МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$ $abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2}$

$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$

$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$

Тогда из условия понятно:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 & (1) \\ x_2 + x_3 \geq 13 & (2) \\ x_1 + x_3 \geq 14 & (3) \\ y_1 + y_2 \geq 11 & (4) \\ y_2 + y_3 \geq 15 & (5) \\ y_1 + y_3 \geq 17 & (6) \\ z_1 + z_2 \geq 14 & (7) \\ z_2 + z_3 \geq 18 & (8) \\ z_1 + z_3 \geq 13 & (9) \end{cases}$$

Т.к. содержание в abc степеней 2, 3 и 5 не зависит друг от друга нужно получить

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = min_x \\ y_1 + y_2 + y_3 = min_y \\ z_1 + z_2 + z_3 = min_z \end{cases}$$

$(3): x_1 + x_2 + x_3 \geq 14 + x_2$

$(2) \Rightarrow x_3 \geq 13 - x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3) \Rightarrow x_1 + 13 - x_2 \geq 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \geq x_2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1) \Rightarrow x_2 + 1 + x_2 \geq 7$

$x_2 \geq 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (продолжение). Тогда $x_1+x_2+x_3 \geq 13$ – достигается при $x_1=4, x_2=3, x_3=10$

$y_1+y_2+y_3 \geq 17+y_2$

Из (4) $\cancel{(5)}$ $\Rightarrow y_1 \geq 11-y_2 \Rightarrow$ (6) $11-y_2+y_3 \geq 17$

$\Rightarrow y_3 \geq y_2+6 \Rightarrow$ (5) $\Rightarrow 2y_2+6 \geq 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_2 \geq 5$

Тогда $y_1+y_2+y_3 \geq 17+5=22$ – достигается

при $y_1=6, y_2=5$ и $y_3=11$

$z_1+z_2+z_3 \geq 43+z_2$

$(7) \Rightarrow z_1 \geq 14-z_2$

$(8) \Rightarrow 14-z_2+z_3 \geq 43 \Rightarrow z_3 \geq 29+z_2$

$(8) \Rightarrow z_2+29+z_2 \geq 18 \Rightarrow z_2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1+z_2+z_3 \geq 43$ – достигается при

$z_1=14$

$z_3=29, z_2=0$

Тогда $abc \geq 2^{13}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$ – ~~при~~ достигается

при $a=2^4\cdot3^6\cdot5^{14}$, $b=2^3\cdot3^5$ и $c=2^{10}\cdot3^{11}\cdot5^{29}$

Ответ: $2^{13}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

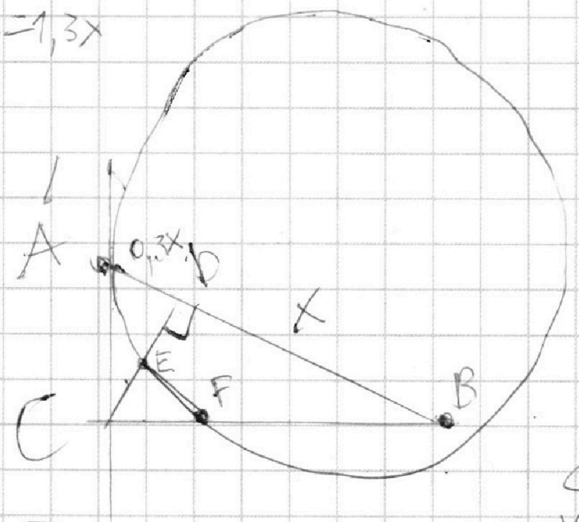
N 2

$BD = x \Rightarrow$
$AB = 1{,}3x$

$CD = \sqrt{0{,}3x \cdot x} = \sqrt{0{,}3}\,x$ — как высота

$AC = \sqrt{0{,}09x^2 + 0{,}3x^2} =$
$= \sqrt{0{,}39}\,x$

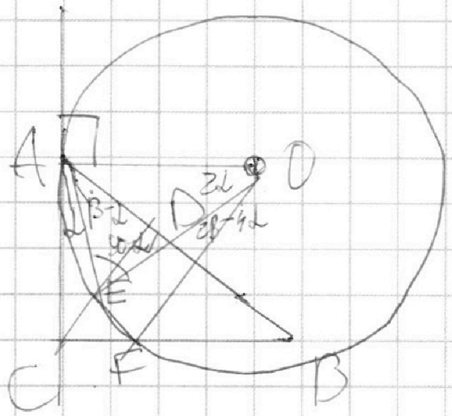
$BC = \sqrt{0{,}3x^2 + x^2} = \sqrt{1{,}3}\,x$

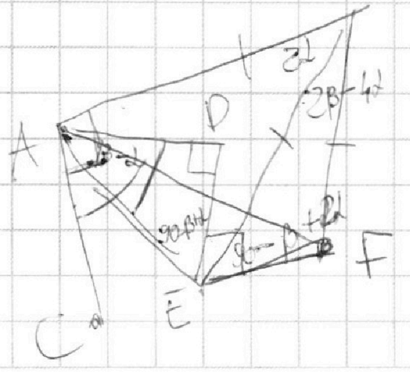


$\angle CAB = \beta$

Пусть $\angle \cancel{A}CAE = \alpha$, $\angle EAB = \beta - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AED = 90 + \alpha - \beta \Rightarrow \angle DEO =$
$= \angle OEA - \angle AED =$
$\angle OAE - \angle AED =$
$= 90 - \alpha - 90 - \alpha + \beta = \beta - 2\alpha$

$\angle DEF = 90 = \angle EDB$, т.к
$EF \parallel BD \Rightarrow$
$\angle OEF = 90 - \beta + 2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EOF = 180 - 2\angle OEF =$
$= 2\beta - 4\alpha \Rightarrow \angle AOF =$
$= 2\beta - 4\alpha + \angle AOE =$
$= 2\beta - 4\alpha + 180 - 2\angle AEO =$
$= 2\beta - 4\alpha + 180 - 2(90 - \alpha) =$



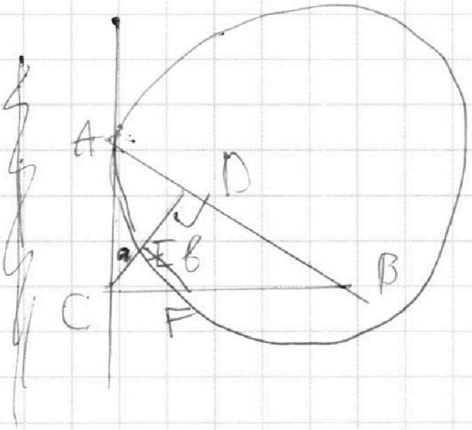


№ 2 (продолжение)

$= 2\beta - 2\alpha \Rightarrow \angle ADF = 2\beta - 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAF = \frac{1}{2}\angle ADF = \beta - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~AE изогонально~~ AF. $\angle CAF = \angle EAD = \beta - \alpha$



$\triangle EAD \sim \triangle CAF \Rightarrow$

$\frac{CF}{AC} = \frac{ED}{AD}$ (1)

$CE = a$, $FE = b \Rightarrow$

$\Rightarrow CF = \sqrt{a^2+b^2}$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$: $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{0,3}x} = \frac{b}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{0,3}\,b$

(1) $\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{0,39}\,x} = \frac{\sqrt{0,3}\,x - a}{0,3x}$

$\sqrt{1,3}\,b = \sqrt{0,3}(x-b)\sqrt{0,39}$

$(\sqrt{1,3}+\sqrt{0,3}\cdot\sqrt{0,39})\,b = \sqrt{0,3}\,\sqrt{0,39}\,x$

$\frac{S_{ACB}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0,3}x\cdot 0,3x}{\frac{1}{2}ab} = \frac{\sqrt{0,3}x\cdot 0,3x}{\sqrt{0,3}\,b^2} =$

$= \frac{0,3\cdot(\sqrt{1,3}+\sqrt{0,3\cdot 0,39})^2}{0,3\cdot 0,39} = \frac{1,3^2}{0,3} = \frac{16,9}{3}$

Ответ: $\frac{16,9}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N3: $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$\arccos y \in [0, \pi] \Rightarrow 0 \le \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \le \pi$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} \in [-2\pi, 3\pi]$

I сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [0, \pi] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x - \frac{\pi}{2}$

$x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow x = \pi$ - уд

II сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x - \frac{3\pi}{2}$

$x - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{4}\pi$ - уд

III сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [2\pi, 3\pi] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x - \frac{5\pi}{2}$

$x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{28}{10}\pi \Rightarrow x = \frac{7}{2}\pi$ - уд

IV сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [-2\pi, -\pi] \Rightarrow \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = x + \frac{3\pi}{2}$

$x + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x = -1{,}2\pi \Rightarrow x = -\frac{3}{2}\pi$ - уд

V сл: $x - \frac{\pi}{2} \in [-\pi, 0] \Rightarrow$ аналогично $x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

Ответ: $x \in \{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{7}{2}\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

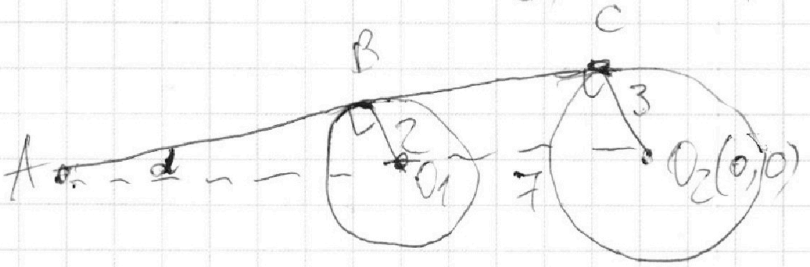
МФТИ

№ 4 (продолжение)

Пусть i-го кас-ю задан угловой коэф-нт k_i $\Rightarrow$ При $k>0$: $k \in (k_3, k_1) \cup (k_1, +\infty)$

при $k<0$: $k \in (k_2, k_4) \cup (-\infty, k_3)$

Из симметрии $\Rightarrow$ $k_1 = -k_2$; $k_3 = -k_4$



Из условия

$$\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

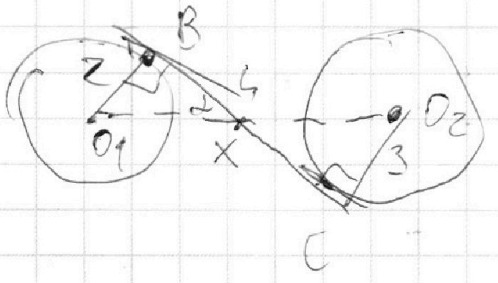
$$AO_1 = \frac{2}{3} AO_1 + \frac{2}{3} \cdot 7 \Rightarrow$$

$$AO_1 = 14$$

$$k_1 = tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{14^2-4}} = k_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{48}}$$

Из подобия: $\dfrac{O_1X}{XO_2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$



$$O_1X = \frac{2}{3}(7 - O_1X)$$

$$O_1X = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

$$k_4 = -tg\alpha = -\frac{2}{\sqrt{2{,}8^2-4}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{0{,}96}} = -k_3$$

~~Ответ:~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 4: Т.к. $k = -\frac{1}{3a} \Rightarrow a = -\frac{1}{3k} \Rightarrow$
(продолжение

$\Rightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{1}{3k_1}\right) \cup$

$\cup \left(-\frac{1}{3}k_1, -\frac{1}{3}k_3\right) \cup \left(-\frac{1}{3}k_4, -\frac{1}{3}k_2\right) \cup \left(-\frac{1}{3}k_2, +\infty\right)$

Ответ:
$a \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{48}}{3}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{48}}{3}, -\frac{\sqrt{0,96}}{3}\right) \cup$
$\cup \left(\frac{\sqrt{0,96}}{3}, \frac{\sqrt{48}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{48}}{3}, +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N 4: $\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ ((x+7)^2+y^2-4)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$

~~(1) - ∀ прямая с угл-м коэф-ом~~ $= -\frac{1}{3a}$

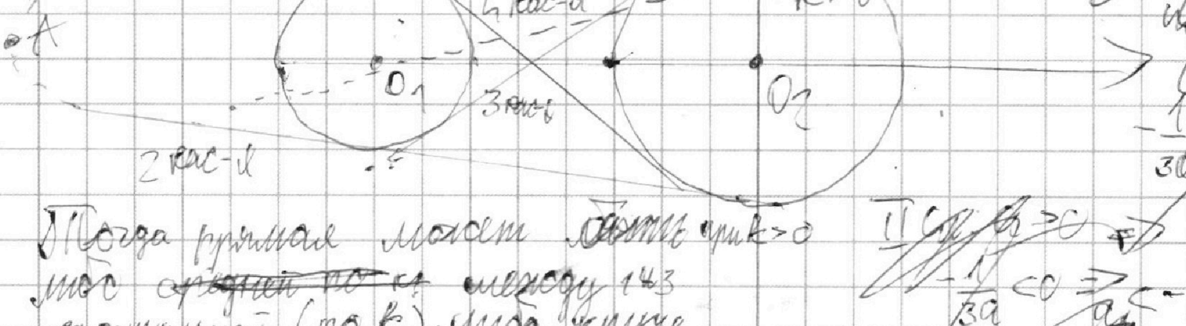
$(1) \Rightarrow -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} = y$ - прямая с $k = -\frac{1}{3a}$,

а т.к. b - ∀-е, то это ~~зависящая от b~~ произвольная прямая

(2): $\left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \text{ - окр-ть с центром в } (-7,0) \text{ и } R=2 \\ x^2+y^2=9 \text{ - окр-ть с центром в } (0,0) \text{ и } R=3 \end{array} \right.$

Построим эти окр-ти.

Заметим, что такое b - ∃-ет, если прямая, задаваемая 1 ур-ем однозн. проходит ч/з обе окр-ти и не касается сразу двух



Пусть i-й касательную задает a_i

I сл.: $a<0 \Rightarrow$
$-\frac{1}{3a} > 0 \Rightarrow$
$k_3 < -\frac{1}{3a} < k_1$
итд
$-\frac{1}{3a} > a_1$

II сл. $a>0 \Rightarrow$
$-\frac{1}{3a} < 0 \Rightarrow a_3 < -\frac{1}{3a} < a_4$
или $-\frac{1}{3a} < a_2$

Тогда прямая может при $k>0$ или ~~средней по к~~ между 1 и 3 касательной (по k), либо круче 1 ~~или между~~

Аналогично симм-но $k<0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 (продолжение

~~Заметим, что $g(-a) = f(a) \Rightarrow b_1 = -a_2$~~

~~$\Rightarrow b_1 = -a_2 = 0 \Rightarrow \log_7 6x_2 + \log_7 y_1 = 0$~~

~~$a_1 + b_2 = 0$~~

~~$6x_2 y_1 = 1 \Rightarrow x_2 y_1 = \frac{1}{6}$~~

~~$\log_7 6x_1 + \log_7 y_2 = 0$~~

~~$6x_1 y_2 = 1 \Rightarrow x_1 y_2 = \frac{1}{6}$~~

Заметим, что $f'(a) = 4a^3 + \frac{3{,}5}{a^2} = 0$ при

$a_0 = -\sqrt[5]{\frac{3{,}5}{4}} < 0$

Заметим, что при $a > 0$ $f(a)$ монотонна и возрастает от $-\infty$ до $+\infty \Rightarrow$ имеет 1 корень. При $a = 0$ $f(a)$ ~~убывает~~ убывает

~~от при a от $(-\infty; a_0)$ и возрастает~~

~~при $a \in (a_0, 0) \Rightarrow$ если $f(a_0)$, то~~

При $a < 0$ $f(a) > 4 > 0 \Rightarrow$ корней не имеет.

Сл-но $f(a)$ имеет один корень, и т.к. $f(a) = g(-a)$, то $g(b)$ тоже, причем их $\Sigma = 0$

Тогда $\log_7 6x + \log_7 y = \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1$

$xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5:

$$\begin{cases} \log_7^4 6x - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \\ xy = 7 \end{cases}$$

ОДЗ: $y \neq 1$, $x > 0$, $x \neq \frac{1}{6}$, $y > 0$

$\log_7 6x = a$, $a \neq 0, b \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} a^4 - \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{a} - 4 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4 \end{cases}$

$\log_7 y = b$

$\log_{6x} 7 = \frac{1}{a}$

$\log_y 7 = \frac{1}{b}$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0 = f(a) = 0 \\ b^4 + \frac{3,5}{b} + 4 = 0 \quad g(b) = 0 \end{cases}$$

~~$f(a) - f(b) = a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 - b^4 - \frac{3,5}{b} - 4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{3,5(a+b)}{ab} \neq 0$~~

$(a+b)$

~~$f'(a) = 4a^3 + \frac{3,5}{a^2} = 0 \Rightarrow$ один экстремум $a = \sqrt[5]{\frac{3,5}{4}} \Rightarrow$ т.к.~~

~~$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, а $a^4 > \frac{3,5}{a}$ при больших a,~~

т.о. у $f(a)$ ровно 2 корня $a_1 < a_2$

Аналогично у $g(b)$ – 2 корня $b_1 < b_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6: Заметим, что ГМТ точек $B(x_2, y_2)$ отн-но $A(x_1, y_1)$ таких, что $4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$ — ромб с диагоналями 10 и 40 перпендикулярными оси OX. На его границе, содержатся $\frac{40}{\left(\frac{4}{1}\right)} \cdot 4 =$

$= 40$ различных точек B с целочисленными координатами

Заметим, что 2 стороны ромба || 2 сторонам ||-ма т.к. $\frac{4}{1} = \frac{68}{17}$ — обозначим их за I и II

Заметим, что длина ст-ны △-ника || OX = 19

Т.к. $10 < 19 < 2 \cdot 10$. Тогда ~~одна~~ либо I, либо

II сторона полностью выйдет за пределы

параллелограмма, а кол-во ~~В на ней можно~~

~~будет посчитать как~~ одна (мб не полностью

будет ~~внутри~~). Тогда

$A(x_1, y_1)$ ~~∈ △-нику~~: $\begin{cases} 0 \le x_1 \le 68 \\ y_1 \le -\frac{1}{4}(x+19) \end{cases}$ ~~т.к. внутри △-ника~~

$B(x_2, y_2)$: $\begin{cases} 0 \le x_2 \le 68 \\ -\frac{1}{4} x_2 \le y_2 \le -\frac{1}{4}(x_2 + 19) \end{cases}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6:

~~$y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10)$~~

~~$y_2 = -\frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10)$~~

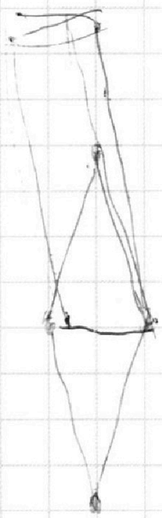
~~ур-я сторон ромба~~

~~$y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1 + 10)$~~

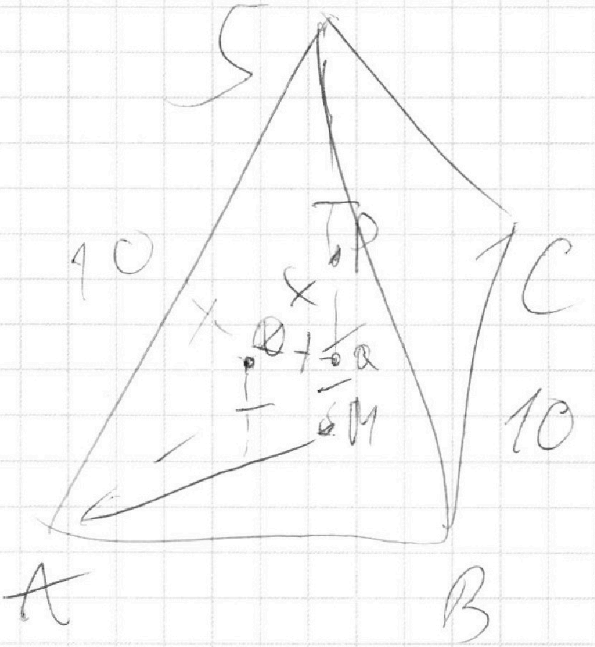
~~$y_2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_1 - 10)$~~

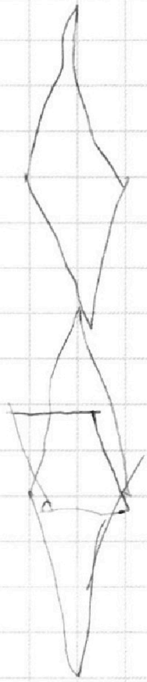
Черновик

$$\begin{cases} y_1 > -\frac{1}{4}x_1 \\ y_1 < -\frac{1}{4}x_1 + 19 \\ 0 < x_1 < 68 \\ \left[\begin{array}{l} y_2 = -\frac{1}{4}x_2 - 40 \\ y_2 = -\frac{1}{4}x_2 + 40 \end{array}\right. \end{cases}$$

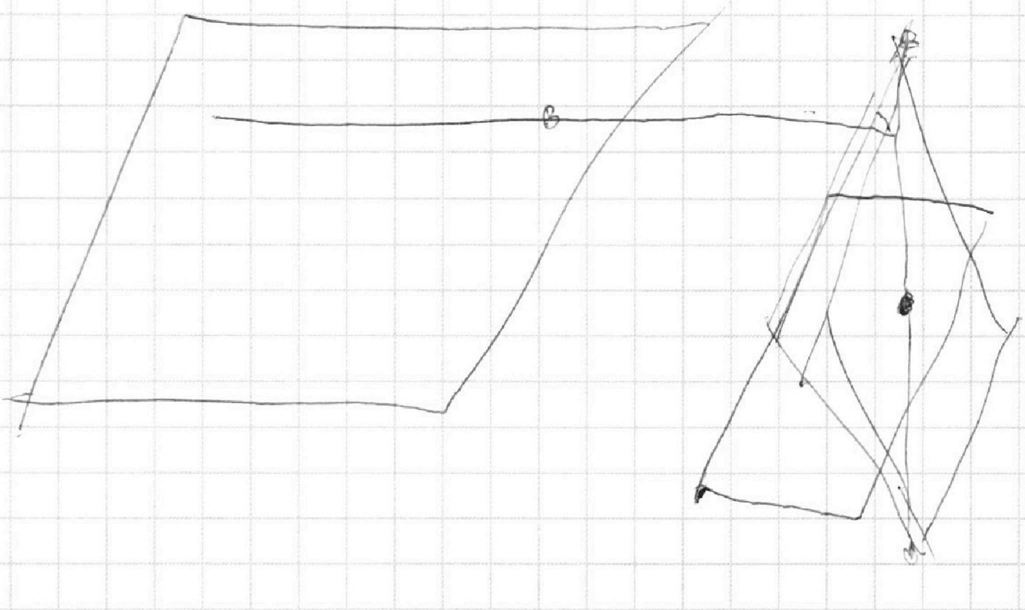


Черновик





N 6.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

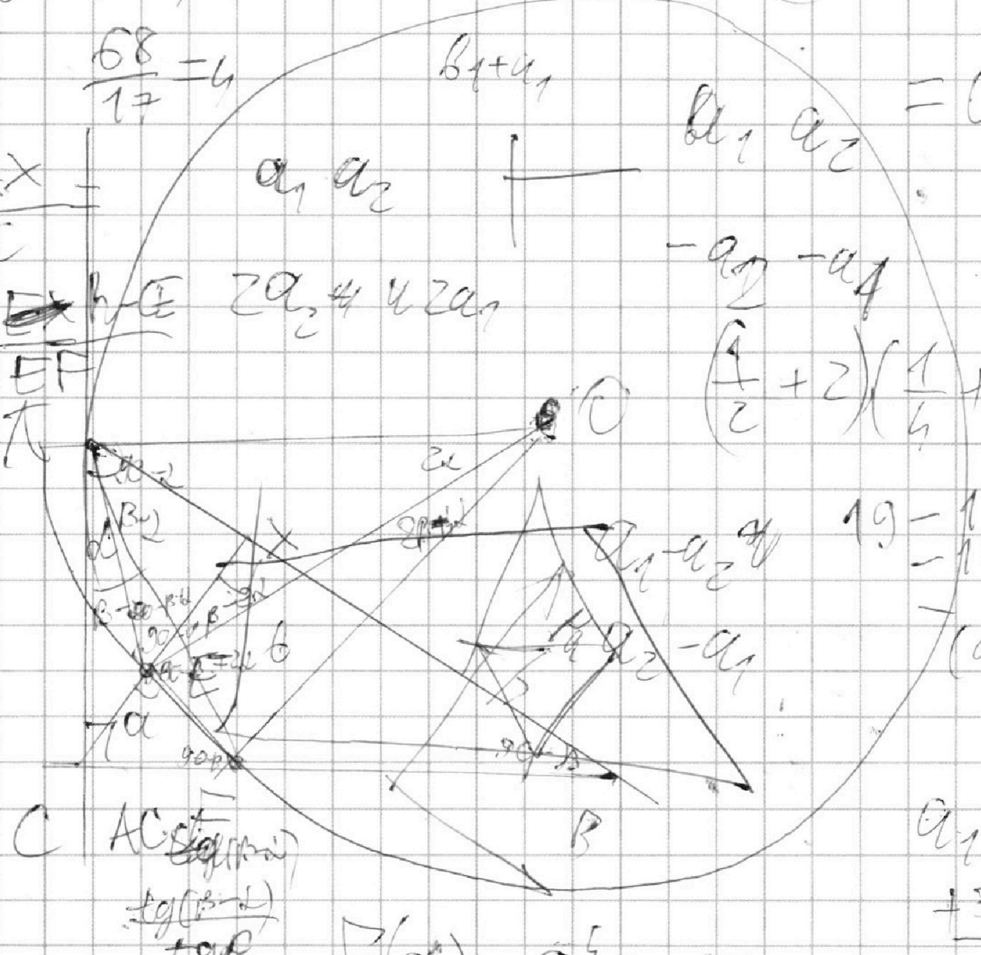
$90-\alpha-(90-\beta+\alpha)=\beta-2\alpha$

$(a_1+a_2)(a_1^2+a_2^2)+\frac{3{,}5}{a_1a_2}$

$a^5+4a-3{,}5=0$

$\frac{68}{17}=4$

$\frac{Ax}{AC}=\frac{EF}{EF}$



$\left(\frac{1}{2}+2\right)\left(\frac{1}{4}+6\right)+\frac{3{,}5}{2}$

$19=10$

(a_1-a_2)

$a_1^4-a_2^4+3{,}5(a_1-a_2)=0$

$F(a)=a^4-\frac{3{,}5}{a}+4=0$

$90-\alpha+x=180-\beta+\alpha$

$x=90-\beta+2\alpha$

$\begin{cases} a_1^4-\frac{3{,}5}{a_1}+4=0 \\ a_2^4-\frac{3{,}5}{a_2}+4=0 \end{cases}$

$\frac{CE}{a}=\frac{EF}{x}$

$\sqrt{0{,}3}EF=a$

$x_2-x_1+y_2-y_1$

$\sqrt{x^2+(90-4x)^2}$

40

X

$(a^2b-ab^2)(a^2+b^2)=a^4b-a^3b^2+a^2b^3-ab^4-3{,}5$

$a+b=\log_{\frac{1}{7}}6xy=$

$x(x-2b)($

b_1+a_2 отв
b_2+a_1

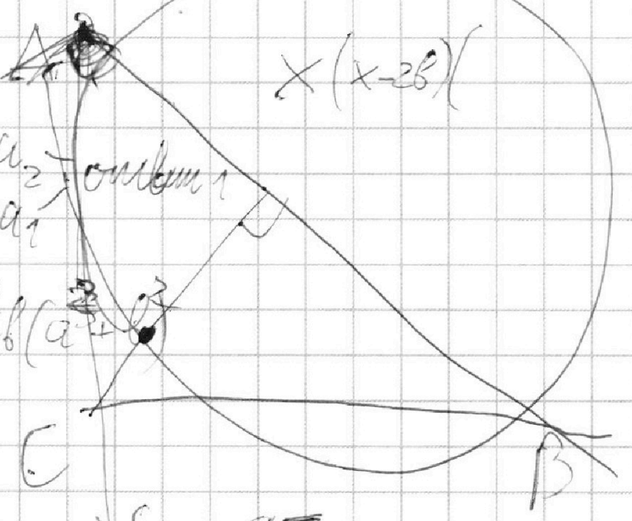
$ab(a^2+b^2)$

$a^4-b^4-\frac{3{,}5}{\frac{1}{a}}+\frac{3{,}5}{\frac{1}{b}}=0$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)-$

$\frac{1}{2}\ 0{,}35x\ \sqrt[2]{0{,}3}$

$\frac{3{,}5(a+b)}{ab}=0$



$(a+b)($

a_1

a_2

$6-\frac{5}{2}=3{,}5$

$\log_{7}6x$

$\log_{7}6x=a$

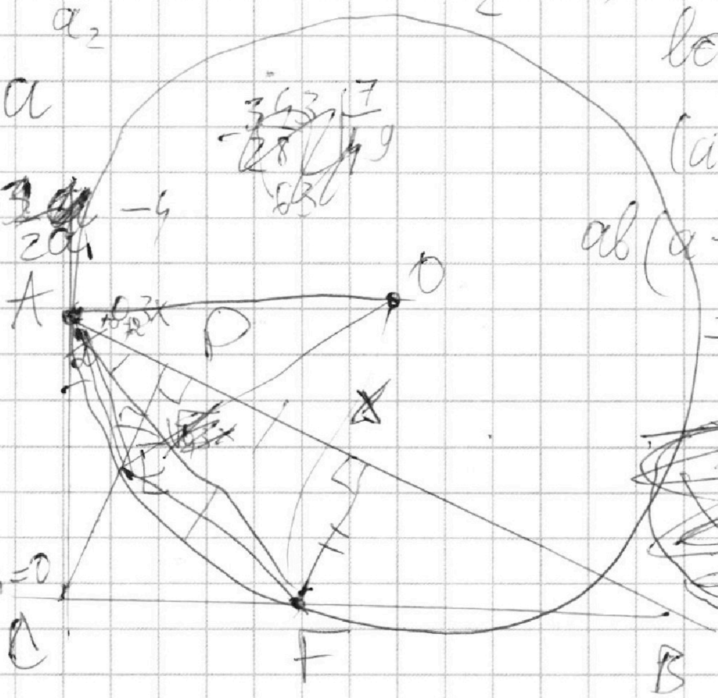
$(a+b)(a-b$

$a^4-\frac{2}{a}=\frac{3}{2a}-4$

$ab(a-b)(a^2+b^2)=$

$a^3\ a^2$

$4a^3+\frac{3{,}5}{a^2}=0$



$\sqrt{2a^2+b^2-c}$

$a^4-\frac{3{,}5}{a}+4=0$

черновик

$4a^5-3{,}5=0$ $\quad a^5+4a-3{,}5=0$

$\begin{cases} a^4-\frac{3{,}5}{a}+4=0 \\ b^4+\frac{3{,}5}{b}+4=0 \end{cases}$

$\frac{5}{6}\ 0{,}x=2$ $\quad b^4+\frac{6}{b}=\frac{5}{2b}-4$

$1{,}96-$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

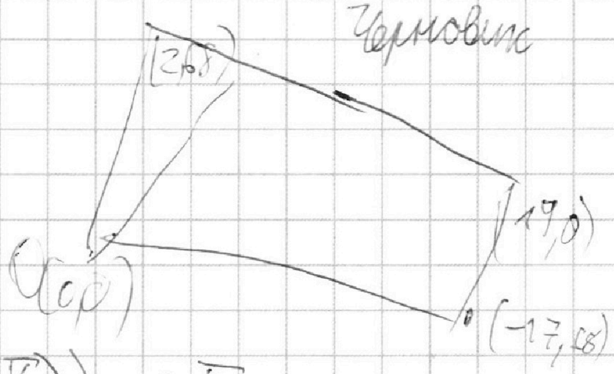
№1: $ab: 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$\frac{4}{5}x = \frac{18\pi}{10} = \frac{9}{5}\pi$

$\frac{9}{4}\pi - \frac{\pi}{2} =$



№3: $\arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2})) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$\frac{4}{5}x = \frac{8}{5}\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \le \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5} \le \frac{5\pi}{2}$

$\frac{4}{5}x =$

$\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{3\pi}{2}$

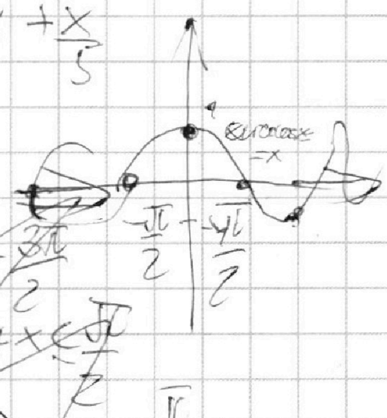
$5\arccos$

$\sin(-\frac{3\pi}{2})$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{3\pi}{10} + x \le \frac{\pi}{2}$

$3 + 25 =$

$\frac{4}{5}x =$



$\frac{\pi}{2} - x$

I а: $x - \frac{\pi}{2} \le 0$

$x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$

$3 - 15$

$x - \frac{\pi}{2}$

$-\frac{13}{10}\pi \le x - \frac{\pi}{2} \le -\frac{3\pi}{10}$

$\arccos(\cos 2\pi) = 0$

$\frac{4x}{5} = \frac{3\pi}{10}$

$0 \le \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \le \pi$

$-\frac{13}{10}\pi$

$6\pi \ge x \ge -4\pi$

$x \ge -\frac{3\pi}{2}$

$\frac{6}{5}$

$\frac{3\pi}{10}$

$x = 2\pi$

$\arccos(\cos\frac{3\pi}{2})$

$\frac{7}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = 3\pi$

$\frac{x}{5} \le \frac{7\pi}{10}$

$\arccos \cos x = x + 2\pi z = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$

$= \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

$x \le \frac{7\pi}{2}$

$\frac{4x}{5} + 2\pi z = -\frac{3\pi}{10}$

$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\cos 0\pi)) = \pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1: Черновик

$x_1+x_2+x_3=$
$=14+x_2$

$x_3 \geq 13-x_2$

$x_1+13-x_2 \geq 14$

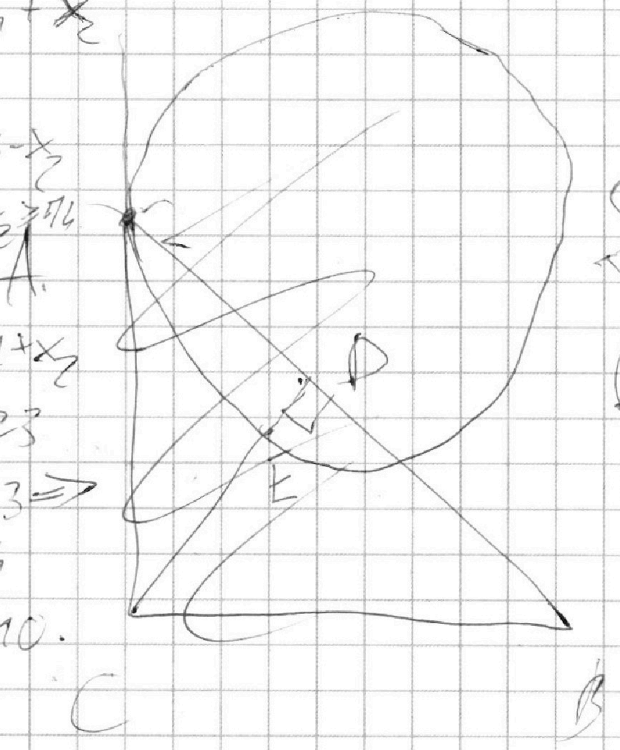
$x_1 \geq 1+x_2$

$x_2 \geq 3$

$x_2=3 \Rightarrow$

$x_1=4$

$x_3=10.$



$a=5^x$

$b=5^y$

$c=5^z$

$$\begin{cases} x+y \geq 14 \\ \cancel{x}y+z \geq 18 \\ x+z \geq 43 \\ x+y+z=\max \end{cases}$$

$43-z+y \geq 14$

$y \geq 14-43+z$

$2z+14-43 \geq 18$

$z \geq \frac{47}{2}=$

$=24$

$z=24 \Rightarrow$

$x=43-24=$

$9 \quad \left(\left(x^2+7\right)^2+y^2-4\right)\left(x^2+y^2-9\right)=0$

$y_2=5$

$y_1=6$

$y_3=11$

$\cancel{24+14=38}$

$x \geq 14-y$

$14-y+z \geq 43$

$\frac{4}{5}x=-\frac{1}{5}\sqrt{\pi}$ $43-$

$x=-\sqrt{\pi}$

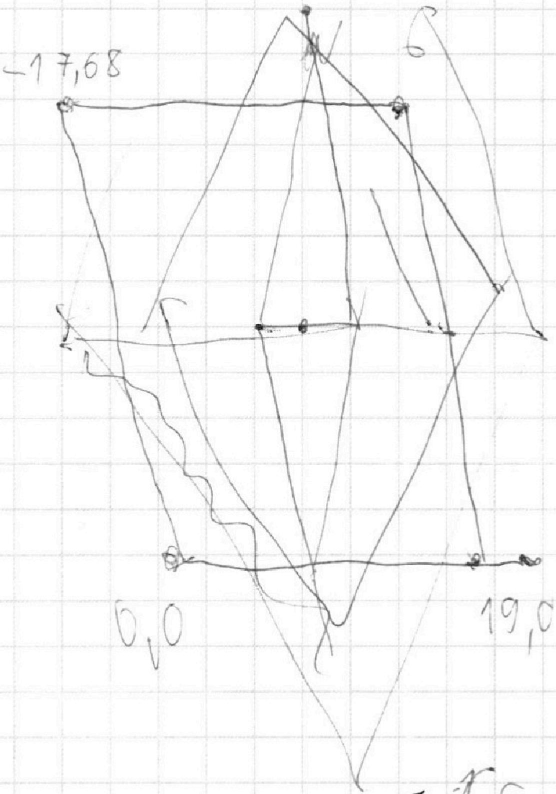
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик.



$a^4 - \frac{3,5}{a} + 4 = 0$

$(a+b)^4 - \frac{3,5}{a+b} + 4 = 0$

$\begin{cases} x_1 < 68 \\ x_1 > 0 \\ y_1 > -4x \\ y_1 < -4x + 19 \end{cases}$

$4a^3 + \frac{3,5}{a^2} = 0$

$a = \sqrt[5]{\frac{3,5}{4}}$

$(\sqrt{1,3})^2 \cdot 0,3$

$\sqrt[5]{4 \cdot 3,5^4} +$

$\frac{(\sqrt{1,3}(\cancel{1+0} \cdot 1,3))^2}{0,39} = \frac{1,3^2}{0,3}$

$1 - 3,5 + 4$

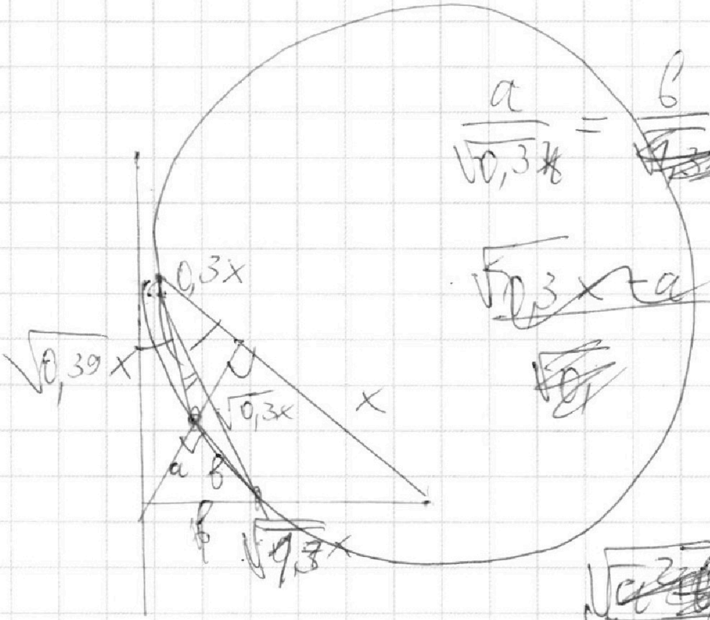
$\in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик



$\frac{a}{\sqrt{0,3x}} = \frac{b}{\cancel{\sqrt{0,3x}}}$

$\sqrt{0,3x} + a$

$\frac{\sqrt{a^2 \ldots}\ 1,09a^2}{\sqrt{0,39x^2}} = \frac{\sqrt{0,3x} - a}{0,3x}$

$\frac{1,09a^2 \cdot 0,09}{0,39} =$

$\frac{0,3x \cdot \sqrt{0,3x}}{\sqrt{0,3x}\,b^2}$

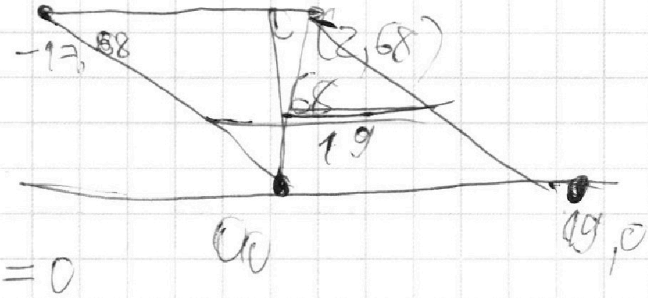
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

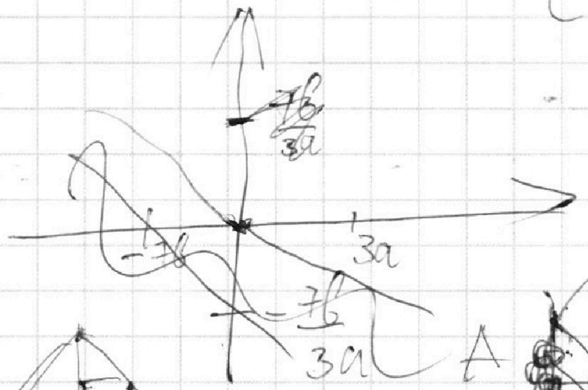


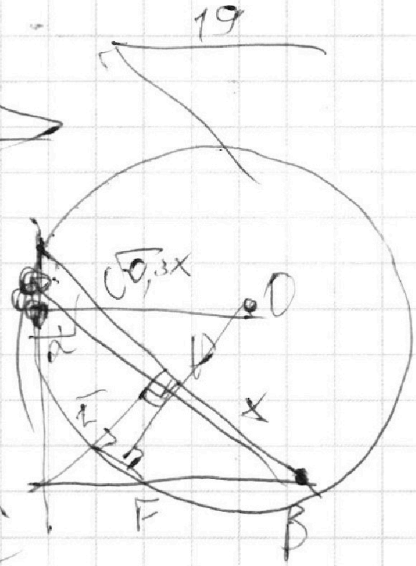
$$\frac{x}{-76} + \frac{y}{-\frac{76}{3a}} + 1 = 0$$

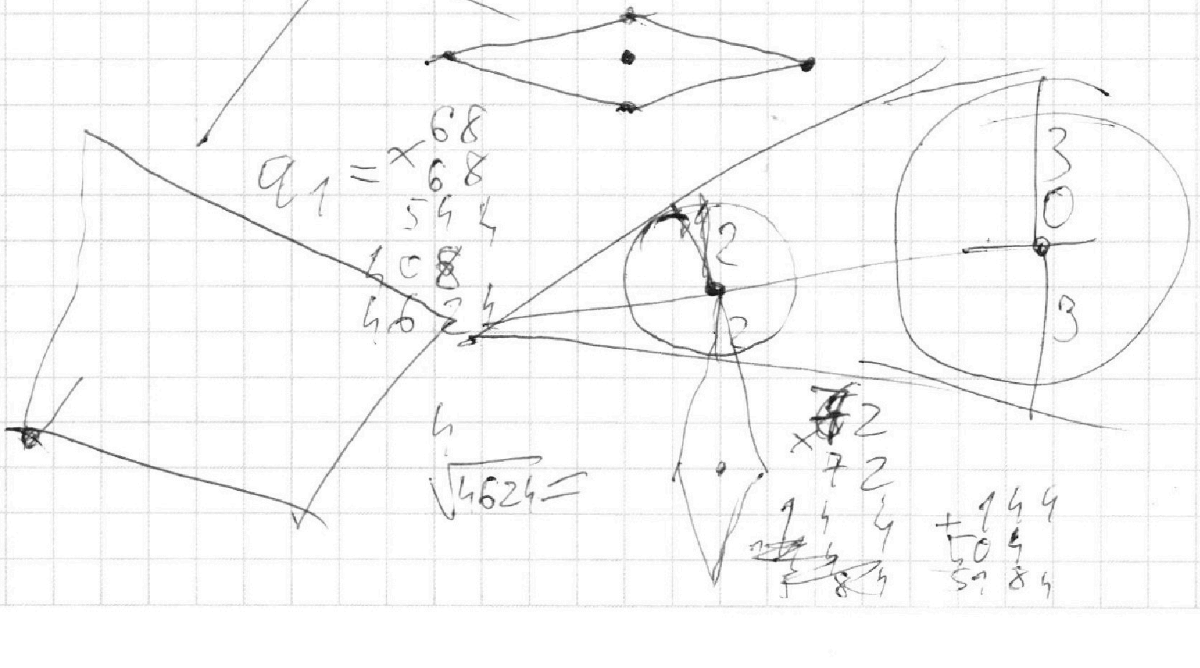
$-\frac{1}{3a}x + 76 = y$ – прямая

$(-17,68)$

$c\ k = -\frac{1}{3a}$







$a_1 = 68 \times 68$
544
408
4624

$\sqrt[4]{4624} =$

72 × 72
144
504
5184

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

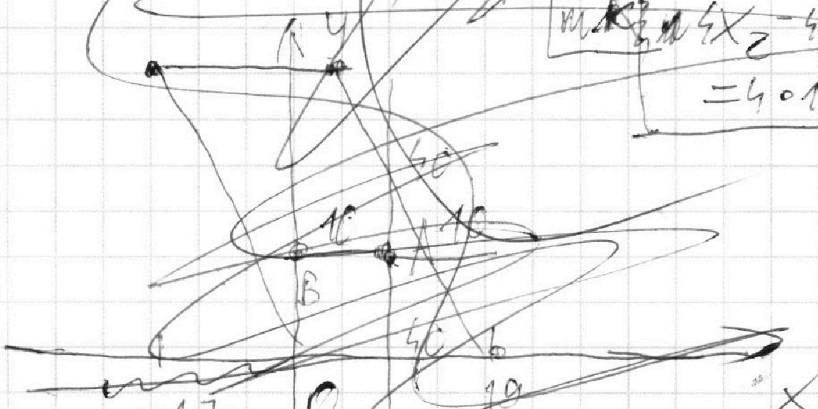
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~N6: Заметим, что мн-во точек, отн-но $A(x_1, y_1)$ и таких, что $4x_2-4x_1+y_2-y_1=40$ — выглядит как ромб с отн-ем диагоналей 40 и 10. Заметим, что высоты пар-мма = 6, 8 и 19. Заметим, что расстояние между двумя точками по оси Ox в ... =~~

~~Заметим, что расстояние м/у двумя т-ми по оси Ox = 19 ⩾ 10 ⩽ 10 ⇒ при выборе ∀ точки A будет существовать ровно одна B такая, что AB = 10, AB ∥ Ox ⇒ точки A и B подходят, т.к. $4x_2-4x_1+y_2-y_1 = 4\cdot10+0 = 40$~~



Черновик