2(\sqrt{14} - 2))}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Плане } 1, \quad FO^2 = (OB - FB)^2 + (OC - CH)^2.$$

$$CH = CF \cdot \cos \alpha = kx \sqrt{10}. \quad \frac{x\sqrt{55}}{7x} = kx \frac{\sqrt{550}}{7}.$$

$$r^2 = \left(r - \frac{kx\sqrt{140}}{7} \right)^2 + \left(x\sqrt{14} - \frac{kx\sqrt{350}}{7} \right)^2$$

$$r^2 = r^2 - \frac{2rkx\sqrt{140}}{7} + \frac{k^2x^2 \cdot 140}{49} + 14x^2 - \frac{2kx^2\sqrt{14} \cdot \sqrt{350}}{7} + \frac{k^2x^2 \cdot 350}{49}.$$

$$\frac{x(14+10k^2)}{2k\sqrt{10}} \cdot \frac{2kx\sqrt{140}}{7} = \frac{k^2x^2 \cdot 140}{49} + 14x^2 - 2kx^2 \cdot 10 + \frac{k^2x^2 \cdot 350}{49}.$$

$$\frac{x^2(14+10k^2)}{4900} \cdot \frac{\sqrt{140}}{7} = k^2x^2 \cdot 10 + 14x^2 - 2kx^2 \cdot 10$$

$$(14+10k^2) \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} = 10k^2 - 20k + 14.$$

$$2\sqrt{14} + \frac{10}{7}\sqrt{14}k^2 = 10k^2 - 20k + 14$$

$$k^2 \left(10 - \frac{10}{7}\sqrt{14} \right) - 20k + (14 - 2\sqrt{14}) = 0$$

$$D = 20^2 - 4 \cdot 10 \left(1 - \frac{\sqrt{14}}{7} \right) (14 - 2\sqrt{14}) =$$

$$= 20^2 - 40(\sqrt{14} - 2)(\sqrt{14} - 2) =$$

$$= 20^2 - 40(\sqrt{14} - 2)^2 = 40(10 - (14 + 4 - 4\sqrt{14})) =$$

$$= 40(10 - 18 + 4\sqrt{14}) = 40(4\sqrt{14} - 8) = 160(\sqrt{14} - 2).$$

$$k = \frac{20 \pm 4\sqrt{10} \cdot \sqrt{(\sqrt{14} - 2)}}{20 \left(1 - \frac{\sqrt{14}}{7} \right)} = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{10}}{5} \sqrt{(\sqrt{14} - 2)}}{1 - \frac{\sqrt{14}}{7}}.$$

$$\text{Корень } k = \frac{1 + \frac{\sqrt{10}}{5} \sqrt{(\sqrt{14} - 2)}}{1 - \frac{\sqrt{14}}{7}} > 1 - \text{не подходит}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

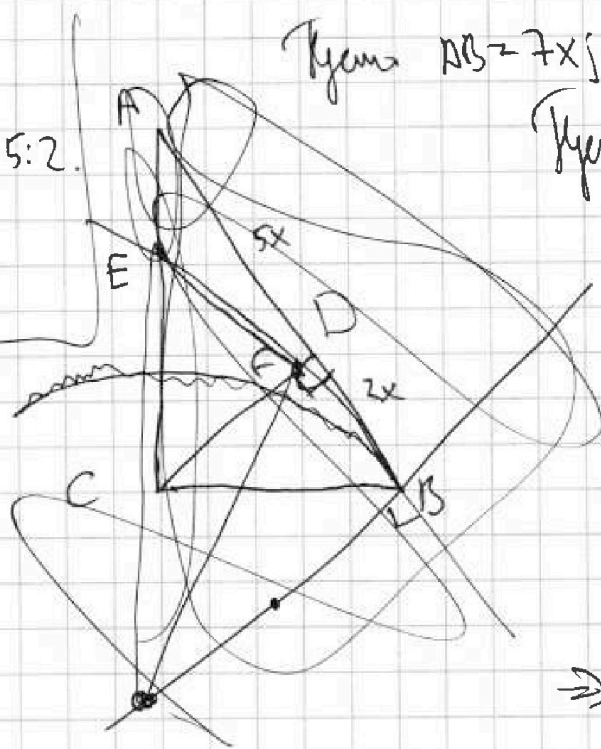
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ABIFE

$AD : DB = 5 : 2$

$\frac{S_{ABCE}}{S_{CECF}}$



Пусть $AB = 7x$, $AD = 5x$, $DB = 2x$

Пусть $\angle \alpha = \angle CAD$

$\lg d = \frac{CD}{5x}$

$\lg(\angle CBD) = \frac{CD}{2x}$

$\lg(90 - \alpha) = \frac{CD}{2x}$

$\text{ctg } \alpha = \frac{CD}{2x}$

$\lg d \cdot \text{ctg } \alpha = l = \frac{CD^2}{10x^2}$

$\Rightarrow CD = x\sqrt{10}$

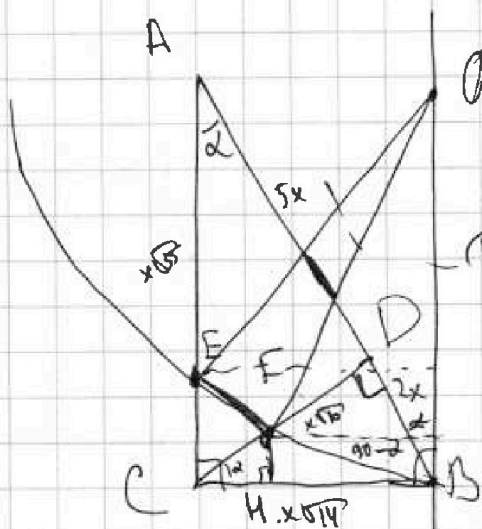
$\Rightarrow \lg d = \frac{x\sqrt{10}}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = x\sqrt{35}$

$BC = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = x\sqrt{14}$

Пусть $OB = r$, $\frac{CE}{CA} = k$

$CE = kx\sqrt{35}$, $CF = kx\sqrt{14}$



Шаг 1 $OE^2 = (OB - CE)^2 + (x\sqrt{14})^2$

$r^2 = (r - kx\sqrt{35})^2 + 14x^2$

$r^2 = r^2 - 2rkx\sqrt{35} + k^2x^2 \cdot 35 + 14x^2$

$2rkx\sqrt{35} = x(14 + k^2x^2) \Rightarrow$

$r = \frac{x(14 + k^2x^2)}{2k\sqrt{35}}$

Пусть FH - высота из F на BC

тогда $FH \perp BC$

$FH = FC \cdot \sin \alpha = kx\sqrt{14} \cdot \frac{x\sqrt{14}}{7x} = \frac{kx\sqrt{140}}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10\arcsin(\sin x) = \pi - 2x$$

$$4\pi = 10\arcsin(\sin x) - 2x$$

$$2\pi = 5\arcsin(\sin x) - x$$

$$0 \leq \arcsin(\sin x) \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{2\pi + x}{5} \leq \pi$$

$$0 \leq 2\pi + x \leq 5\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

См. $x \in [-2\pi; -\pi)$, но из вида графика $\sin x$,

$$\arcsin(\sin x) = x + 2\pi$$

$$2\pi = 5(x + 2\pi) - x; \quad 2\pi = 4x + 10\pi$$

$$x = -2\pi - \frac{3}{2}\pi$$

См. $x \in [-\pi; 0)$, но из вида графика $\sin x$, и его значения,

$$\arcsin(\sin x) = -x$$

$$2\pi = -6x, \quad x = -\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi$$

См. $x \in [0; \pi]$, но $\arcsin(\sin x) = x$

$$4x = 2\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\pi$$

См. $x \in [\pi; 2\pi]$, но $\arcsin(\sin x) = 2\pi - x$;

$$2\pi = 10\pi - 5x - x; \quad 6x = 8\pi \Rightarrow x = \frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Есть } x \in (2\pi; 3\pi], \text{ та } \arcsin(\cos x) = x - 2\pi,$$

$$2\pi = 5(x - 2\pi) - x$$

$$2\pi = 5x - 10\pi - x. \quad 4x = 12\pi \Rightarrow x = 3\pi - \pi.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi; 3\pi \right\}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ



$$\Rightarrow \text{by } \varphi_1 = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{10 \cdot 7}{7 \cdot \sqrt{7}}} \approx \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{7}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{7}; +\infty\right)$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{7}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{7}}{7}; +\infty\right)$$

$$\text{Answer: } a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{7}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{7}}{7}; +\infty\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице.

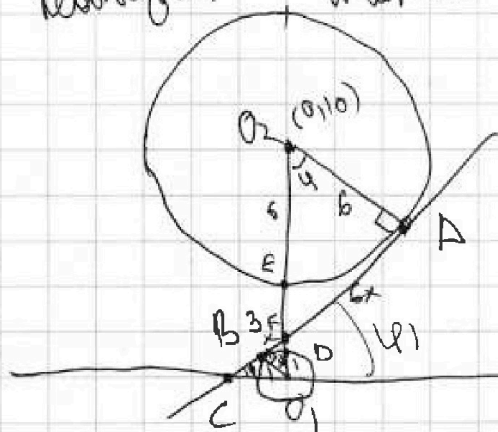


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть l_1 и l_2 — 2 взаимные кас-ые к кругу ω ; пусть, l_1 — кас-ая к ω в точке A , тогда $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ кас-ая к ω в точке B ; l_2 — кас-ая к ω в точке C , тогда $\frac{a}{3} \geq \lg \varphi$, или $\frac{a}{3} \leq -\lg \varphi$.



$$\Delta O_1BD \sim \Delta O_2AF,$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{BF} = \frac{O_2F}{O_1F} = \frac{6}{1}.$$

$$O_2F + O_1F = 10, \Rightarrow$$

$$\frac{O_2F}{10 - O_2F} = \frac{6}{1}.$$

$$O_2F = 60 - 6O_2F \Rightarrow O_2F = \frac{60}{7}; O_1F = 10 - \frac{60}{7} = \frac{10}{7}.$$

$\Rightarrow F(0; \frac{10}{7})$. Сфера с центром O_1

ΔCO_1F равно ΔO_2AF . \Rightarrow

$$\frac{CF}{O_2F} = \frac{FO_1}{AF} = \frac{CO_1}{AO_2}.$$

$$\frac{CF}{\frac{60}{7}} = \frac{\frac{10}{7}}{6x} = \frac{CO_1}{6}.$$

$$\frac{CF}{\frac{10}{7}} = \frac{10}{x} = CO_1.$$

$$CF = \frac{100}{49x}; CO_1 = \frac{10}{7x}.$$

$$CO_1^2 + FO_1^2 = CF^2.$$

$$\frac{100}{49x^2} + \frac{100}{49} = \frac{10000}{49x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} + 1 = \frac{100}{49} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{51}{49} \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{51}{49},$$

$$x = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow CO_1 = \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{x} = \frac{10}{7} \cdot \frac{7}{\sqrt{51}} = \frac{10}{\sqrt{51}}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - \log_5^3(2x) \log_5 5y + \log_5^2(2x) \log_5^2(y) - \log_5(2x) \log_5^3(y) +$$
$$+ \log_5^4 y + 3 \leq 0; \text{ где } a = \log_5 2x, \quad z = \log_5 y, \text{ тогда}$$
$$(a^5 + b^5) + 3(a+b) = 0.$$

$$a^5 + 3a = -(b^5 + 3b).$$

$$f(x) = x^5 + 3x$$

$$- f(x) = f(-x)$$

Ср-й монотон, $f'(x) = 5x^4 + 3 > 0$

⇒ f-не строго возрастающая, ⇒

где все $\exists x \neq y$

$$f(x) = -f(y), \text{ и в силу нестрогого}$$

возрастания, это $y = -x$.

$$\Rightarrow \log_5(2x) + \log_5 y = 0,$$

$$\log_5 2xy = 0 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}, \quad xy = \frac{1}{2}.$$

Ана: $xy = \frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) \rightarrow 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 3^4 5^{-3}$$

$$\log_5^4(y) + 4 \log_y 5 = \log_y 3^4 5^{-1} - 3$$

Заметим, что $2x > 0, 2x \neq 1, (2x)^3 > 0, (2x)^3 \neq 1,$

$y > 0, y \neq 1, y^3 > 0, y^3 \neq 1,$

т.к. $x > 0, x \neq \frac{1}{2}, y > 0, y \neq 1.$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4 \log_5 2x^3}{3 \log_5 2x} - 3.$$

$$\log_5^5(2x) - 3 = \frac{4}{3} - 3 \log_5 2x$$

$$\log_5^5(2x) + 3 \log_5 2x - \frac{13}{3} \geq 0 \quad (1)$$

$$\log_5^4(y) + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3$$

$$\log_5^5(y) + 4 + \frac{1}{3} + 3 \log_5 y \leq 0$$

$$\log_5^5(y) + 3 \log_5 y + \frac{13}{3} \geq 0 \quad (2)$$

Сложим (1) и (2):

$$(\log_5^5(2x) + \log_5^5(y)) + 3(\log_5^4(2x) + \log_5^4(y)) + \frac{13}{3} - \frac{13}{3} \geq 0 \quad \rightarrow (3)$$

$$(\log_5(2x) + \log_5(y)) \left(\log_5^4(2x) - \log_5^3(2x) \log_5 y + \log_5^2(2x) \log_5^3(y) - \log_5(2x) \log_5^3(y) + \log_5^4 y + 3 \right) \geq 0$$

$$\left[\log_5(2xy) < 0, \quad 2xy \neq 1 \Rightarrow xy \geq \frac{1}{2} \right.$$

$$\left. \wedge (\dots) \geq 0 \right]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение заметим, что уравнение прямой $OP: y+5x \geq 0$

и уравнение прямой $QR: y+5x-90=0$.

Обозначим $l_i := y+5x - i \leq 0$

Тогда, $l_j - l_i = 5x_j + y_j - j - 5x_i - y_i + i = 0$.

Вместо нас формула $5x_j - 5x_i + y_j - y_i = 45 \Rightarrow$

$0 = l_j - l_i = 45 - (j - i) \Rightarrow (j - i) = 45 -$

$-i$ и 2 момента не может уравнение состав-

лен = 1 формула. Заметим, что не может

момента $l_{17} := 17$ момент l_{46} ~~каждого~~ ~~момента~~.

\Rightarrow две последние $l_{45} - 17m, l_{46} - 17, \dots,$
 l_{45} и $l_{90} - 17m. \Rightarrow$

Всего моментов $46 \cdot 17 = 460 + 280 + 42 = 460 + 322 =$
 $= 782.$

Ответ: 782 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0,0)$
 $P(-16,80)$
 $Q(2,80)$
 $R(18,0)$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

Пусть $t = x_2 - x_1$, $z = y_2 - y_1$.

$$z = 45 - 5t \quad ; \quad \text{Шаг 1} \quad t \in [-34; 34], \quad z \in [-80; 80]$$

$$\begin{aligned}
 -80 &\leq 45 - 5t \leq 80 \\
 80 &\geq 5t - 45 \geq -80 \\
 16 &\geq t - 9 \geq -16 \\
 25 &\geq t \geq -7
 \end{aligned}$$

~~Шаг 2 $t = 25$: $z = 45 - 5 \cdot 25 = 45 - 125 = -80$~~

~~Шаг 3. Пусть $A(x_1, y_1)$, тогда $B(x_1 + 25, y_1 - 80)$~~

~~$-16 \leq x_1 \leq 18$; $-16 \leq x_1 + 25 \leq 18 \Rightarrow -16 \leq x_1 \leq -7$
 $0 \leq y_1 \leq 80$; $0 \leq y_1 - 80 \leq 80 \Rightarrow y_1 \geq 80$~~

~~Максимум $z = 0$~~

$B(x_1 + t; y_1 + 45 - 5t)$

B тоже граница,

$-16 \leq x_1 + t \leq 18$; $-16 \leq x_1 \leq 18$ $OP \leq A \leq QR$

$0 \leq y_1 + 45 - 5t \leq 80$ $0 \leq y_1 \leq 80$ $OP \leq B \leq QR$

$-16 - t \leq x_1 \leq 18 - t$; $-16 \leq x_1 \leq 18$ $z_{\text{пр}} \text{ на } OP: y = -5x$
 $5t - 45 \leq y_1 \leq 5t + 35$ $0 \leq y_1 \leq 80$ $z_{\text{пр}} \text{ на } QR: y = -5x + 90$

~~$Q \notin \text{до}$, так $16 \leq x_1 \leq 18 - t \Rightarrow t \leq 2$~~

$\Rightarrow y_1 \geq -5x_1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) (продолжить):

$$= \sqrt{\frac{24}{49} \cdot \frac{74}{49}} = \frac{\sqrt{24 \cdot 74}}{49}$$

$$= \frac{\sqrt{18 \cdot 3 \cdot 37}}{49} = \frac{4\sqrt{111}}{49}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \sin \varphi} =$$

$$= \sqrt{24^2 + 8^2 - 2 \cdot 24 \cdot 8 \cdot \frac{4\sqrt{111}}{49}} =$$

$$= 8 \sqrt{3^2 + 1^2 - 6 \cdot \frac{4\sqrt{111}}{49}} =$$

$$= 8 \sqrt{10 - \frac{24\sqrt{111}}{49}}; \quad AB = 8 \sqrt{10 + \frac{24\sqrt{111}}{49}}$$

Заметим, что AB и AC могут быть сторонами прямоугольного треугольника.

$$\text{Итак, } BB_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2 \left(16^2 + 8^2 \left(10 + \frac{24\sqrt{111}}{49} \right) \right) - 8^2 \left(10 - \frac{24\sqrt{111}}{49} \right)} =$$

$$= \frac{8}{2} \sqrt{2 \left(4 + 10 + \frac{24\sqrt{111}}{49} \right) - 10 + \frac{24\sqrt{111}}{49}} =$$

$$= 4 \sqrt{18 + 3 \cdot \frac{24\sqrt{111}}{49}}$$

$$\text{Симметрично, } CC_1 = 4 \sqrt{18 - 3 \cdot \frac{24\sqrt{111}}{49}}$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot 4 \cdot 4 \sqrt{18^2 - \frac{9 \cdot 24^2 \cdot 111}{49^2}} =$$

$$= 24 \cdot 12 \cdot 4 \sqrt{6^2 - \frac{24^2 \cdot 111}{49^2}} = 24^2 \cdot 12 \sqrt{1 - \frac{4^2 \cdot 111}{49^2}} =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a) (пог. упр.)

$$= 24^2 \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{49^2 - 16 \cdot 111}{49^2}}$$

$$= 24^2 \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{2401 - 1776}{49^2}}$$

$$= 24^2 \cdot 12 \cdot \frac{25}{49}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \\ - 1776 \\ \hline 625 \end{array}$$

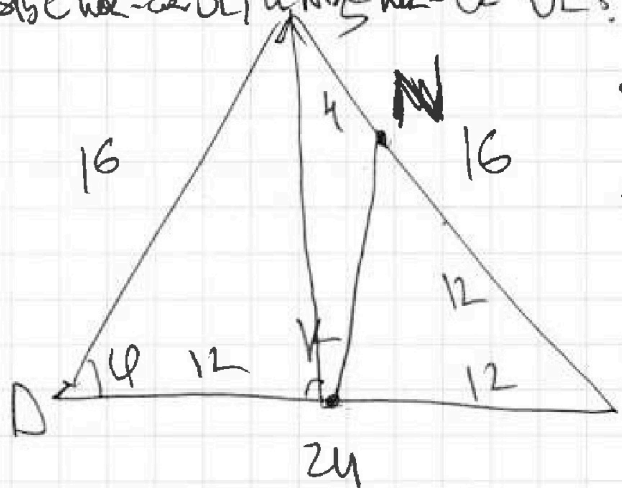
$$\begin{array}{r} \times 49 \\ 49 \\ \hline 196 \\ 441 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 111 \\ 111 \\ \hline 666 \\ 111 \\ \hline 1776 \end{array}$$

Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{24^2 \cdot 12 \cdot 25}{49}$

b) (по геометрии): \Rightarrow $HK \perp AU = 12$, а $AN = 12e$

$\Rightarrow NE \in (SAD_1)$ \Rightarrow $\triangle SAD_1$ в SAB_1C_1 и $AD_1 \perp BC_1$



$$\cos \varphi = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow KM^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$= 12^2 \left(2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \right)^2$$

$$= 12^2 \Rightarrow KM = 12$$

$$KM = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow KM^2 = KO^2 + ON^2 - 2 \cdot KO \cdot ON \cdot \cos(\angle KON)$$

$$36 \cdot 2 = 50 - 50 \cos(\angle KON) \Rightarrow \cos(\angle KON) = -\frac{22}{50}$$

$$\cos(\angle KON) = -\frac{22}{50} \Rightarrow \angle KON = \arccos\left(-\frac{22}{50}\right)$$

$$\angle KMN \text{ при } BC = \arccos\left(\frac{33}{50}\right) \text{ или } \arccos\left(\frac{22}{50}\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

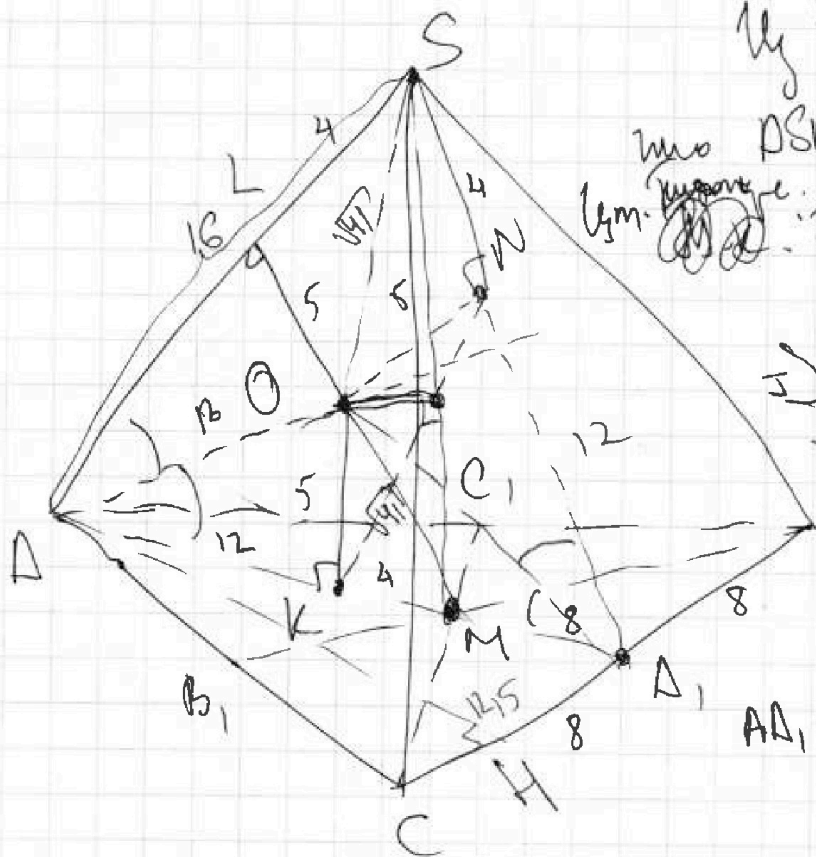
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) Дана пирамида $BSM \cdot N_1$, $SN = 4$, $R_{\Omega} = 5$.



Из условия а) известно,

что $PSM \perp BC$ и $SM \perp BC$.
 Изм. SM и $OS = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

$$\Rightarrow SL = \sqrt{41 - 25} = 4$$

$$\Rightarrow OL = 12;$$

$$AK = 12;$$

$$KM = 4;$$

$$MD_1 = 8 - MK$$

$$AD_1 = 24 - ; AK = 12, 5$$

$\odot N \perp (BCS)$
 $\odot K \perp (ABC)$

$\Rightarrow \angle KON = 180^\circ - \angle (SCB; ACB)$,
 и.е. $\angle (SCB; ACB) = 180^\circ - \angle KON$

$$AO = \sqrt{AK^2 + OK^2} = 13$$

В но не радиус, $AO = OA_1$ - и.к. OK - высота в $\triangle ABC$,

$$\Rightarrow D_1 O = 13; \text{ тогда } AN = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

~~$\odot N \in (SAA_1)$ и т.д. $SN + NA_1 = 20$~~

Угол \angle \dots ; не гр. сфер.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

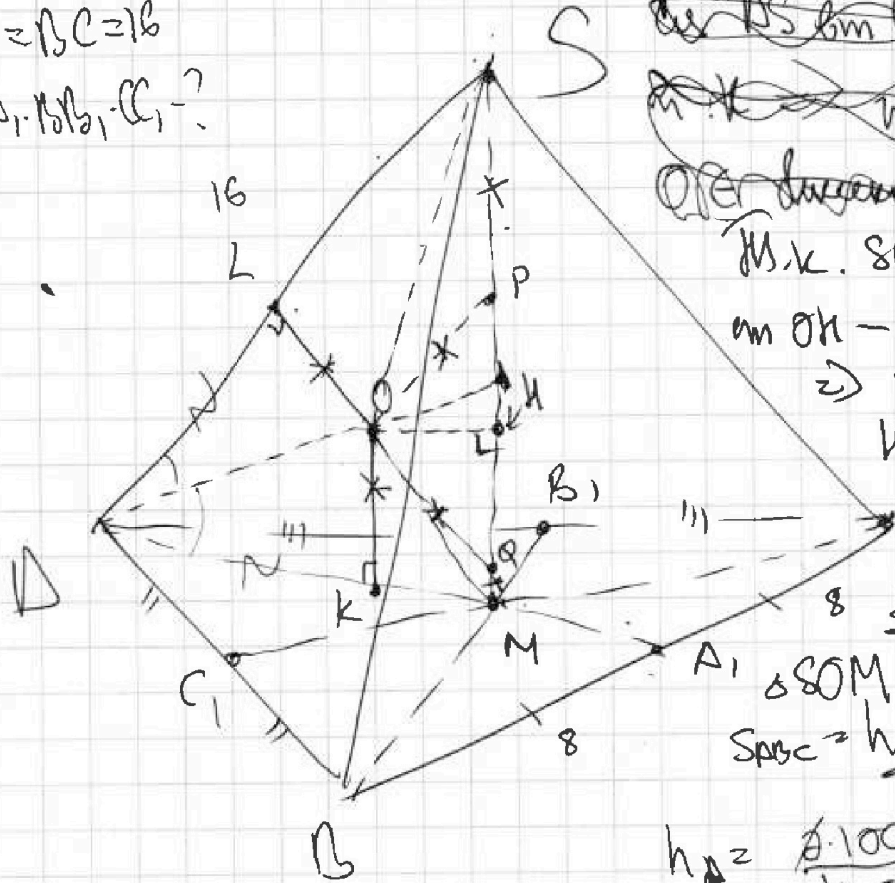
- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S_{ABC} = 100$
 $SA = BC = 16$
 а) AA_1, BB_1, CC_1 - ?



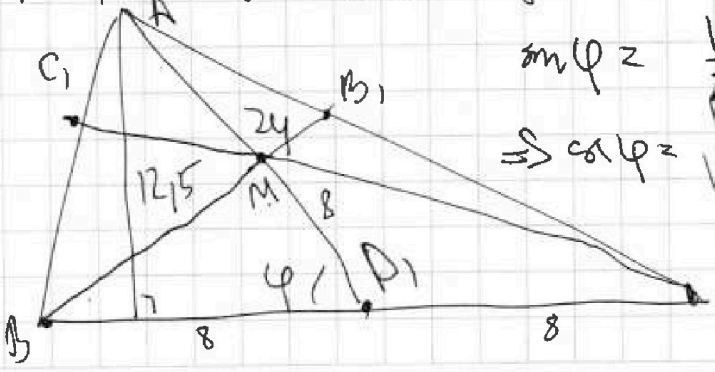
~~... ..~~
~~... ..~~
~~... ..~~
~~... ..~~
 м.к. $SP = MQ$
 м.к. $SH \perp$ на PQ
 $\Rightarrow SH = MK, m.k.$
 $HP = HQ \Rightarrow$

$\Rightarrow SO = OM$
 $\triangle SOM$ - прямоугольный
 $S_{ABC} = \frac{h_a \cdot BC}{2}$

$$h_a = \frac{S \cdot 100}{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8} = \frac{25}{2} = 12,5$$

~~... ..~~
 $\Rightarrow \triangle OLS \cong \triangle OKM, m.k. OL = OK, OS = OM, \angle$
 $\angle OLS = \angle OKM = 90^\circ \Rightarrow SL = KM \Rightarrow AM = 16,$

а) $AA_1 = 24$. Полностью \triangle -к ABC :



$$\begin{aligned}
 \sin \varphi &= \frac{12,5}{24} = \frac{25}{48} \\
 \Rightarrow \cos \varphi &= \sqrt{1 - \left(\frac{25}{48}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(1 - \frac{25}{48}\right) \left(1 + \frac{25}{48}\right)}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -5\pi \leq 10 \arcsin(\cos x) \leq 5\pi$$

$$\Rightarrow -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$\begin{cases} \pi - 2x \geq -5\pi \\ \pi - 2x \leq 5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \leq 6\pi \\ 2x \geq -4\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3\pi \\ x \geq -2\pi \end{cases}$$

Если $x \in [-2\pi; 0)$, то $\arcsin(\cos x) + \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2}$,

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi = -x - \frac{3\pi}{2}.$$

$$10(-x - \frac{3\pi}{2}) = \pi - 2x$$

$$-10x - 15\pi = \pi - 2x; \quad 8x = -16\pi; \quad x = -2\pi.$$

Если $x \in [0; 2\pi)$, то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi)$.

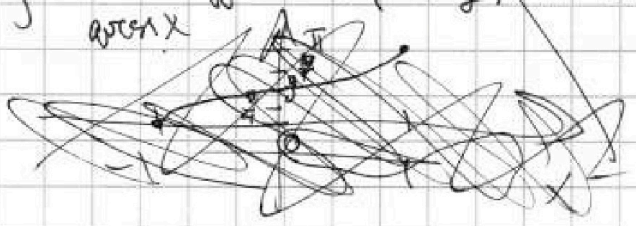
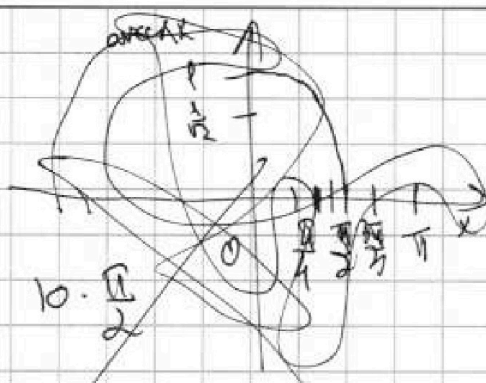
Если $x \in [-\pi; 0)$, то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi)$.

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi) = -x - \frac{3\pi}{2}; \quad \Rightarrow y = \arcsin(\cos x)$$

$$\Rightarrow y = -x - \frac{3\pi}{2}; \quad \Rightarrow y = \arcsin(\cos x) \Rightarrow 10(-x - \frac{3\pi}{2}) = \pi - 2x$$

\Rightarrow корень, и $x = -2\pi$.

~~арксинус косинуса.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\max z = \frac{1}{2} \sqrt{2(p^2 + c^2) - a^2}$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\sin x)\right) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arccos(\sin x) = \pi - 2x$$

$$4\pi = 10 \arccos(\sin x) \Rightarrow 2x \quad S = \Delta A_1 - BC \cdot \sin \varphi$$

$$2\pi = 5 \arccos(\sin x) - x$$

$$4m^2 = p^2 + c^2 - a^2$$

$$x = -2\pi + \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \quad x = -2\pi + \frac{6\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\pi}{4} \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$-2\pi + \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$c = \frac{\log_5 2x}{\log_5 y}$$

$$\log_5^4 + \log_5^4 \Rightarrow (d^2 - 2p)^2 - 2p^2 = d^4 - 4d^2p + 2p^2$$

$$\log_5^2 + \log_5^2 = d^2 - 2p$$

$$\frac{d^4}{p^2} - 5\left(\frac{d^2}{p}\right) + 5$$

~~$$c^4 - c^3 + c^2 - c + 1 = 0$$~~
~~$$c^4(c^2 + 1) - c(c^2 + 1) + 1 = 0$$~~
~~$$= (c^2 + 1)(c^2 - c) + 1 = (c^2 + 1)c(c - 1) + 1$$~~

$$f(c) = c^4 - c^3 + c^2 - c + 1$$

$$f'(c) = 4c^3 - 3c^2 + 2c - 1$$

$$\log_5 2x \times \log_5 y, \quad d^4 - 5d^2p + 5p^2 + 3 = 0$$

$$d(d^4 - 4d^2p + 2p^2 - p(d^2 - 2p) + p^2 + 3) = 0$$

$$d^4 - 4d^2p + 2p^2 - p d^2 + 2p^2 + p^2 + 3 = 0$$



$$S = \Delta A_1 - BC \cdot \sin \varphi$$

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\pi}{4}$$

$$x = -2\pi + \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$d = \log_5 2x \log_5 y = \log_5 2xy$$

$$b = \log_5 2x \log_5 y$$

$$x_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Для $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$: $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$.~~

~~$(\frac{\pi}{2} - x) \cdot 10 = \pi - 2x$~~

~~$5\pi - 10x = \pi - 2x$~~

~~$8x = 4\pi, x = \frac{\pi}{2}$ - ~~реш.~~~~

~~Для $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi]$: $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} + (x - \pi) =$~~

~~$x - 1,5\pi$~~

~~$10(x - 1,5\pi) = \pi - 2x$~~

~~$12x = 16\pi, x = \frac{4}{3}\pi$ - ~~реш.~~~~

~~$4,5\pi - 10x = \pi - 2x$~~

~~$8x = 4\pi, x = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} = 5,5\pi$~~

~~Для $x \in (2\pi; 3\pi]$: $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) =$~~

~~$x - 1,5\pi$~~

~~$10(x - 1,5\pi) = \pi - 2x$~~

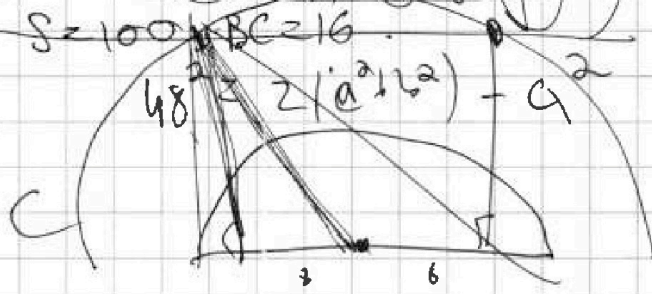
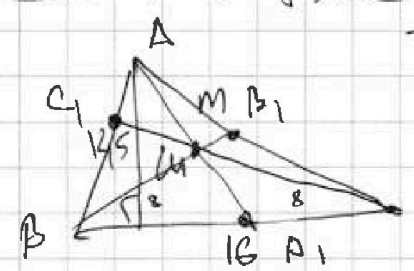
~~$10(4,5\pi - x) = \pi - 2x$~~

~~$45\pi - 10x = \pi - 2x$~~

~~Ответ: $x \in \{ \frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}\pi \}$.~~

Ответ: $x \in \{ -2\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi \}$.

~~$\log_5(2x) \cdot \log_5(2x) + \log_5(2x) \cdot \log_5(y) \cdot \log_5(2x) + \log_5(y) \cdot \log_5(2x) + \log_5(y)^2$~~
 ~~$= \log_5(2x) \log_5(2x) + \log_5(2x) \log_5(y) + \log_5(y) \log_5(2x) + \log_5(y)^2$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

ЛМОТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_5 2x = \frac{4}{\log_5 2x} - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 2x} - 3$$

$$x^5 + 3x - \frac{13}{3} = 0$$

$$3x^5 + 3x^2 + \frac{13}{3} = 0$$

(d.p.)

$$\log_5^4(2x) - \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 2x} + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3$$

$$x^5 + (x^4)^3 + 2x^2 + x^3 + 1 = -x^5 - 3x$$

$$\log_5^4 y + \frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_5 y} + 3 = 0$$

$$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x^4 = -x^5 - 3x$$

$$\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) + \frac{13}{3} \left(\frac{1}{\log_5 2x} + \frac{1}{\log_5 y} \right) = 0$$

$$\left(\log_5^4(2x) - \log_5^4(y) \right) \left(\log_5^3(2x) + \log_5^3(y) \right) = \frac{13}{3} \left(\frac{\log_5 2x}{\log_5 x \log_5 y} \right)$$

$$\log_5 \frac{2x}{y} \log_5^2 \frac{2xy}{y} \left(\log_5^2(2x) + \log_5^2(y) \right) = \frac{13}{3} \frac{\log_5 2x}{\log_5 x \log_5 y}$$

$$x^5 + y^5 + 3(x+y) = 0$$

$$(x+y) (x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 3) = 0$$

~~$$x^5 + y^5 = 0 \quad x = -y \quad \left(\frac{x}{y}\right)^5 + 1 = 0$$~~

$$x^3(x+y) + y^3(x+y) + 3(x^2 + y^2) = 0$$

$$(x+y) (x+y) (x^2 - xy + y^2) + 3(x^2 + y^2) = 0$$

$$x^4 - x^3y - x^2y^2 - xy^3 - y^4 = 3$$

$$x^5 - 2x^4 - 2x^3y - 2x^2y^2 - 2xy^3 - y^5 + 3y = 0$$