



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-15; 90)$ ,  $Q(2; 90)$  и  $R(17; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р.с.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

Решение:  $a \cdot b : (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$

$b \cdot c : (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13})$

$a \cdot c : (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{23})$

Пусть  $a = 2^{d_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\delta_1} \cdot p_1$ ,  $b = 2^{d_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\delta_2} \cdot p_2$ ,  $c = 2^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_3} \cdot p_3$ .

Где  $d_1, d_2, d_3$  - степени 2, при каком-то из них  $a, b, c$ . А  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

и  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  - степени 3 и 5 соотв.  $p_1, p_2, p_3$  - все остальные простые

множ.  $a, b, c$ . Поскольку нам требуется наименьшее произв.  $a \cdot b \cdot c$ ,

то  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ . Тогда переписали условия с учетом новой обозначки!

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 \geq 6 \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ d_1 + d_2 \geq 11 \end{array} \right. \quad \text{— это система для произв. } a \cdot b.$$

соотв. у нас одну переменную должны выписать для 3х чисел

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 \geq 6 \quad (1) \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \quad (2) \\ d_1 + d_2 \geq 11 \quad (3) \end{array} \right. \quad \text{Значит просуммируем } (1), (1^*) \text{ и } (3').$$

Получим, что  $2d_1 + 2d_2 + 2d_3 \geq 36$  или

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 18$$

$$d_2 + d_3 \geq 14 \quad (1^*)$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 21 \quad (2^*)$$

$$d_2 + d_3 \geq 13 \quad (3^*)$$

$$d_1 + d_3 \geq 16 \quad (4')$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 25 \quad (2')$$

$$d_1 + d_3 \geq 28 \quad (3')$$

А и-то:  $2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 59$ . Поскольку

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$  - все-таки степенными ~~просто~~

простыми чисел при разложении натуральных чисел,

то  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \in \mathbb{Z}$ . Т.е.  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 29,5$ , тогда  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$U \text{ также } 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 \geq 52$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 26.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 26. \end{cases}$$

Но при этом заметим, что

$$U \text{ (3')} : d_1 + d_3 \geq 28.$$

Тогда, если мы найдем такие  $d, \beta, \delta$ , что соблю. рав-во, то это и будет наименьшим произведением а.б.с. По шольцу

$$a \cdot b \cdot c = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot 5^{\delta_1+\delta_2+\delta_3}$$

Заметим, что при  $d_1=4, d_2=2, d_3=12$  - соблю. усл.  $U$  (1), (1') и (1'').

и  $U \leq 2$ . По А.К.О!  $\beta$  где  $\beta_1=5, \beta_2=5, \beta_3=20$ .

и где  $d_1=14$  и  $d_2=14$ .

Значит  $\beta$  наим. возможн. знач. произв. а.б.с:

$$a \cdot b \cdot c \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н.д.

Решение:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AB}{AB} = \frac{7}{2}$$

Пусть пусть  $BD = 1$  и  $AD = 0,4$ .

Заметим, что если  $\angle B = 2$

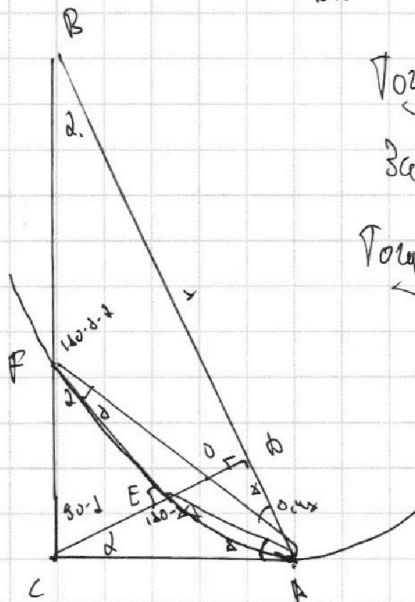
тогда  $\angle BCD = 90 - d$  и  $\angle OCA = d$

$\angle CAD = 90 - d$ .

Заметим, что  $\angle BAF = \angle AFE$ ,

как corresp. угл. при II-ух

$AB$  и  $FE$  и сек.  $FA$



Также, поскольку  $AC$  - кас. и ок-ти по угл., то  $\angle EAC = \angle EFA$

как  $\angle$ -на орг кас. и сек.  $\angle CEF = \angle CAB$  - как corresp.  $\angle CFE = \angle CBA$

как corresp.  $S_{ACD} : S_{ABC} = AD : AB = \frac{2}{7}$ .

$$S_{CBD} : S_{ABC} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{7}$$

$$\triangle CFE \sim \triangle CBD \text{ (по 2-м угл.)}; \frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD} \quad CD = \frac{CB \cdot AC}{AB}$$

$$CD = \frac{CE \cdot CB}{CF}$$

$$\frac{CF \cdot CB}{CF} = \frac{CB \cdot AC}{AB} \Rightarrow \frac{CF}{CF} = \frac{AC}{AB}$$

$$AC^2 = AD \cdot AB = 0,4 \cdot 1,4 = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда

$$\cos \angle = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow BC = \sqrt{BD \cdot BA} = \sqrt{\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{3} x} = \sqrt{\frac{49}{15}} \cdot x$$

Тогда  $CD = \frac{CB \cdot AC}{AB} = \frac{\sqrt{\frac{49}{15}} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{14}{25}} \cdot x}{1,4x} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{7\sqrt{5}} \cdot x$

Заметим, что  $\triangle AFB \sim \triangle CEA$  (по 2-м углам),

Тогда  $\frac{CE}{FB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{\frac{14}{25}} \cdot x}{1,4x} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{14}}{7} \cdot FB$

Но из параллельности:  $\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD}$

$$CF \cdot CD = CE \cdot CB$$

$$CF \cdot CD = CE (CF + FB)$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CF + FB} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{7} \cdot FB}{\frac{\sqrt{14}}{7} \cdot FB + FB} = \frac{CB - FB}{CB}$$

Поэтому  $\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} =$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{7\sqrt{5}} \cdot x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot x$$

$$= \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{5\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{14}}{5}$$

$$CE = \frac{\sqrt{14}}{5} CF$$

$$= 1 - \frac{FB}{CB} = \frac{\sqrt{14} \cdot FB}{7 \cdot CB}$$

$$CE = \frac{\sqrt{14}}{7} FB$$

$$CF = \frac{5}{\sqrt{14}} CE$$

$$FB = \frac{7}{\sqrt{14}} CE$$

$$CF + FB = CB = \frac{12}{\sqrt{14}} CE \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot CB = \frac{\sqrt{14}}{12} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} \cdot x = \frac{7\sqrt{2}}{12\sqrt{5}} \cdot x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пошагово

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ABD}} = \frac{CE}{CD} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{10\sqrt{5}} \times}{\frac{7\sqrt{2}}{7\sqrt{5}} \times} = \frac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{5}{4}$$

Значит

$$S_{CFE} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{7} S_{ABC} = \frac{25}{28} S_{ABC}$$

Значит

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CFE}} = \frac{\frac{2}{7} S_{ABC}}{\frac{25}{28} S_{ABC}} = \frac{2 \cdot 28}{7 \cdot 25} = \frac{168}{175}$$

Ответ:  $\frac{S_{ACD}}{S_{CFE}} = \frac{168}{175}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

Решение!  $30 \cdot \arccos(\sin x) = 3\pi - 2x$

$$60 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 60 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$-60 \arcsin(\sin x) = 4\pi - 2x$$

$$30 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{x}{30} - \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin(\arcsin(\sin x)) = \sin\left(\frac{x}{30} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{x}{30} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{x}{30} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{x}{30} + \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{29}{30}x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ \frac{31}{30}x = \frac{7\pi}{3} + 2\pi n \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}n; n \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{array} \right.$$

Рассмотрим (1)

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Если  $x = -\frac{\pi}{2}$ , то:

$$30 \cdot \arccos(-1) = 9\pi + \pi$$

$$30 \cdot \pi = 30\pi - 2\pi$$

Если  $x = -\frac{\pi}{2}$ , т.е.  $x \geq 2\pi$  ← Если  $x = 2\pi$  л.о.д.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{2x}{\omega} - \frac{4\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{2}$$

т.е. 
$$\frac{2x}{\omega} \geq -\frac{\pi}{\omega}$$

$$x \geq -\frac{\pi}{2}$$

и

$$\frac{2x}{\omega} \leq \frac{3\pi}{\omega}$$

$$x \leq 4,5\pi \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 4,5\pi\right] - \text{при}$$

этих значениях  $x$  могут быть корни.

Рассмотрим (1):

при  $n < 0$   $x < -\frac{\pi}{2}$ .

при  $n = 0$   $x = -\frac{\pi}{2}$

$$\omega \cdot \arccos(-1) = 3\pi + \pi$$

$$\omega \pi = 4\pi \Rightarrow \omega = 4$$

при  $n = 1$ :  $x = 2\pi$

$$\omega \cdot \arccos(0) = 3\pi + 4\pi$$

$$5\pi = 7\pi \Rightarrow \omega = 2$$

при  $n = 2$ :  $x = 4,5\pi$

$$8\omega \cdot \arccos(1) = 3\pi + 9\pi$$

$$0 = 12\pi \Rightarrow \omega = 0$$

при  $n > 2$ :  $x > 4,5\pi$  - решений нет

Рассмотрим (2): при  $n < -1$ :  $x < \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$  - решений нет



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если  $n = -1$ :  $x = -\frac{\pi}{2}$  - мы проверили этот случай ранее.

Если  $n = 0$ :  $x = \frac{7\pi}{6}$ :  $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9\pi - 7\pi}{3}$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{27\pi - 7\pi}{3} \quad \text{т.е.} \quad \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi - 7\pi}{3}$$
$$\frac{20\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \quad \text{т.е.}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{27\pi - 5\pi}{3}$$
$$\frac{25\pi}{3} = \frac{22\pi}{3}$$

Если  $n = 1$ :  $x = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$

$$\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \frac{9\pi - 17\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{3\pi - 10\pi}{3}$$

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \quad \text{т.е.}$$

Если  $n = 2$ :  $x = \frac{7\pi}{6} + \frac{10\pi}{3} = \frac{27\pi}{6} = 4,5\pi$ .

$$\cos(4,5\pi) = \frac{9\pi - 27\pi}{3}$$

$$0 = 0 \quad \text{т.е.}$$

Если  $n > 2$ , то  $x > 4,5\pi$  - решений нет

Значит  $x = \left\{ -\frac{\pi}{2}; 2\pi; 4,5\pi; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6} \right\}$ .

Ответ:  $x = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; 4,5\pi \right\}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Решение:

$$5x + 6ay - b = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + y^2 - 25) - (x^2 + y^2 + 18y + 87) = 0 \quad (2)$$

Перепишем (2) как:

$$(x^2 + y^2 - 25) \cdot (x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0.$$

Тога

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4. \end{cases}$$

- две ок.ту.

$$W_1(O_1(O_1'; 0_1), r_1=5)$$

$$W_2(O_2(O_2'; -9); r_2=2)$$

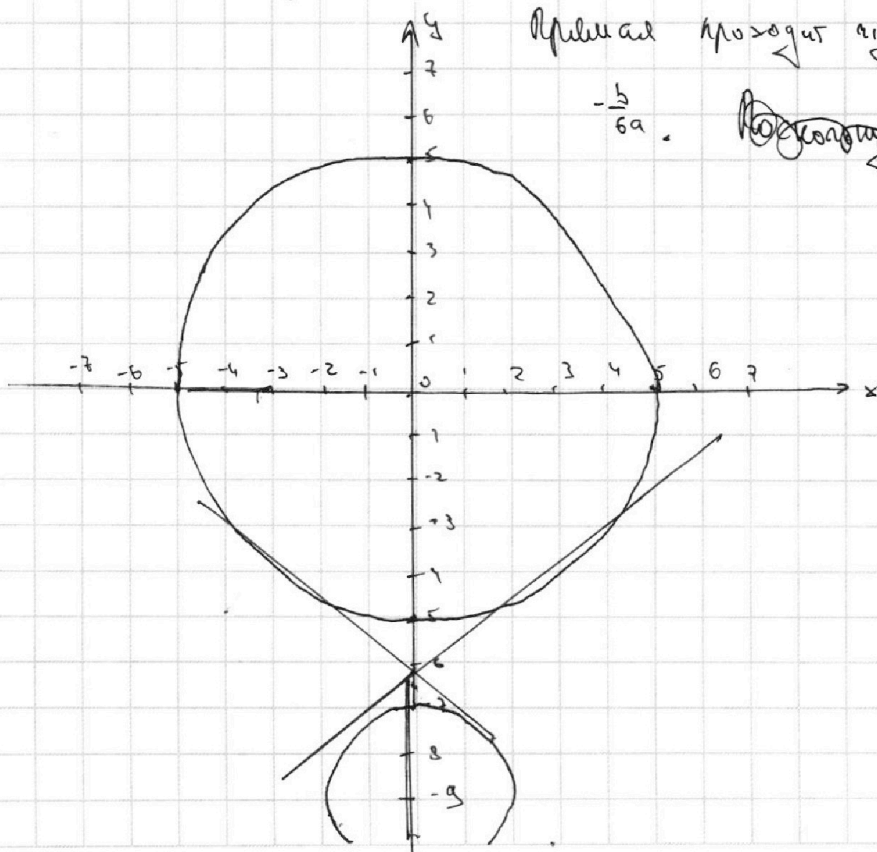
$$(1): 5x + 6ay - b = 0.$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a} \text{ - задает прямую.}$$

Методом решения будет, когда прямая будет л-ато обе ок.ту.

Прямая проходит эту точку

$$-\frac{b}{6a} \text{ .}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



используя уравнение нашей прямой:  $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$  можно

записать как  $y = kx + b$ , ~~используя формулу~~

тогда используем макс. знач.  $k = \text{tg}(90^\circ - \alpha) = \text{ctg}(\alpha) =$

$$= \frac{1}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{\sqrt{22}}{5}$$

тогда с учетом выше сказанного  $-\frac{5}{6a} \geq \frac{\sqrt{22}}{5}$  и

$$-\frac{5}{6a} \leq -\frac{\sqrt{22}}{5} \quad \text{из 1-го получаем, что } \frac{-25 - \sqrt{22} \cdot 6a}{30a} \geq 0$$

$$\begin{aligned} -25 - \sqrt{22} \cdot 6a &\geq 0 \\ a &\leq \frac{25}{-\sqrt{22} \cdot 6} \end{aligned}$$

Number line for  $a$  with critical point at  $\frac{-25}{\sqrt{22} \cdot 6}$ . The region to the left of this point is marked with a plus sign (+), and the region to the right is marked with a minus sign (-).

$$\text{из 2-го } \frac{-25 + \sqrt{22} \cdot 6a}{30a} \geq 0$$

Number line for  $a$  with critical points at  $0$  and  $\frac{25}{6\sqrt{22}}$ . The region between  $0$  and  $\frac{25}{6\sqrt{22}}$  is marked with a minus sign (-), and the regions to the left of  $0$  and to the right of  $\frac{25}{6\sqrt{22}}$  are marked with a plus sign (+).

значит, объединив оба условия;  $a \in (-\infty; \frac{-25\sqrt{22}}{132}) \cup$

$$\cup (\frac{25\sqrt{22}}{132}; +\infty)$$

Ответ:  $a \in (-\infty; \frac{-25\sqrt{22}}{132}) \cup (\frac{25\sqrt{22}}{132}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.с.

Решение:  $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{101} - 5$  О.Д.З.  $\frac{x > 0}{x \neq 1}$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

Пусть  $\log_{11} x = t$

Тогда  $t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$ . (1) ~~тогда~~ ~~тогда~~

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - 5\frac{1}{3} = 0.$$

$$\log_{0,5}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,115y^2} (11^{-13}) - 5. \quad \text{О.Д.З.} \begin{cases} y \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\log_{0,5}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5$$

$$\log_{0,5}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = \frac{-13}{3 \cdot \log_{0,5y} 11} - 5$$

Пусть  $\log_{0,5} (0,5y) = z$ . Тогда  $z^4 + \frac{1}{z} = -\frac{13}{3z} - 5$ . (2)

$$z^5 + 1 + \frac{13}{3} = 5z = 0.$$

$$z^5 + 5z + 5\frac{1}{3} = 0.$$

Рассмотрим ф-цию  $f(t) = t^5 + 5t + 5\frac{1}{3}$   $f'(t) = 5t^4 + 5 > 0$  на всей

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3$$

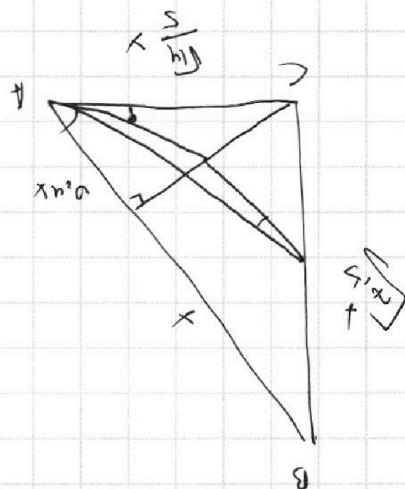
$$x^{\frac{4}{11}} = z$$

$$z = \sqrt[11]{\frac{z^4}{x^2}}$$

$$CA = \sqrt[11]{0.4 \cdot 4 \cdot 11} = z$$

$$CB = \sqrt{x \cdot 4 \cdot 11} = \sqrt{44x}$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CB}{BA} = \frac{CB}{CA}$$



$$f(x) = 5 + 2 + 5 = 12$$

$$f(x) + 5 = 0$$

$$f(x) + \frac{3}{16} = 0$$

$$f(x) + 8 + \frac{3}{13} + 5 = 0$$

$$f(x) + \frac{3}{13} = -5$$

$$\log_{11}^4 (\log_{11}^4 x) + \frac{3}{13} = -5$$

$$\log_{11}^4 (\log_{11}^4 x) + \frac{3}{13} = -5$$

$$\log_{11}^4 (\log_{11}^4 x) + \frac{3}{13} = -5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

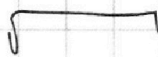
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{4-x^2} - 9$$



$$\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}$$

нс.

$$y - 6 = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\log_4^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_4^4 x - \frac{6}{\log_4 x} = \frac{1}{3} \log_x \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_4^4 x - \frac{6}{\log_4 x} = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\log_4^4 x - \frac{6}{\log_4 x} = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\sqrt{4} - \frac{6}{4} = -\frac{2}{3} - 5$$

$$\frac{\sqrt{5} - 6}{4} = \frac{-2 - 15\sqrt{2}}{34}$$

$$3\sqrt{5} - 18\sqrt{2} = -2\sqrt{2} - 15\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{5} + 15\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{3\sqrt{5} + 15\sqrt{2} - 16} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^4)$   
 $bc: (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{13})$   
 $ca: (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{22})$   
 $a^2 b^2 c^2: (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52})$   
 $a \cdot b \cdot c: (2^4 \cdot 3^{20} \cdot 5^{13})$   
 $c: (2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^2)$   
 $a: (2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^2)$   
 $b: (2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^2)$

$a \cdot b: (2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\delta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\delta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_3}$

$5 \geq 5$   
 $4 \geq 4$   
 $1000 \geq 500$   
 $5 \geq 5$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6$   
 $\beta_1 + \beta_2 \geq 13$   
 $\delta_1 + \delta_2 \geq 11$   
 $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 14$   
 $\beta_2 + \beta_3 \geq 21$   
 $\delta_2 + \delta_3 \geq 13$   
 $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 16$   
 $\beta_1 + \beta_3 \geq 25$   
 $\delta_1 + \delta_3 \geq 28$

$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 \geq 36$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$

$2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 \geq 59$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$

$2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 \geq 52$

$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 26$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$   
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 30$   
 $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \geq 26$

$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 3, \alpha_3 =$   
 $\beta_1 = 4, \beta_2 = 5, \beta_3 =$   
 $\delta_1 = 4, \delta_2 = 5, \delta_3 =$

Если поделить, то  $9 \geq 9$

$\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 11$   
 $\beta_1 = 4, \beta_2 = 5, \beta_3 =$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x \in [\pi; 2\pi]; 2\pi + 2\pi n,$$

$$\cos x = -\sqrt{1-a^2}$$

$$x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n],$$

$$\cos x = \sqrt{1-a^2}$$

$$\sqrt{1-a^2} = \frac{9\pi}{10} - 2x$$

$$\sqrt{8 - \sin^2(x)} = \frac{5\pi}{10} - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$5\pi - \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$-\arccos(\sin x) = 4\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = 2x - 4\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{2x}{10} - \frac{4\pi}{10}$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{2x}{10} - \frac{4\pi}{10}\right)$$

$$x = \frac{2x}{10} - \frac{4\pi}{10} + 2\pi n$$

$$x = \pi - \frac{2x}{10} + \frac{4\pi}{10} + 2\pi n$$

$$\frac{8x}{10} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi n$$

$$\frac{12x}{10} = \frac{14\pi}{10} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n$$

$$\omega \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 9\pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$\omega \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} \quad \frac{20\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$$

$$\frac{20\pi}{3} = \frac{6\pi}{5}$$

$$\pi - \frac{2\pi}{6}$$

$$\omega \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 9\pi + \pi$$

$$\omega \pi = \omega \pi$$

$$\omega \cdot \arccos(\dots)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{2x}{10} - \frac{4\pi}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \frac{2x}{10} + \frac{\pi}{10} \leq \frac{9\pi}{10}$$

$$-\frac{3\pi}{10} \leq \frac{2x}{10} \leq \frac{4\pi}{10}$$

$$-3\pi \leq 2x$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$$5x + 6ay - b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25) \quad (x^2 + y^2 + 11x + 17y) = 0$$

$$\partial x^2 +$$

$$(x+y-5)(x$$

$$(x^2 + y^2 - 5)(x -$$

$$(x^2 + (y-5)(y+5)) (x^2 + (y+5)^2 - 4) =$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD}$$

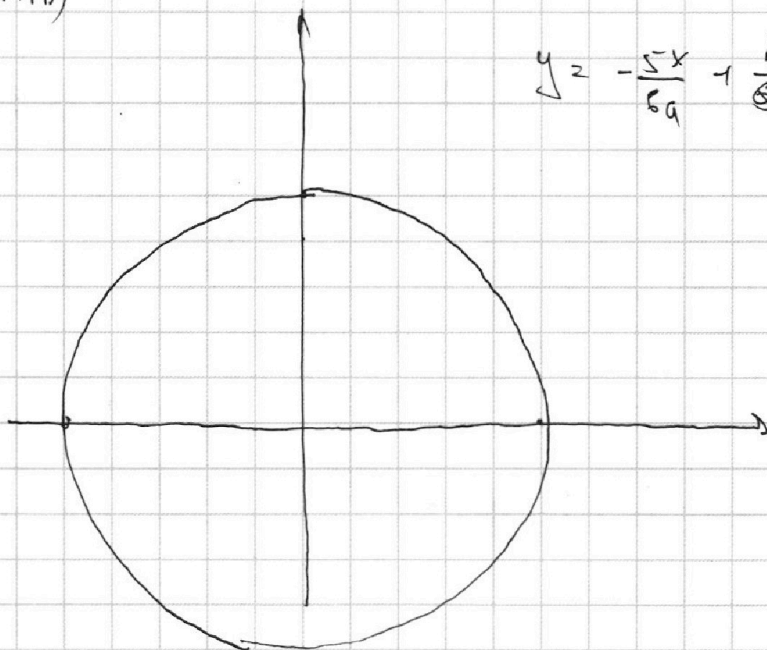
$$= (x^2 + (y-5)(y+5)) ((x-2)(x+2) + (y+5)^2)$$

$$CF \cdot CD = CE \cdot CB$$

$$CF \cdot CD = CE \cdot (CF + PB) \quad x^2 + y^2 = 25 \quad x^2 + (y+5)^2 = 4$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CF + PB}{CE}$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} d_1 &= 4 \\ d_2 &= 2 \\ d_3 &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \cancel{3} \cancel{7} 8 \\ \beta_2 &= \cancel{2} \cancel{5} 5 \\ \beta_3 &= \cancel{1} \cancel{7} \cancel{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \cancel{2} 8 \\ \delta_2 &= \cancel{3} 3 \\ \delta_3 &= \cancel{10} 10 \end{aligned}$$

$$d_1 + d_2 = 5d$$

$$\delta_1 + \delta_3$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 14 \\ \delta_2 &= 6 \\ \delta_3 &= 14 \end{aligned}$$

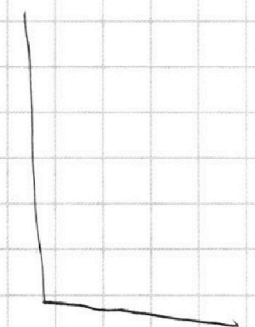
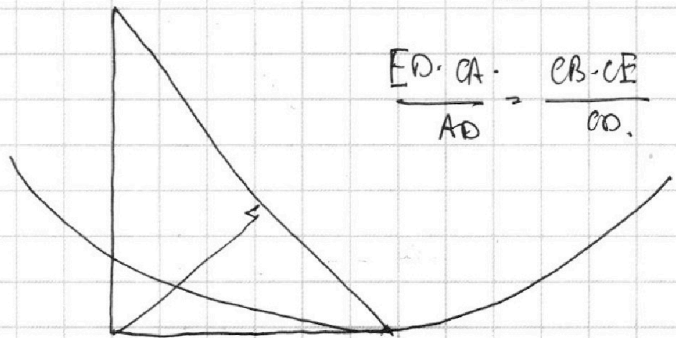
№ 3.

$$\frac{ED}{AD} = \frac{FC}{CA}$$

$$CF = \frac{ED \cdot CA}{AD}$$

$$CF = \frac{CB \cdot CE}{CD}$$

$$\frac{ED \cdot CA}{AD} = \frac{CB \cdot CE}{CD}$$

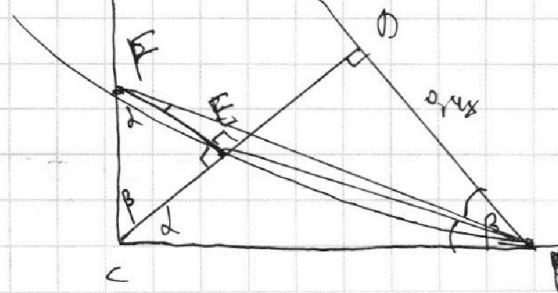


$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CB}{CD}$$

$$\begin{aligned} CF &= \frac{CB \cdot CB}{CF} \\ &= CB \cdot \sin \alpha \\ &= CB \cdot \frac{CA}{AB} \end{aligned}$$

$$CD = \frac{CB \cdot CA}{AB}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

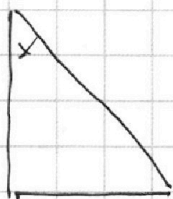
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.

$$\text{З0} \cdot \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

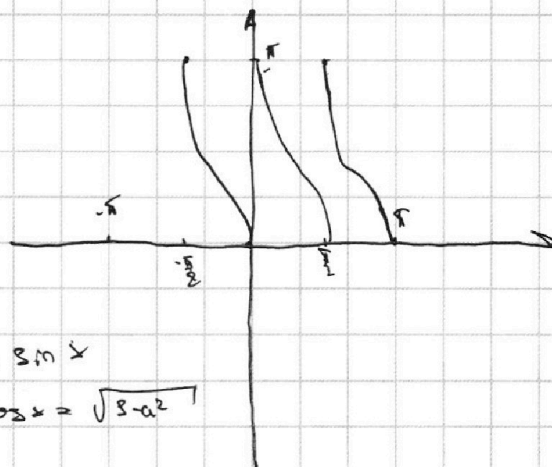
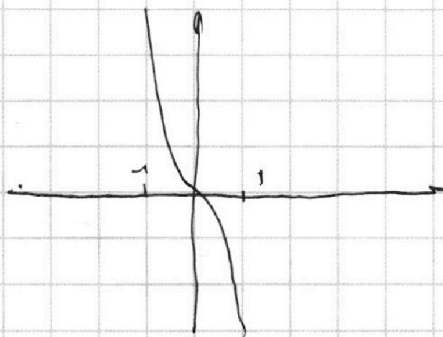
$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{2x}{10}.$$



$\times$   
 $0; 2\pi$   
 $0; \pi$

$$\frac{2\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{8\pi}{6}$$

$-\frac{\pi}{2}$   $\text{З0} \cdot (\arccos(-1)) = 10\pi.$



$$\text{З0} \quad a = \sin x$$

$$\cos x = \sqrt{1 - a^2}$$

~~$\text{З0} \cdot (\arccos a)$~~

$$\text{З0} \cdot \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x.$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{2x}{10}.$$

$$\sin x > 0; \quad x \in (0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n).$$

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\sqrt{1 - a^2}) = \sqrt{1 - a^2}$$

$$\sqrt{1 - a^2} = \frac{9\pi}{10} - \frac{2x}{10} = \arcsin a$$

$\frac{9\pi}{10}$

$\frac{2x}{10}$

$\arcsin a$

$\text{З0} \cdot \text{З0}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = \frac{\sqrt{14}}{5} x$$
$$BC = \sqrt{1.4x \cdot x} = \sqrt{\frac{7}{5}} x$$
$$CD = \frac{\sqrt{\frac{7}{5}} x - \frac{\sqrt{14}}{5} x}{1.4x} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{5}} \cdot 1.4 x = \frac{2\sqrt{2}}{7\sqrt{5}} x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Знаки  $f(x)$   $\uparrow$ -ая  $\downarrow$  при  $x \in \mathbb{R}$ .

Также  $y(z) = z^5 + 5z - 5 \frac{1}{3}$

$y'(z) = z^4 + 5 > 0$  при  $z \in \mathbb{R}$ . Знаки она также

$\uparrow$ -ая при  $z \in \mathbb{R}$ . Тогда  $y$   $\downarrow$  ур. имеет

$$z^5 + 5z - 5 \frac{1}{3} = 0 \quad \vee \quad z^5 + 5z + 5 \frac{1}{3} = 0 \quad - \text{не более}$$

1-го корня. Заметим, что если  $t_0$  - корень, то тогда

где 2 корнями будет  $-t_0$ . Поскольку тогда  $t_0^5 + 5t_0 = 5 \frac{1}{3}$

$$\text{Тогда } \frac{\log_{11} x}{\log_{11} 0,5y} = -1.$$
$$4 - t_0^5 - 5t_0 = -5 \frac{1}{3}.$$

$$\log_{11} x = -\log_{11} 0,5y.$$

$$\log_{11} x = \log_{11} \left( \frac{2}{y} \right).$$

Тогда по свойствам функции  $l(t) = \log_{11} t$   $\uparrow$ -ая и остр. ~~на~~ при  $t \in (0; +\infty)$ .

Значит  $x = \frac{2}{y}$  - ед. реш.

Значит  $x \cdot y = \frac{2}{y} \cdot y = 2$ .

Ответ: 2.



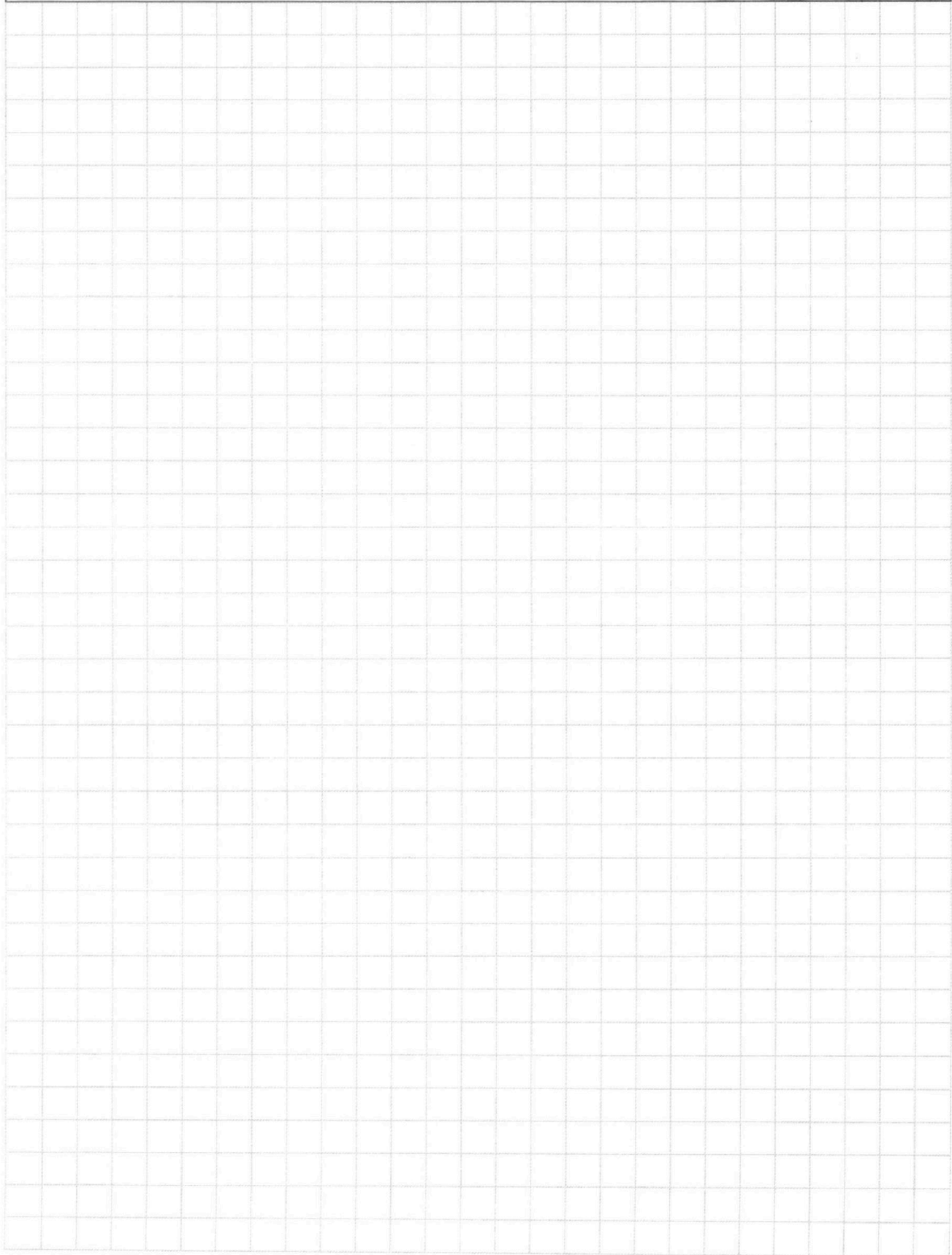
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

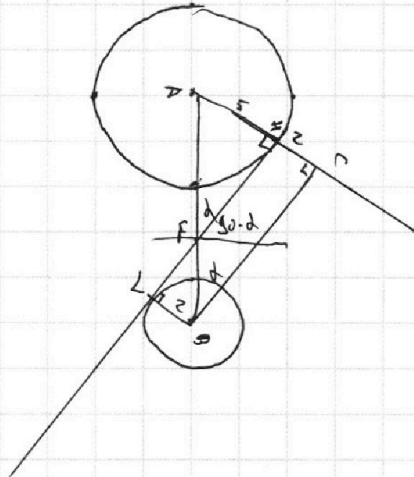
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Сколько будет иметь 4 решения, когда прямая будет  
касаться 2-х ок-тей, ~~и т.д.~~

$$AB = 9. \quad AC = AH + HC = 5 + 2 = 7.$$



Заметим, что для нужной  $\alpha$  мы всегда сможем найти подходящий  $\beta$ , поскольку если прямая будет касаться сразу к обеим ок-тей, то решений будет  $\leq 3$ , в любом случае мы всегда можем "двинуть прямую" по  $\alpha$  так, чтобы было 4 решения. Каждый значению  $\alpha$ , для которого прямая является одновременно касательной к обеим ок-тей, проведем  $HL$ -касат. к обеим ок-тей. Тогда продолжим  $AH$  за  $A$  и проведем  $BC \perp AH$ . Поскольку  $AB \parallel AH$ , т.к. они  $\perp HL$ , то  $HC = \angle B = 2$ .

Тогда расстояние между ок-тейми =  $AB = 9$ ,  $AC = 5 + 2 = 7$ . Тогда

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{81-49}} = \frac{5}{\sqrt{32}}. \quad \text{Поскольку } \angle AFM = \angle ABC = \alpha, \text{ то}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

