



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дано треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a_2 = \sqrt[2]{a}$, $b_2 = \sqrt[2]{b}$, $c_2 = \sqrt[2]{c}$,

аналогично определим $a_3, b_3, c_3, a_5, b_5, c_5$.

$\sqrt[p]{n}$ - степень вхождения p в n .

Из условий:

$$abc : 2^7 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 7$$

$$abc : 2^{13} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 13$$

$$abc : 2^{14} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 14$$

$$\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 7 + 13 + 14 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 17.$$

Аналогично для 3 и 5 получаем

$$a_3 + b_3 \geq 11$$

$$b_3 + c_3 \geq 15 \Rightarrow (a_3 + b_3 + c_3) \geq 43. \quad a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{Z}$$
$$a_3 + c_3 \geq 17 \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$a_5 + b_5 \geq 19$$

$$b_5 + c_5 \geq 18 \Rightarrow 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75. \quad a_5, b_5, c_5 \in \mathbb{Z}$$
$$a_5 + c_5 \geq 43 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 38$$

но $a_5 + c_5 \geq 43 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$

$$\Rightarrow \sqrt[2]{abc} = a_2 + b_2 + c_2 \geq 17$$

$$\sqrt[3]{abc} = a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$\sqrt[5]{abc} = a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17} 3^{22} 5^{36} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{36}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

... Это достичь при

$$a_2 = 4, \left\{ \begin{array}{l} a = 2^4 3^7 5^{21} \\ b = 2^3 3^5 5^0 \\ c = 2^{10} 3^{10} 5^{22}. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \min(abc) = 2^{17} 3^{22} 5^{48}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Русс ABC = φ.

$$EFIAE \Rightarrow \angle EFC = q. \quad \angle ACD = \frac{\pi}{2} - \angle ECF = q.$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{EF} \cap \mathcal{AC}.$$

$$\angle MCE = \angle CFE =$$

MC.

$$\Rightarrow M_E \cdot M_F = \text{pow}(M, (F_E)) = M C^2.$$

$\text{pow}(P, \omega)$ - створює транс P отн. ω .

(AFE) vacated AC \Rightarrow $MA^2 = M \cdot E \cdot MF$.

$$\Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF = MC^2 \Rightarrow MA = MC$$

$$\Rightarrow S_{\Delta C} + \varepsilon = \frac{1}{4} S_{\Delta C} \cos^2 \theta. (\varepsilon F \parallel \theta \text{ do MA} = MC)$$

$$\Rightarrow \text{MF} - \text{cp. minima } \Delta C_B \Rightarrow \frac{S_{CE}}{S_{8C8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{S_{\Delta} ACD}{S_{\Delta} BCD} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (AB - BC)}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot BD} = \frac{a_{13}}{1} = a_{13}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = 4 \quad \frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCD}} = 1/2.$$

Order: 1, 2 ..



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Sigma \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2x}{10} + 2\pi k & (1) \\ -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$4x = 4\pi + 10\pi k$$

$$x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} + \pi \frac{5\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

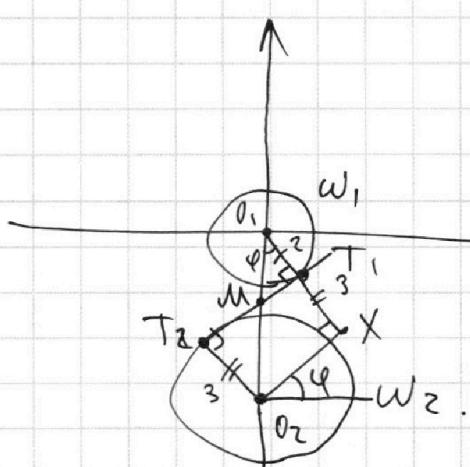
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x + 3ay - 7a = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Рассмотрим графики. Это будут окружности
с центрами b $(0; 0)$ и $t = 7; 0$ и
радиусами 2 и 3.



Рассмотрим их общую
внешнюю касательную и
их коэффициенты касания.

$$O_1 X = R_1 + R_2 = 5$$

$$O_1 O_2 = 7.$$

$$\Rightarrow O_2 X = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}.$$

\Rightarrow угол между касательной

$$\text{кофр. касания } \psi_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{O_2 X}{O_1 X} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \angle O_1 O_2 X = \angle O_2 O_1 X \right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для второй касательной, из
аналогии, $\psi_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$. $k = -\frac{1}{3a}$.

Тогда, если ~~$k \in (\psi_2; \psi_1)$~~ $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{76}{3a} (=)$
 $(=) y = kx + \frac{76}{3a} = w(x)$

\Rightarrow При $k \in [\psi_2; \psi_1]$, ^{если} _{любая} прямая
такого вида ($w(x)$) будет пересекать
одну из окружностей в 2 точках, то она
не будет пересекать другую, т.к. ~~так~~

$$\cancel{k > \psi_2} \quad \psi_2 \leq k \leq \psi_1.$$

\Rightarrow Такое возможно при $k \in (-\infty; \psi_2) \cup (\psi_1; +\infty)$.

Выберем в таком, ~~все~~ $\frac{76}{3a} = y_M$, где $M =$

$= T_1 T_2 \cap O_1 O_2$. \Rightarrow При $k > \psi_1$ или $k < \psi_2$

коэф. наклона $w(x)$ будет ^{больше} отличен, чем у
касательной (одиной) \Rightarrow она пересечет
обе окружности в 2 точках.

$$\Rightarrow -\frac{1}{3a} \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty\right) \Rightarrow$$

$$\text{Отвр. } a \in \left(-\infty; -\frac{6\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{6\sqrt{6}}{5}; +\infty\right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_7 y)^5 + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2} = -((\log_7 w)^5 + 4 \log_7 w)$$

то получаем, что $\log_7 y = -\log_7 w$

$$\Rightarrow \log_7 y + \log_7 w = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_7 (y w) = 0 \Rightarrow y w = 1$$

$$\Rightarrow 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$.

Других значений для xy нет,
так как мы делали равносильные
перекоды и получили однозначный
ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad (1)$$

$$\log_7 y + 6 \log_y 7 = \log_y (7^5) - 4. \quad (2)$$

$y > 0$ и $6x > 0 \Rightarrow y = |y|, x = |x|.$

Пусть $|6x| = w$. $w > 0, |w| = w.$

Перепишем выражения. $\ln w \neq 0, \ln y \neq 0.$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7}\right)^4 - 2 \left(\frac{\ln 7}{\ln w}\right) = \frac{\ln 343}{\ln w^2} - 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7}\right)^4 - 2 \left(\frac{\ln 7}{\ln w}\right) = \frac{3 \ln 7}{2 \ln w} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7}\right)^5 - \frac{7}{2} + 4 \left(\frac{\ln w}{\ln 7}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (\log_7 w)^5 + 4 \log_7 w = \frac{7}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^5 + 6 \frac{\ln 7}{\ln y} = \frac{5 \ln 7}{2 \ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^5 + \frac{7}{2} \cancel{\frac{\ln y}{\ln 7}} + 4 = 0. + 4 \frac{\ln y}{\ln 7} = 0.$$

$$\Rightarrow (\log_7 y)^5 + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}.$$

функции $y = x$, $y = x^5$ и $y = \log_7 x$
при достижении какое значение в

единственной точке \Rightarrow так как



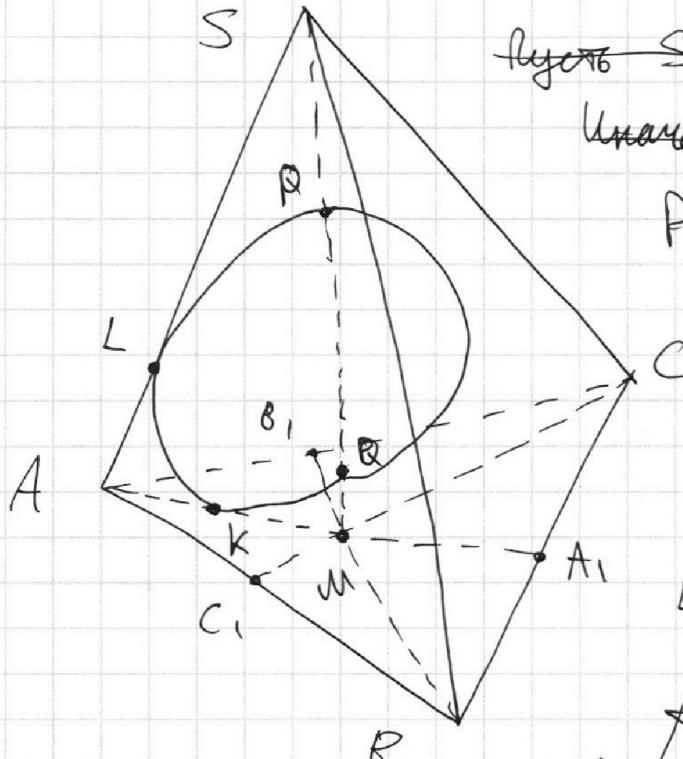
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



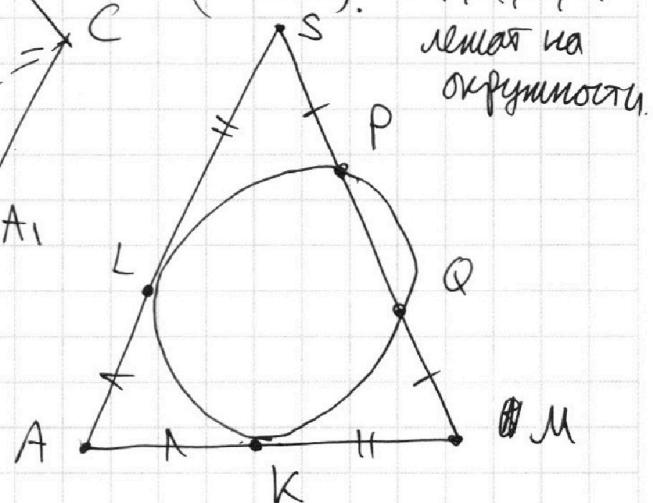
~~flyers SP < SQ~~

$$\text{Unsure } SP^* = SP - PQ = SPQ^*$$

Расмотрим локаль

(ASU) $\Rightarrow P, Q, L, K$

личат на
окружности.



$$(\star) \quad SP = MU \Rightarrow SP \cdot PSQ = P_M \cdot PM =$$

$$\Rightarrow \text{pow}(S, (PQ \sqcup k)) = \text{pow}(M, (PQ \sqcup k)) =$$

$$\Rightarrow MK^2 = LS^2 \Rightarrow MK = LS.$$

$$\text{Ko } AL = AK = \sqrt{\text{pow}(A, (PQKL))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM = \cancel{SA} = AL + LS = AK + KM.$$

$$\Rightarrow A\mu = SA = 10$$

Рассмотрим ΔABC .

(*) Суми $P \cup Q$ діли в програмі називаються, т. е.
 $SP \supseteq SQ$, тоді підтримки є їх підмножинами.

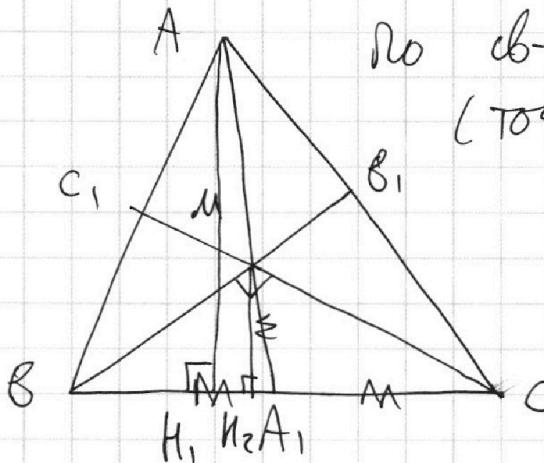
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По сб-вку центра масс
(точки M), $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2$

$$\Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 5.$$

$$\text{Ко } BA_1 = CA_1 = \frac{1}{2} BC = 5 = MA_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b \perp BM$ медиана MA_1 равна

половине стороны $\Rightarrow \angle BMC = \frac{\pi}{2}$.

$$MC = \frac{2}{3} CC_1; MB = \frac{2}{3} BB_1 \Rightarrow BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1.$$

Лучи $H_1, H_2 \in BC$: $AH_1 \perp BC$; $MH_2 \perp BC$.

$H_1M \parallel MH_2 \Rightarrow \triangle A_1H_2M \sim \triangle A_1H_1A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{H_2M}{H_1M} = \frac{\frac{1}{2} H_2M \cdot BC}{\frac{1}{2} H_1M \cdot BC} = \frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{60}{3} = 20.$$

$$\text{Ко } S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM \cdot MC = 2 S_{\triangle BMC} = 40.$$

$$\text{Ко } BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{40}{4} \cdot 9 = 90.$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 =$$

$$= 90 \cdot 15 = 1350.$$

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

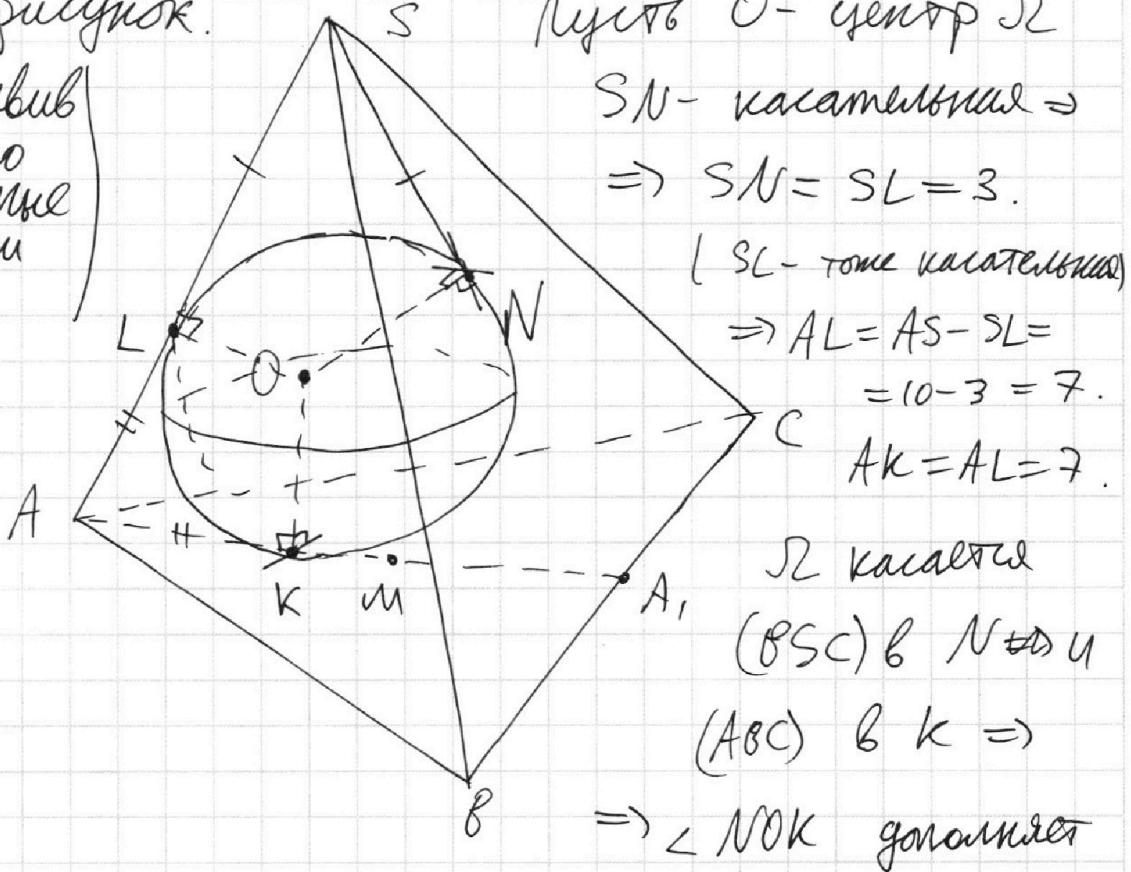
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

... Остался пунктом 8). Сделаем новый

рисунок.

(оставив

только
пунктирные
точки)



Пусть O - центр \mathcal{L}

$$SN - \text{касательная} \Rightarrow \\ \Rightarrow SN = SL = 3.$$

(SL - тоже касательная)

$$\Rightarrow AL = AS - SL = \\ = 10 - 3 = 7.$$

$$AK = AL = 7.$$

\mathcal{L} касается

(BSC) в $N \neq u$

(AKC) в $k \Rightarrow$

$\angle NOK$ дополняет

шестиугольный угол ψ при BC до π , так как

Если мы соединим O с точкой T так, чтобы

$OT = \rho(O, BC)$, и опуским из O перпендикульры

OY, OX на (AEC) и (BSC) , то они ~~одн-стор~~

(OXY) будет вписанной и $\angle XOP \in \gamma$ $X = K, Y = N$.

(OKN - $одн-стор$ - $X = K, Y = N$).

$\angle O = \rho(O)$, $AS \alpha$, $NO = \rho(O, BSN)$, $OK = \rho(O, BSC)$

$\Rightarrow (\angle OKA) \cup (\angle NLO) \text{ и } (SLO) \cup (SLA) \cup (OLA)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

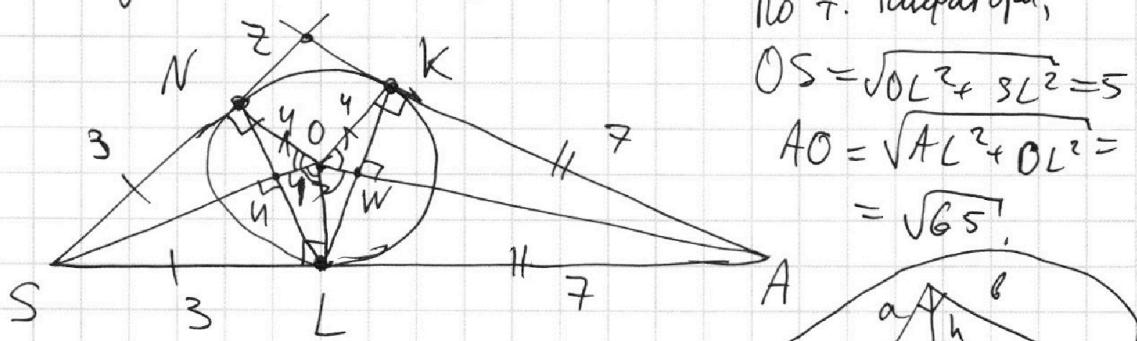


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это огра и та же плоскость \Rightarrow

$\Rightarrow N, S, L, O, A, K$ лежат на одной
плоскости. рассмотрим её и
найдем $\angle NOK$. (или $\angle MON$).

по т.畢агора,



$$OS = \sqrt{OL^2 + SL^2} = 5$$

$$AO = \sqrt{AL^2 + OL^2} = \\ = \sqrt{65}$$

$\angle NOL = \angle OAL + \angle LOK$ *бакыт*, $\frac{ab}{c} = h$.

$$\Rightarrow \frac{NL}{2} = \sin(\angle L, OS) = \frac{SL \cdot OL}{OS} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$$

$$NL = \frac{24}{5}. \text{ Аналогично,}$$

$$LK = \frac{56}{\sqrt{65}}.$$

$$\& \angle KOL = 2 \arcsin \left(\frac{KL}{2OK} \right) = \left(\frac{7}{\sqrt{65}} \right) 2 \arcsin \left(\frac{7}{\sqrt{65}} \right)$$

$$\angle NOK = 2 \arcsin \left(\frac{LN}{2R} \right) = \frac{3}{5} 2 \arcsin \left(\frac{3}{5} \right).$$

$$\Rightarrow \angle NOK = 2(\pi - (\arcsin \left(\frac{7}{\sqrt{65}} \right) + \arcsin \left(\frac{3}{5} \right))).$$

$$\Rightarrow \psi = \pi - \angle NOK = 2 \arcsin \left(\frac{7}{\sqrt{65}} \right) + 2 \arcsin \left(\frac{3}{5} \right) -$$

-π. Чго и требовалось найти.

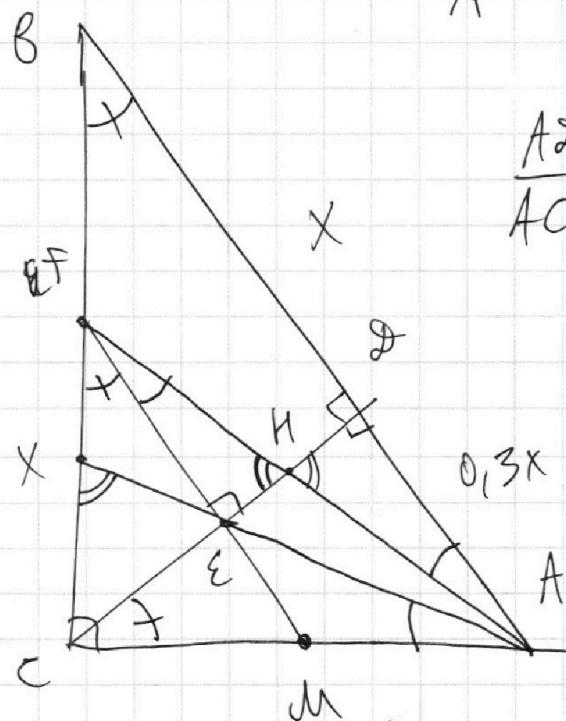
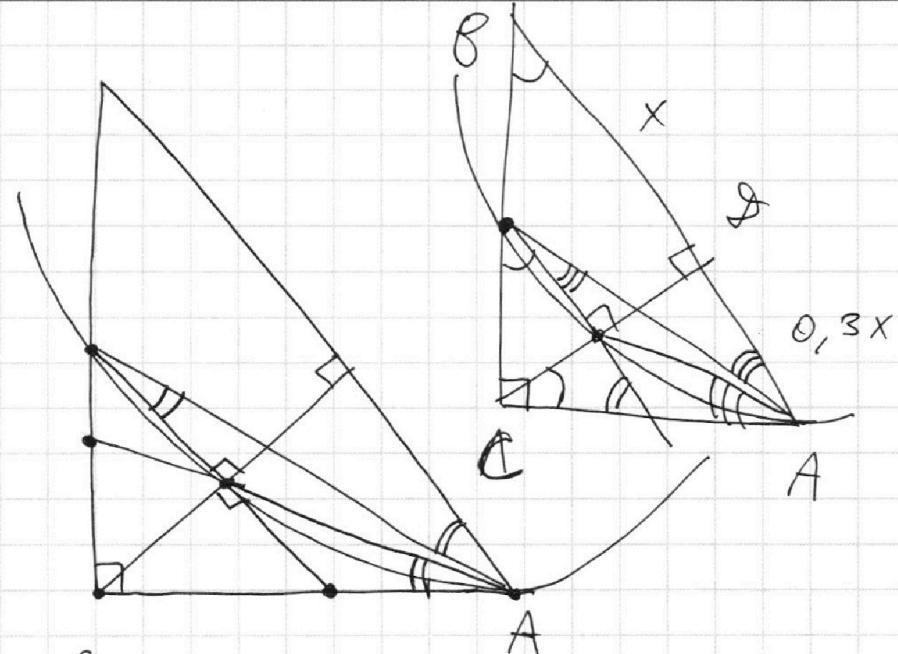


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{AC} = \frac{DH}{CX} = \text{相似}$$

$$\frac{gH}{k\varepsilon} = \frac{AD}{PC}$$

$$MC^2 = MF \cdot ME = \\ = \cancel{0,3 \text{ k}^3 \text{x}^3}$$

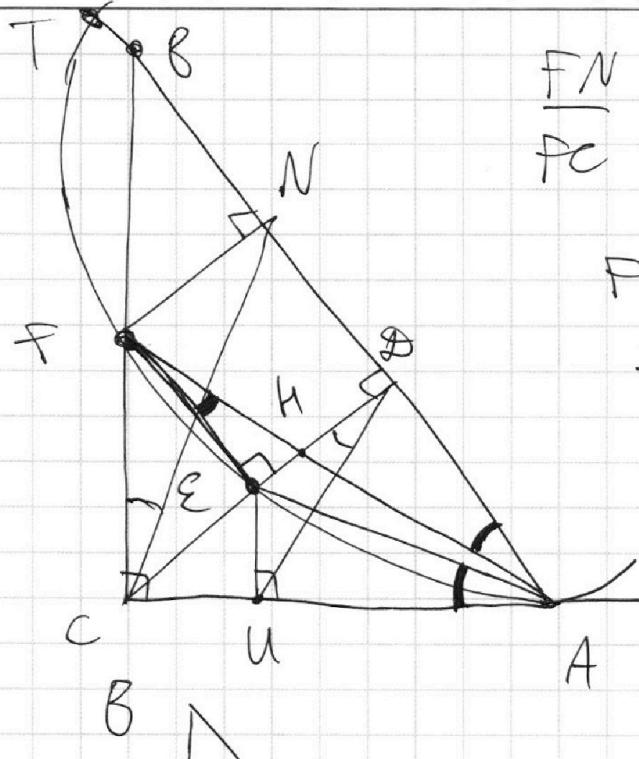
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

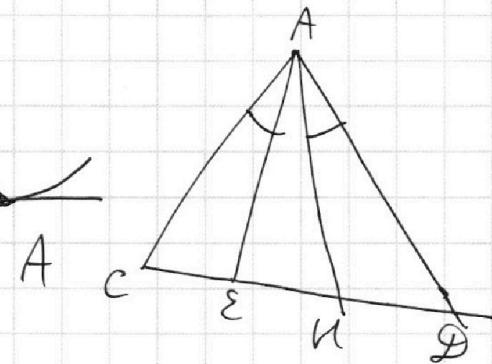
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{FN}{FC} = \frac{\varepsilon u}{\varepsilon d}$$

$$FC \cdot \varepsilon u = FN \cdot \varepsilon d$$

$$FC \cdot \varepsilon u = \varepsilon d^2.$$

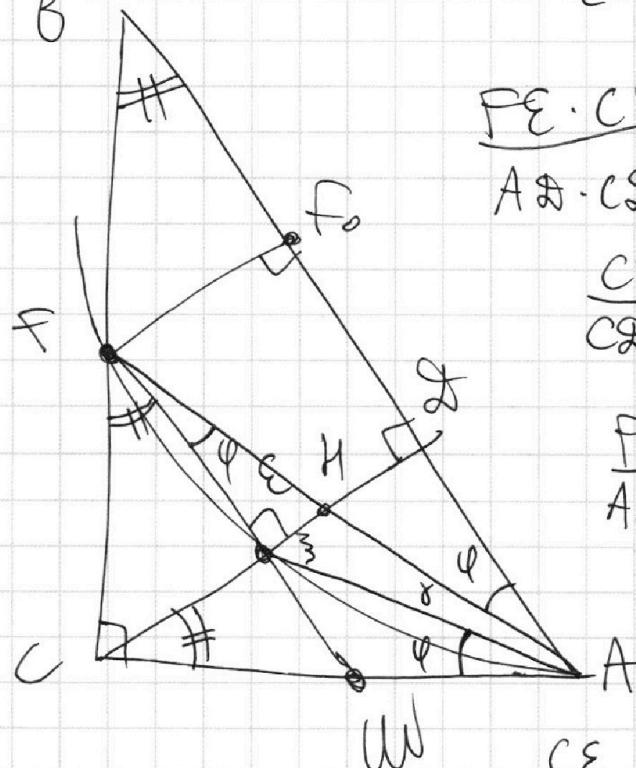


$$PE \cdot CE$$

$$AD \cdot CD.$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{PE}{BD}.$$

$$\frac{PE}{AD} = \frac{EH}{UD}.$$



$$\frac{CE \cdot CH}{ED \cdot ND} = \left(\frac{AC}{AD} \right)^2$$

$$\frac{CE}{CD} \cdot \frac{DH}{HC} = \frac{|AD|}{|CD|} \left(\frac{?}{?} \right)$$

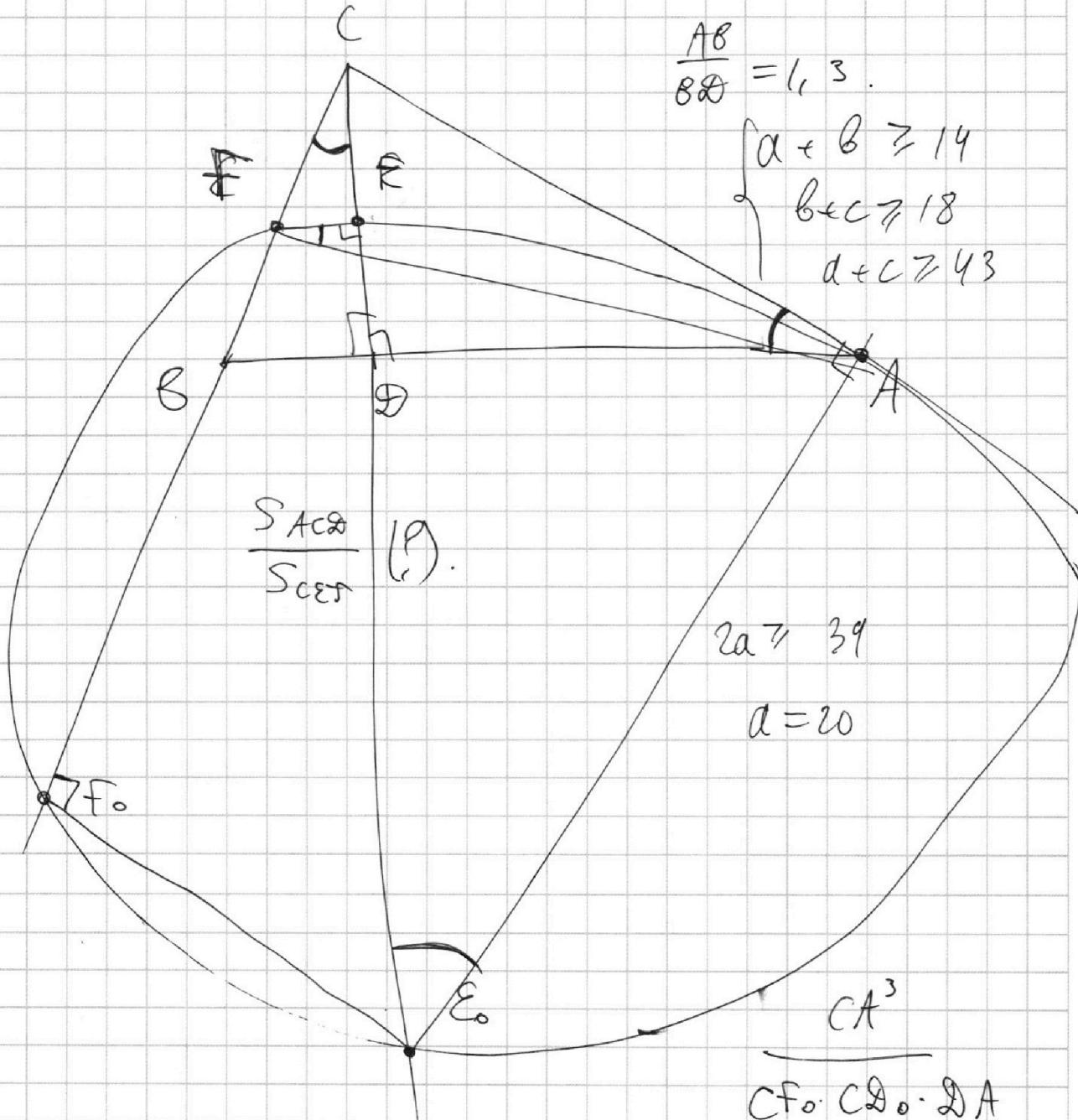
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CF \cdot CF_0 = CE \cdot CE_0 = CA^3.$$

$$\frac{S_{CE}}{S_{ACD}} = \frac{CE \cdot FC}{CA \cdot DA} = \frac{CA^4}{CF_0 \cdot CD_0 \cdot CA \cdot DA}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} ab : 2^7 3^{11} 5^{14} \\ bc : 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac : 2^{14} 3^{17} 5^{43} \end{array} \right.$$

$$x^2 + (4x + 45) \geq (x+7)^2 - 4.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 + b_2 = 7 \\ a_2 + c_2 = 14 \Rightarrow 2a_2 = 21 - 13 = 8 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = 4 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 10 \end{array} \right. \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 = 15 \Rightarrow 2a_3 = 13, a \geq 7 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 7 \\ b = 5 \\ c = 10 \end{array} \right. \quad \Rightarrow 2(a+b+c) \geq (\dots).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 34 \Rightarrow \ell \geq . \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\ln y$
 $\ln 6x$

$$\log_7^5 y + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}$$

$$\log_7^5 6x + 4 \log_7 6x = \frac{7}{2}.$$

$$\Rightarrow \log_7 y = -\log_7 6x \Rightarrow y = (6x)^{-1}$$

$$\frac{\ln y}{\ln 7} = -\frac{\ln 6x}{\ln 7}$$

$$\begin{aligned} 6xy &= 1 \\ xy &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\ln y = -\ln 6x$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

~~$$\Rightarrow y = -6x$$~~

$$\Rightarrow y \cancel{=} e^{\ln y} = e^{-\ln 6x}$$

$$e^{\ln y + \ln 6x} = 1$$

$$\begin{aligned} \ln y + \ln 6x &\approx 0 \\ \ln(6xy) &\approx 0 \end{aligned}$$

$$\ln y + \ln 6x = 0$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\ln(6xy) = 0, \quad 6xy = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

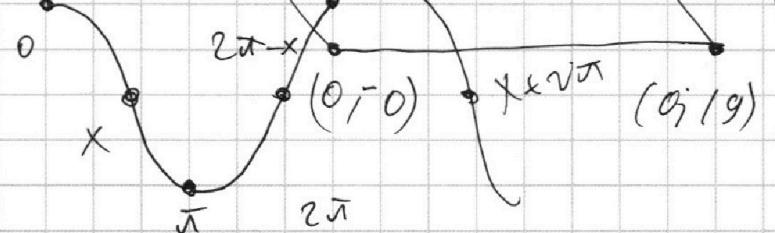
$$O(0;0), P(-17, 68), Q(2, 68), R(19, 0).$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40.$$

$$\Rightarrow 4\Delta x + \Delta y = 40$$

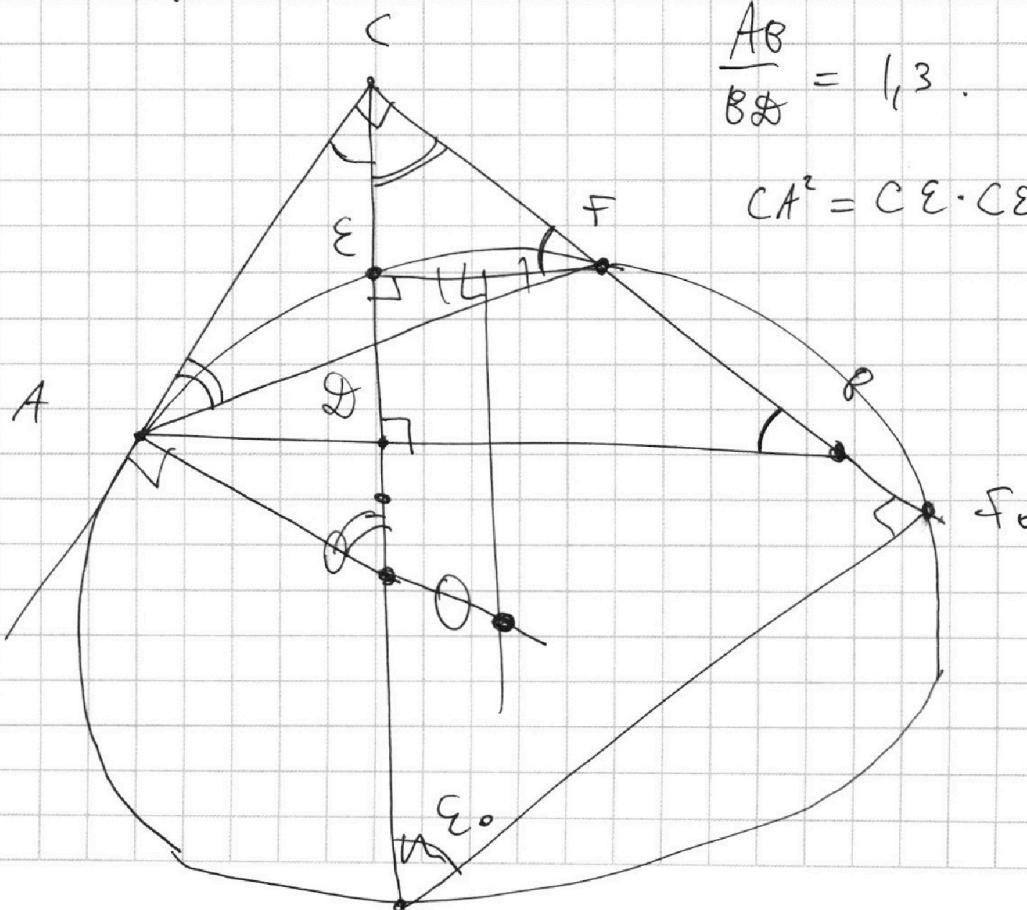
- Δ
- (1; 36)
 - (2; 32)
 - (3; 28)
 - (10; 0)

$$q \quad \frac{S_{CEF}}{S_{ACB}} = \frac{CA^4}{CE_0 \cdot CF_0 \cdot CA \cdot CB}$$



$$\frac{AB}{BD} = 1,3.$$

$$CA^2 = CE \cdot CE_0 = CF \cdot CF_0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos \cos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + X.$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi + 2X}{10}\right).$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi + 2X}{10}\right)$$

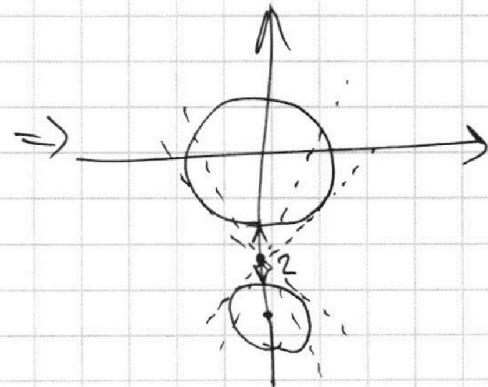
$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi + 2X}{10} + 2\pi k$$

$$\cancel{5\pi - 10x = 3\pi + 2x + 20\pi k}$$

$$\cancel{12x = 2\pi + 20\pi k}$$

$$x = \frac{\pi + 10\pi k}{6}.$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

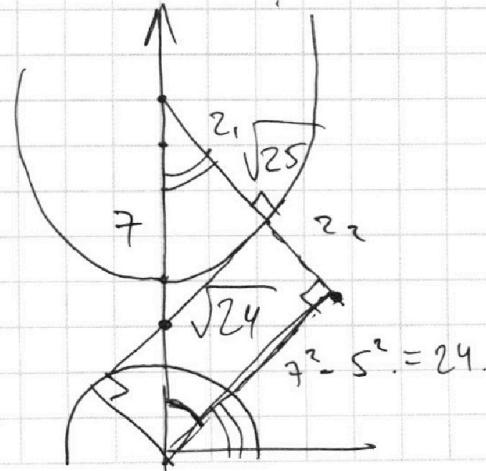


$$y = -\frac{x}{3a} + \left(\frac{7b}{3a}\right)$$

$$y = -\left(\frac{1}{3a}\right)x + C$$

$$y = kx + C$$

$$\cos \varphi / 4 \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{5}. \Delta$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 8 \log_{6x}(7) = \log_{36x^2} 393 - 4.$$

$$\left(\frac{\ln(6x)}{\ln 7}\right)^4 - 2\left(\frac{\ln 7}{\ln 6x}\right) = \frac{\ln 393}{\ln(36x^2)} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^4 - 2 \frac{\ln 7}{\ln 6x} = \frac{3 \ln 7}{2 \ln 6x} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 - \frac{7}{2} + 4 \frac{\ln 6x}{\ln 7} = 0. \Rightarrow (?)$$

$$2x^5 - 7 + 4x = 0.$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_2(7^5) - 4$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^4 + 6 \left(\frac{\ln 7}{\ln y}\right) = \frac{5 \ln 7}{2 \ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \left\{ \left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 + 4 \left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right) = \frac{7}{2} \right.$$

$$\left. \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^5 + 4 \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right) = -\frac{7}{2}. \right.$$

$$(\ln 6x)^5 + 4(\ln 6x)(\ln 7)^4 + (\ln y)^5 + 4(\ln y)(\ln 7)^4$$

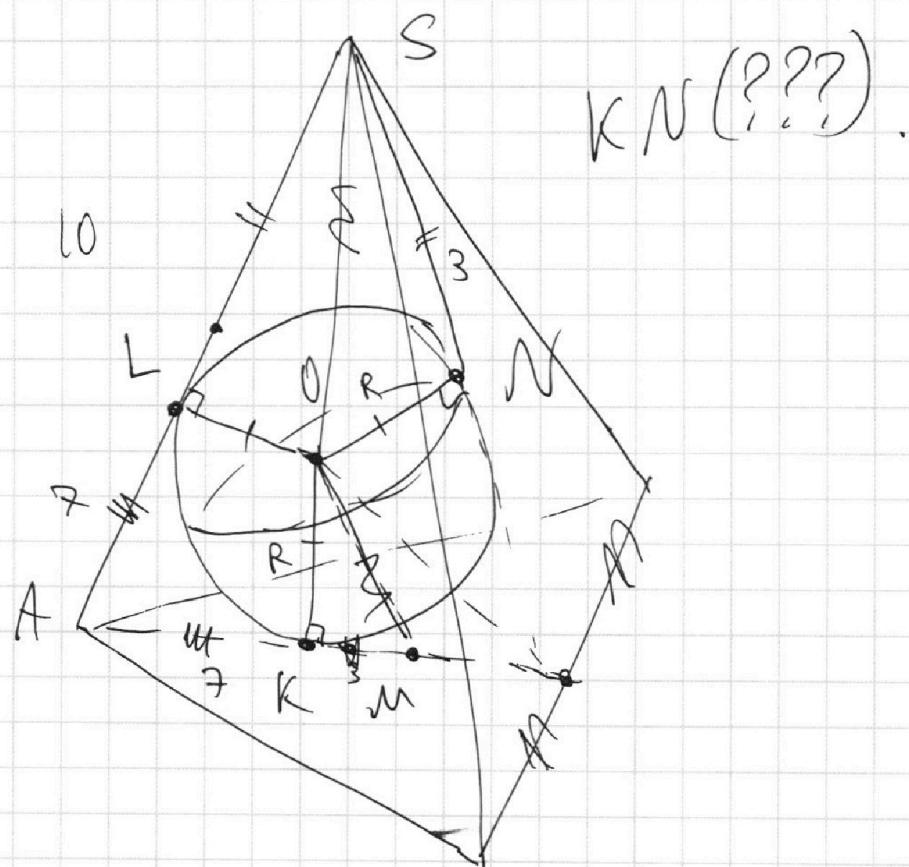
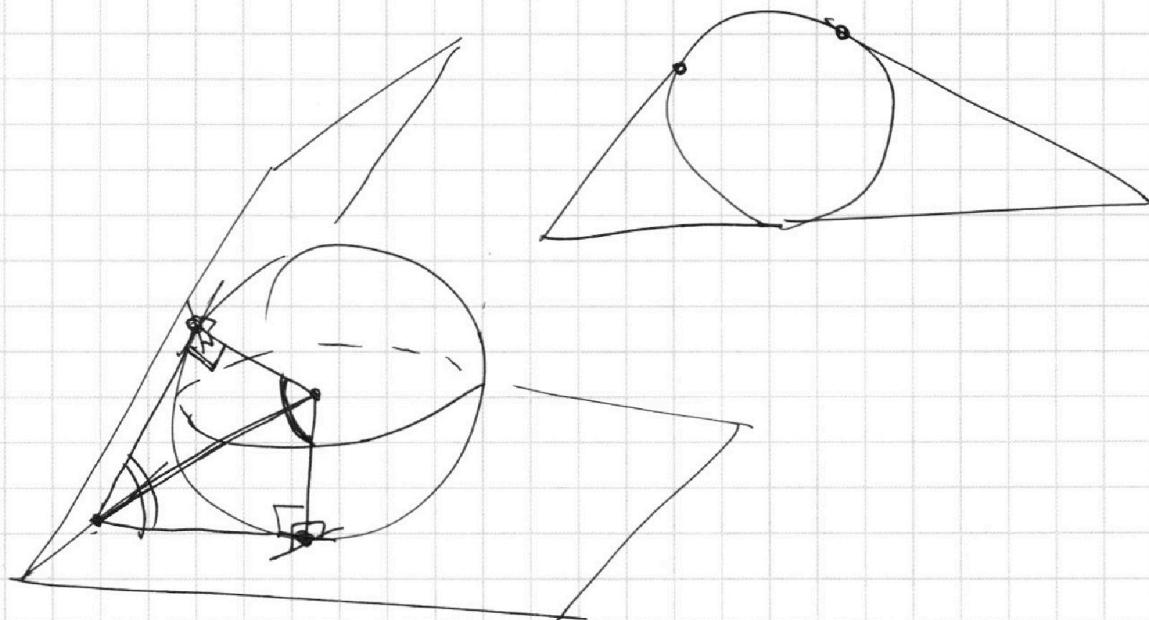
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

A geometric diagram on grid paper showing a large triangle ABC with various points L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z marked on its sides and interior. The diagram includes labels such as 49+16, 3, 5, 7, $\sqrt{65}$, 4, L, S, A₁, and question marks. An inset shows a 3D perspective drawing of a tetrahedron with a point labeled 0 and an exclamation mark.

$A, N^?$

$\#(\Delta x, \Delta y)$

$0, 40$
 $1, 36$
 $2, 32$
 \vdots
 $10, 0$.

0, 40

1, 36

2,32

1

1

10, 0

107

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



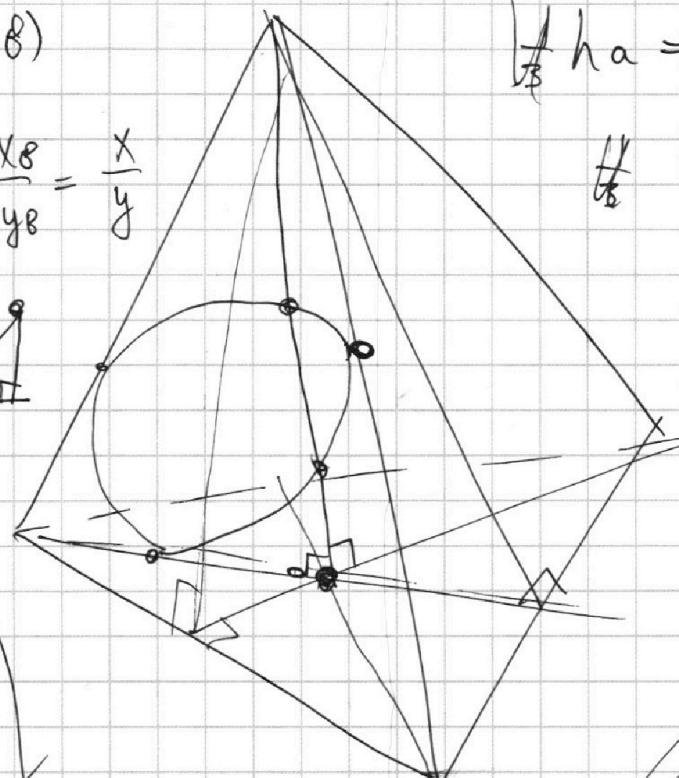
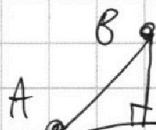
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

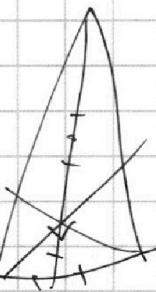
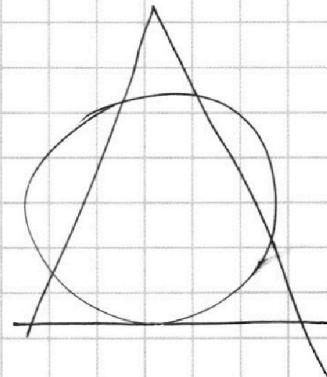
$$\ell(A, B)$$

$$\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} = \frac{x}{y}$$

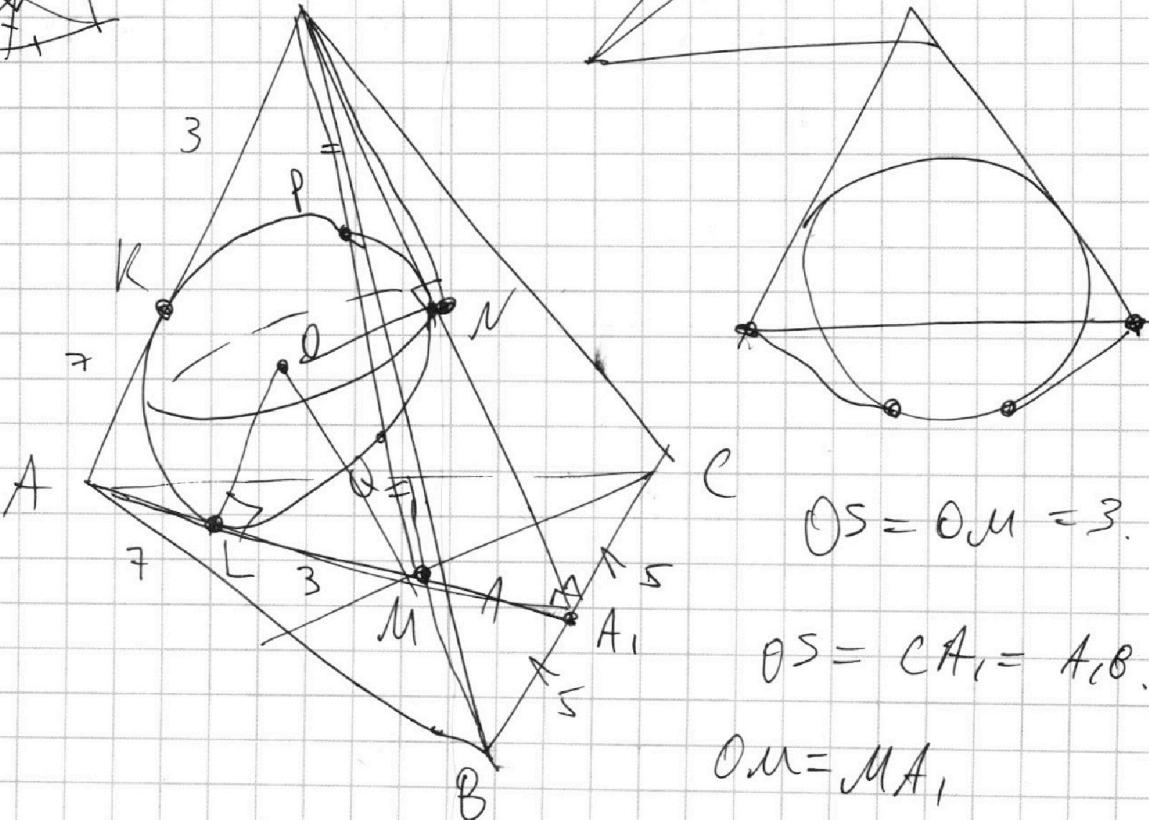


$$h_a = \frac{2S}{BC} = \dots 12.$$

$$h_c = ?$$



S





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

CE
H.S.

CE . CH
DE . UR

A geometric diagram on grid paper showing triangle ABC. Point M is the midpoint of side BC. Point S is on segment AB, and point T is on segment AC. Line segments MS and MT are drawn. Point U is located on the ray extending from M through T. A small circle with a center on segment MT is tangent to segment MU at U. A horizontal line segment connects the intersection of segment MS with the circle to the intersection of segment MU with the circle. The letter 'A' is written above vertex B, and the letter 'M' is written to the right of vertex C.

$$\Rightarrow fM \perp CM$$

$$\delta C = A_M$$

$$\text{man} + \text{dad} = \text{bmft} + \text{cnc}$$

$$25a + m^2a = m b^2 + n c^2$$

$$FC = 10$$

$$S = 60$$

$$AM = 10$$

$$\Rightarrow AT = 15$$

$$\cancel{MC} = M8 = 5\sqrt{2}$$

A diagram of triangle ABC. Point S is on segment AB, point M is on segment AC, and point U is on segment BC. Segments MS and MU are drawn, intersecting at point I. A horizontal line through I intersects segment BC at point Z. The segments AI, BI, and CI are labeled with tick marks. The segments SI, MI, and UI are also labeled with tick marks. The segments AZ, BZ, and CZ are labeled with tick marks. The segments SZ, MZ, and UZ are labeled with tick marks.

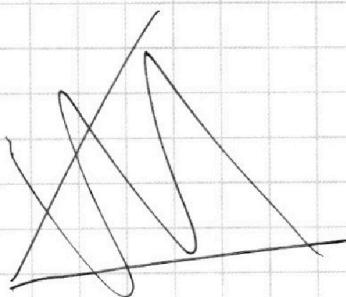
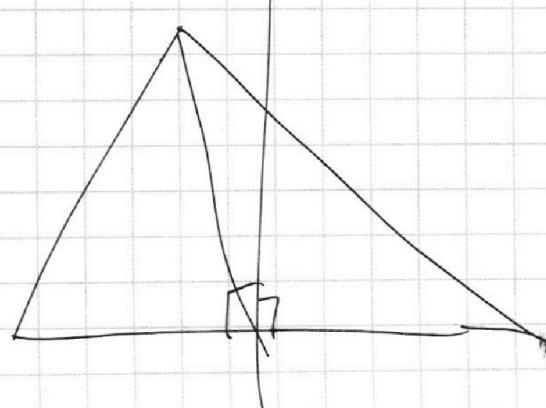
$$\Rightarrow CS = BU =$$

$$MB \cdot MC = \frac{4}{3} CS \cdot BU$$

$$\frac{1}{2} M \theta \cdot M C = S_{\Delta B M C} = \frac{1}{3} S_{\Delta A B C}$$

$$M8 \cdot MC = 40$$

$$CS \cdot BU = 90 \Rightarrow CZ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

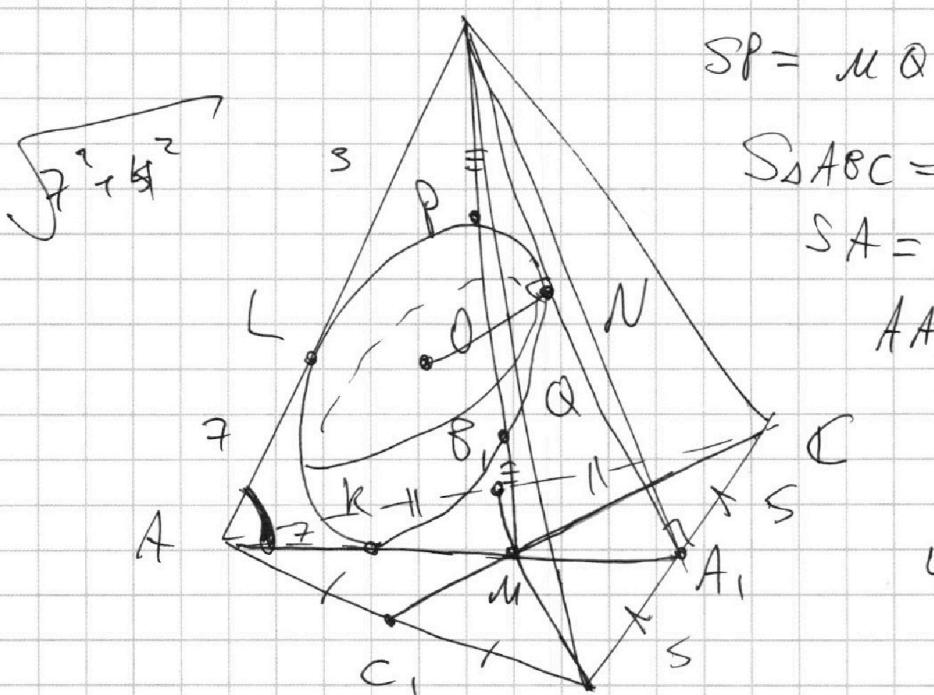
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

SABC.

Эм.



$$SP = \mu Q$$

$$S_{\triangle ABC} = 60$$

$$SA = SC = 10$$

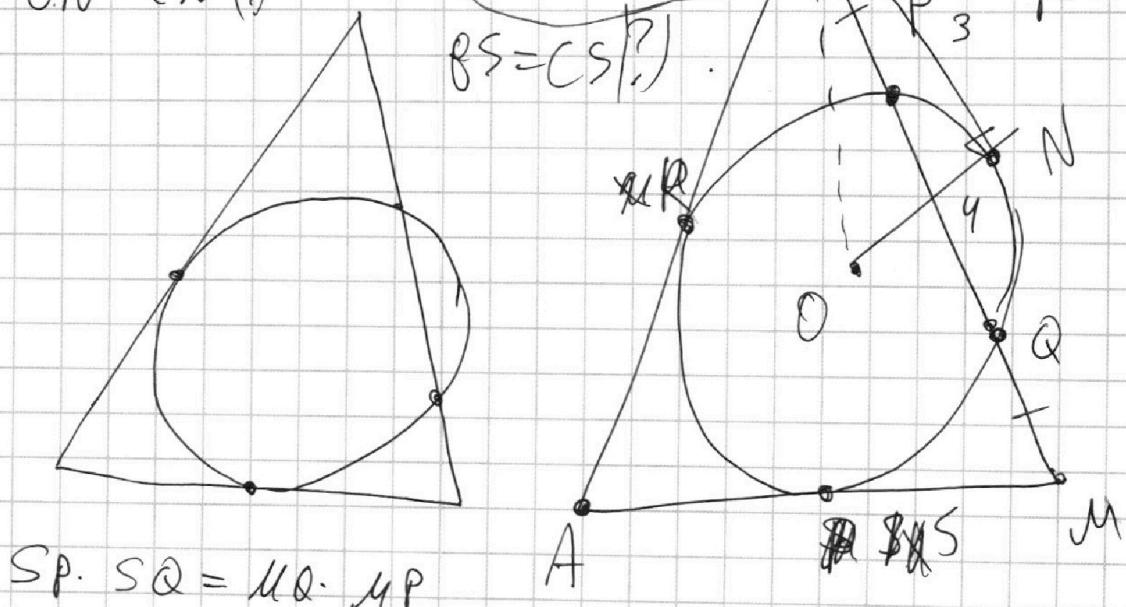
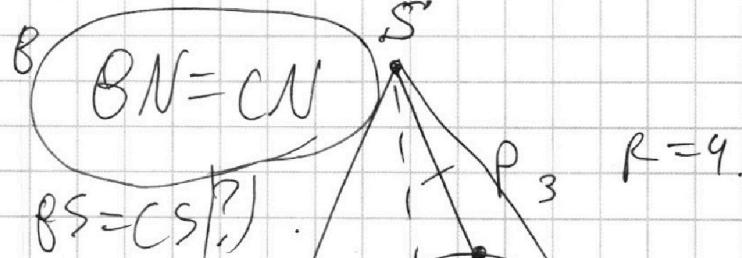
$$AA_1: 88, CC_1: (?)$$

$$AL = AK = 7$$

$$\varphi(P)$$

$$SN = 3$$

$$BN = CN (?)$$



$$SP \cdot SQ = \mu Q \cdot \mu P$$

$$\Rightarrow MS = AS \Rightarrow AM = 10 = AS.$$



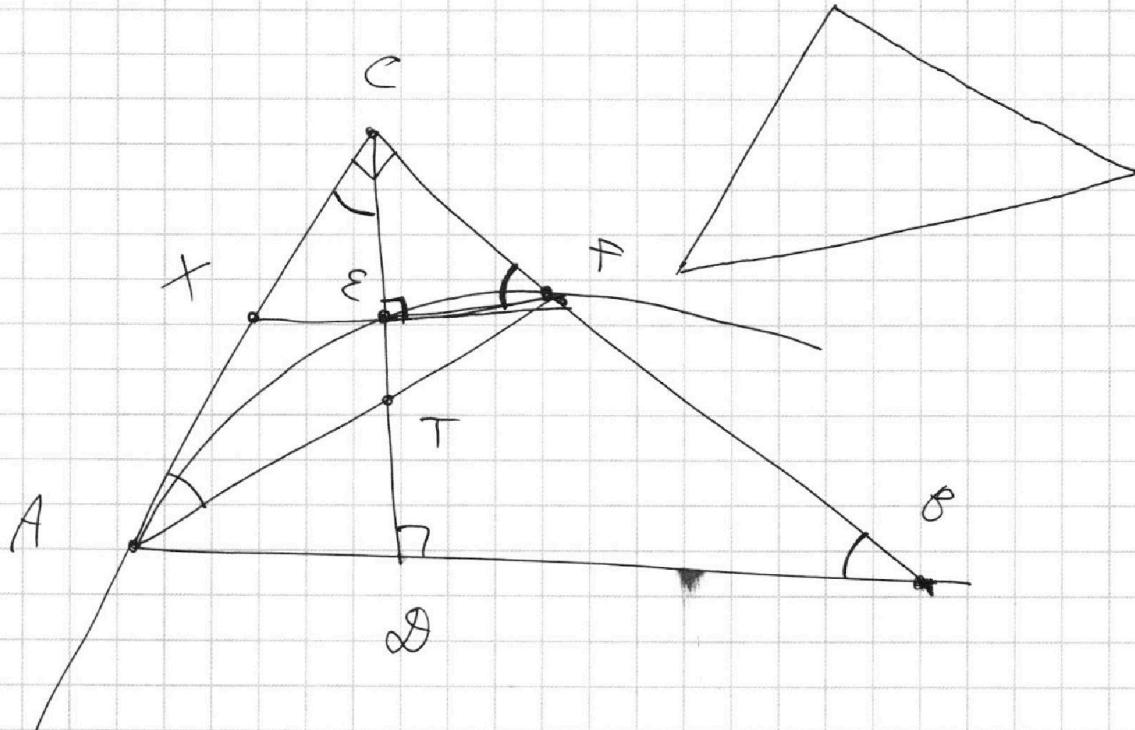
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

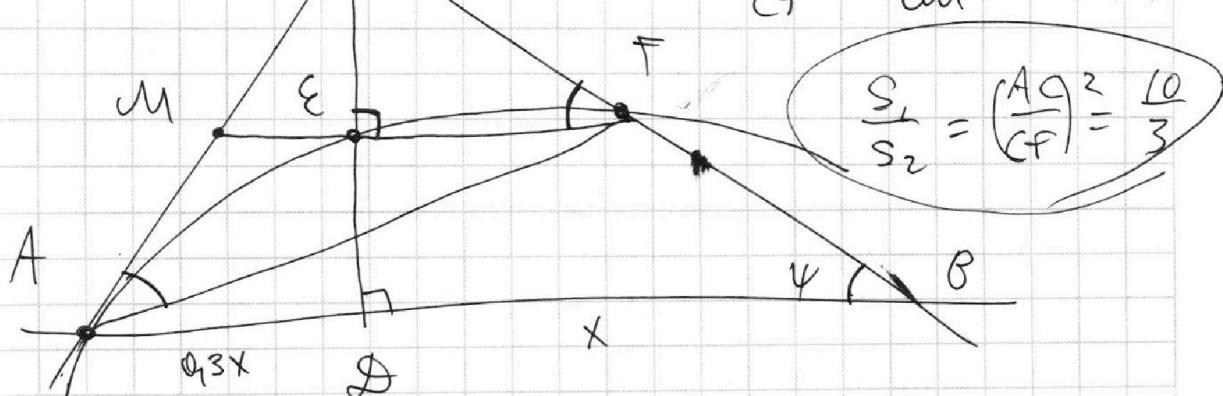
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CM \cdot CA = CF^2$$

$$\frac{CA}{CF} = \frac{CF}{CM} = \operatorname{tg} \psi$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{AG}{CF}\right)^2 = \frac{10}{3}$$



$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{x} = \frac{0,3x}{h}$$

$$h = \sqrt{0,3}x$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{3}{10}} \Rightarrow$$

