



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11.

Пусть $a = k \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, $b = m \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$, $c = n \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$
 $(k, m, n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0)$. Тогда

$$ab = km \cdot 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2} \dots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = mn \cdot 2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_2 + \gamma_3} \dots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = kn \cdot 2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_3} \dots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

\otimes числа k, m, n не делятся на $2, 3, 5$; $\alpha_1, \dots, \gamma_3 \in \mathbb{Z}$

Тогда из условия кратности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 14 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 34 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \Rightarrow \text{мин. степень } 2 \text{ в } ab - 17. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \beta_3 + \beta_1 \geq 21 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{55}{2} > 27 \Rightarrow \text{мин степень } 3 \text{ в } abc - 28. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \\ \gamma_3 + \gamma_1 \geq 39 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34, \text{ но т.к. } \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \\ \text{и } \gamma_2 \geq 0, \text{ то } \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39, \text{ мин степень } 5 \text{ в } abc - 39. \end{array} \right.$$

Тогда минимальное значение $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$
 (это возможно при $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$, $b = 2^4 \cdot 3^7$, $c = 2^{10} \cdot 3^{14} \cdot 5^2$)

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

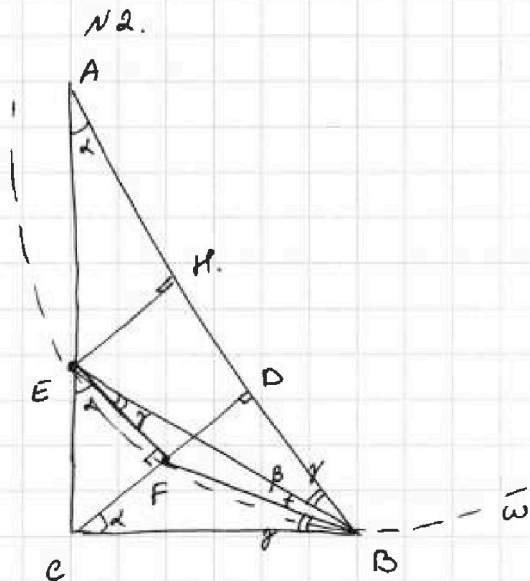
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle BAC = \alpha$;
 $\angle EBF = \beta$, $\angle FBC = \angle FEB = \gamma$
 ($\angle FEB$ в окр-ти ω -
 вписанный, опирающийся
 на дугу \widehat{BF} ; $\angle FBE$ -
 угол между касательной и
 хордой BF , стягивающей
 дугу $\widehat{BF} \Rightarrow \angle FBC = \frac{\widehat{BF}}{2} = \angle FEB$).

П.к. $EF \parallel AB$, то $EF \perp ED$;
 $\angle CEF = \angle CAD = \alpha$

В прямоугольном CEB $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow 90^\circ - \alpha = \beta + \gamma =$
 $= \angle ABC \Rightarrow \angle ABE = 90^\circ - \beta - \gamma = 90^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha$.

Кроме того, $ED \perp AB \Rightarrow \angle DEB = \alpha$. Тогда
 $\triangle AEB \sim \triangle FEB$ по 2-м углам ($\angle BAE = \angle FEB = \alpha$;
 $\angle ABE = \angle FBC = \gamma$). Тогда $\frac{BE}{AB} = \frac{EF}{AE} = \sin \alpha$.

Пусть $EH \perp AB$. Тогда $EHDF$ - геом-к $\Rightarrow EH = FD$;
 $\sin \alpha = \frac{EH}{AE} = \frac{DF}{AE} = \frac{CF}{AE} \Rightarrow DF = CF \Rightarrow F$ - середина

высоты ED . П.к. $EF \parallel AB$, то $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ с
 коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \frac{1}{4}$.

У $\triangle CAD$ и CEB общая высота $ED \Rightarrow \frac{S_{CAD}}{S_{CEB}} = \frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$;
 $S_{CAD} + S_{CEB} = S_{ABE}$

$\frac{S_{CAD}}{S_{ABE}} = \frac{5}{7}$, тогда $S_{CAD} = \frac{5}{7} S_{ABE}$; $S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CAD} =$
 $= \frac{5}{28} S_{ABE} \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5} \text{ к1}$

Ответ: $\frac{28}{5}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = \cos x & (1) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{aligned} -5\pi &\leq \pi - 2x \leq 5\pi \\ -6\pi &\leq -2x \leq 4\pi \\ -4\pi &\leq 2x \leq 6\pi \\ -2\pi &\leq x \leq 3\pi \quad (*) \end{aligned}$$

$$(2): \frac{\sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)}{\sin} \cdot \cos x = 0$$

$$\cos x - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) \cos\left(\frac{2\pi - 6x}{10}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) = 0 & (3) \\ \cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3): \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi - 2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi - 2x = 5\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

С учётом (*) получаем $x = \frac{\pi}{2}$ ($k=0$), $x = 3\pi$ ($k=-1$),
 $x = -2\pi$ ($k=1$)

$$(4): \cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi - 6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6x = -2\pi - 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi + 5\pi h}{3}, h \in \mathbb{Z}$$

Условию (*) удовлетворяют $x = -\frac{\pi}{3}$ (или $h=0$),
 $x = -2\pi$ ($h=1$), $x = \frac{4\pi}{3}$ ($h=-1$), $x = 3\pi$ ($h=-2$)

Ответ: -2π ; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$; 3π .

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

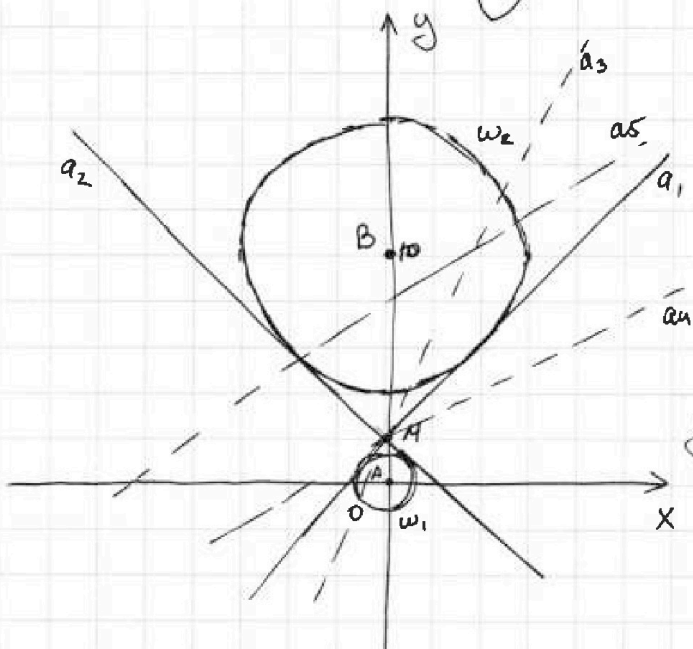
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ур-е (2) системы равносильно $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (3) \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 & (4) \end{cases}$$

Ур-е (3) задаёт на координатной пл-ти окр-ть ω_1 с центром $A(0; 0)$ и радиусом $R_A = 1$; ур-е (4) - окр-ть ω_2 с центром $B(0; 10)$ и радиусом $R_B = 6$.

Ур-е (1) $\Leftrightarrow 3y = ax + 4b \Leftrightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ - на координатной пл-ти прямая. Чтобы исходная система имела ровно 4 решения, эта прямая должна пересекать каждую из окр-тей ровно 2 раза.



В прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ a отвечает за угловой коэффициент ($\frac{a}{3}$ - тангенс угла наклона прямой), b - за смещение вдоль оси ОУ. Пусть прямые a_1 и a_2 - общие касательные к ω_1 и ω_2 . (из симметрии $a_2 = -a_1$). для прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ найдётся коэффициент b такой, что она пересечёт ω_1 и ω_2 по 2 раза каждую, при $a \in (a_1; a_2)$,

Пусть M - точка пересечения "крайних" прямой a_1 и $a_2 = -a_1$ (из симметрии M лежит на ОУ). Тогда при $a \in (a_1; a_2)$ прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ проведённая a_1 и M , пересечёт каждую из 2-х окр-тей 2 раза; при $a \leq a_1$ или $a \geq a_2$ прямая, проведённая из M , пересечёт либо обе окр-ти по 1 разу (при a_1 и a_2) (см. на след. стр.)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

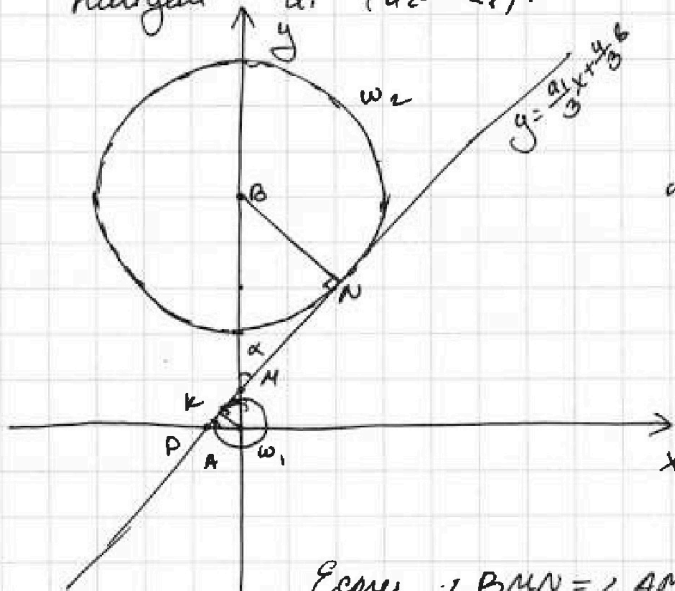
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (продолжение) либо на одну из осей и при движении вверх/вниз вдоль оси Ox (как на рисунке) пересечёт не более 1-ой окружи в одной или 2-х точках.

Найдём a_1 ($a_2 = -a_1$):



Пусть прямая касается ω_1 в т.к. ω_2 в т.н.
Тогда $\triangle MBN \sim \triangle MAK$
($\angle BMN = \angle AMK$ как вертикальные, $\angle MNB = \angle MKA = 90^\circ$).

$$AK = 1, BN = 6 \Rightarrow \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AK}{BN} = \frac{1}{6};$$

$$AB = 10 \Rightarrow AM = \frac{10}{7}, \text{ тогда } BM = \frac{60}{7}.$$

Если $\angle BMN = \angle AMK = \alpha$, то в $\triangle MAP$

(P - точка пересечения прямой и Ox) $\angle MPA = 90^\circ - \alpha = \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{a_1}{3} = \tan \alpha. \quad \sin \alpha = \frac{BN}{BM} = \frac{6}{\frac{60}{7}} = \frac{7}{10}. \quad \cos \alpha \text{ (т.к. } \alpha < 90^\circ)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}; \quad \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{51}}{7}. \quad \text{Тогда}$$

$$a_1 = 3 \tan \beta = \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

Ответ: $(\frac{3\sqrt{51}}{7}; -\frac{3\sqrt{51}}{7})$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Заметим, что, т.к. есть слагаемые $\log_5^4(2x)$, $3\log_{2x}5$, $\log_5^4 y$, $4\log_5 y$, то $2x > 0$ и $2x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ и

$y > 0$ и $y \neq 1$ (заметим, что при таких знаках-ях x и y $\log_5^4(2x) \neq 0$ и $\log_5^4 y \neq 0$).

При этих ограничениях для x и y пусть

$$\log_5 2x = u \neq 0; \quad \log_5 y = v \neq 0. \quad \text{Тогда:}$$
$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 - \log_{2x} 5 > 625 + 3 = 0$$
$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 - \frac{4}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0 \quad \text{— прикидывает возр.}$$
$$u^4 - \frac{3}{u} - \frac{4}{3u} + 3 = 0 \quad | \cdot 3u \neq 0$$

$$3u^5 - 9 - 4 + 9u = 0$$

$$3u^5 - 13 + 9u = 0 \quad (1) \Rightarrow 3u^5 + 9u = 13$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y - \log_{30,2} 3 + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_5 y + \frac{1}{3} \log_5 y + 3 = 0 \quad (7\text{-к. } \log_5 30,2 = \frac{1}{3})$$
$$= \log_5^3 \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \log_5 y, \quad \text{или } v^4 + \frac{4}{v} + \frac{1}{3v} + 3 = 0 \quad | \cdot 3v \neq 0$$

$$3v^5 + 12v + 1 + 9v = 0$$

$$3v^5 + 13 + 9v = 0 \quad (2) \Rightarrow 3(-v)^5 + 9 \cdot (-v) = 13$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 3u^5 + 9u + 3v^5 + 9v = 0 \Rightarrow 3u^5 + 9u = -3v^5 - 9v$$

$$\Leftrightarrow u^5 + 3u + v^5 + 3v = 0 \Leftrightarrow u^5 + 3u = (-v)^5 + 3 \cdot (-v)$$

Получили $f(u) = f(-v)$, где $f(t) = 3t^5 + 9t$. Заметим, что $f(t)$ — возрастающая функция (как сумма возр. $3t^5$ и $9t$); $f'(t) = 15t^4 + 9 \geq 9 > 0$ при $\forall t$ $\Rightarrow \Rightarrow f(u) = f(-v)$ выполняется только при $u = -v$,

$$\text{т.е. } u + v = 0$$

$u + v = \log_5(2x) + \log_5 y = \log_5(2xy) = 0$, откуда $2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$ — единственное возможное значение для xy .

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

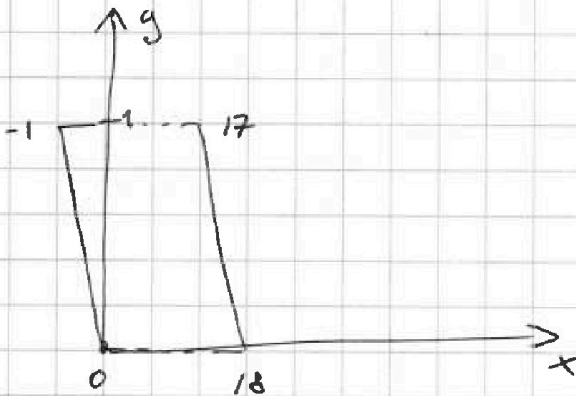
№ 6

Точки P и Q лежат на прямой $y = -5x$; точки
R и S - на прямой $y = -5x + 90$.

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$(y_2 - y_1) : 5$. Для $y_2 - y_1 = 0$ должно быть - 9

$$x_2 - x_1 = 9$$



для $y_1, y_2, \dots \in \mathbb{Z}$
взять x_2 - от 0 до 18 -
19 вар \Rightarrow 10 пар $x_2 - x_1 = 9$.
0; 9, 1; 10, ..., 9; 18.
 $y \in \mathbb{Z}$ - от 0 до 81 - 81
вар. Пар такого вида -
10 · 81 = 810.

Всего пар с $x_1, x_2, y, y_2 \in \mathbb{Z}$:
19 · 81.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5 2x = 4$$

$$u^4 - \frac{3}{u} - \frac{4}{3u} + 3 = 0 \quad | \cdot 3u$$

$$3u^5 - 9 - 4 + 9u = 0$$

$$3u^5 + 9u - 13 = 0 \quad (1)$$

$$v^4 + \frac{4}{v} + \frac{1}{3v} + 3 = 0 \quad | \cdot 3v$$

$$3v^5 + 12 + 1 + 9v = 0$$

$$3v^5 + 9v + 13 = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2): 3u^5 + 9u + 3v^5 + 9v = 0$$

$$u^5 + 3u + v^5 + 3v = 0$$

$$(u+v)(\dots) = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{xy} 0,2 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 + \frac{1}{3} \log_{10} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5 y = v$$

$$u+v=?$$

$$u+v=0$$

$$\log_5 2xy = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

$$4t^5 + 3t^2 + 3t + 1 = \frac{13}{t^5} \quad | \cdot t^5$$

$$t^5 + 3t^2 + 3t + 1 + \frac{3}{t^4} = f(t)$$

$$4t^5 + 3t^2 + 3t + 1 = \frac{13}{t^5}$$

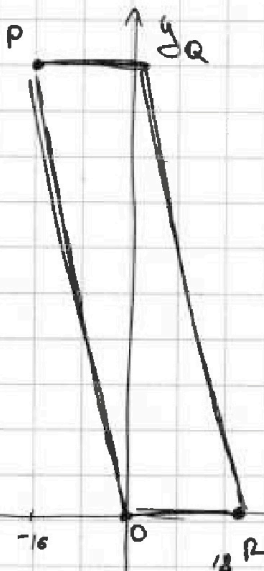
$$u^5 + 3u = -v^5 + 3v$$

$$f(u) = f(-v)$$

$$f(t) = t^5 + 3t \uparrow$$

$$\Rightarrow u = -v$$

6

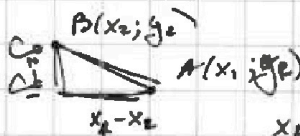


$$(x_1; y_1) \quad (x_2; y_2)$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_1 - y_2 = 45 \quad P(-16; 80)$$

$$|k_1 - k_2|$$

$$Q(2; 80)$$



$$x_2 - x_1 \leq 34$$

$$5x_2 - 5x_1 \leq 170$$

$$y_2 - y_1 \leq 80$$

$$a; b \quad 5a + b = 45$$

101
-9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

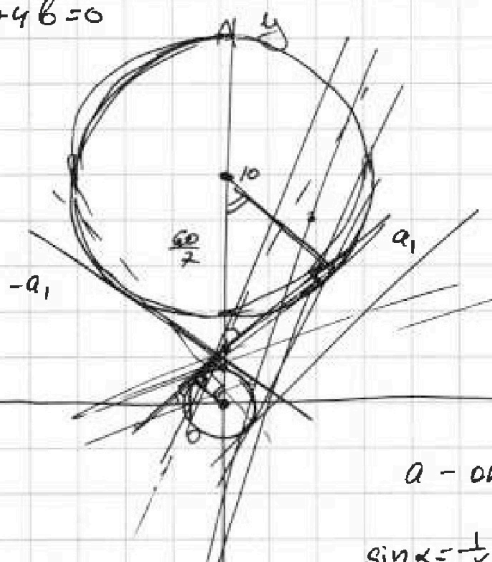
(2):
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = (x^2 + (y - 10)^2 + 100) - 36$$

(1): $ax - 3y + 4b = 0$

$$3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$



$$\frac{1}{x} = \frac{3}{5-x}$$

$$5 - x = 3x$$

$$4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}$$

$a - \text{om } a_1 \quad 90 - a_1$

$\sin \alpha = \frac{1}{x} = \frac{3}{5-x}$

$5 - x = 3x \quad 4x = 5$
 $x = \frac{5}{4}$

$\text{tg } \beta$

$\sin \alpha = \frac{4}{5} \quad 5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$
 $\cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

$\text{tg } \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$

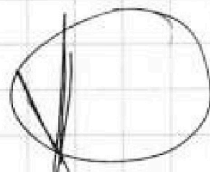
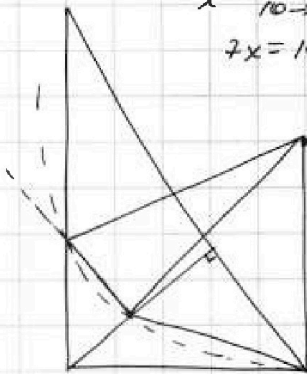
$\frac{4}{3} - \text{om } \frac{3}{4} \quad 90 - \frac{3}{4}$
 $a - \text{om } \frac{3}{4} \quad 90 - \frac{3}{4}$
 $(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4})$

$$\frac{1}{x} = \frac{6}{10-x}$$

$$7x = 10$$

$$x = \frac{10}{7}$$

$$\frac{6}{\frac{10}{7}} = \frac{7}{10}$$



$$\frac{1}{x} = \frac{6}{10-x}$$

$$10 - x = 6x$$

$$7x = 10 \quad x = \frac{10}{7}$$

⑤ $\log_5^4(ax) - 3 \log_{ax} 5 = \log_{8x} 3 \cdot 625 - 3; \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y^3 0,2 - 3$

$\log_5(ax) = t$

$\frac{4}{3} \log_{ax} 5$

$\log_y^3 0,2 = \log_y^3 \frac{1}{5} = \frac{y > 0, y \neq 1}{x > 0, x \neq \frac{1}{2}}$
 $= -\frac{1}{3} \log_5^5 625 = 5^4$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - 3 \quad | \cdot 3t$

$3t^5 - 9 - 4t^2 + 9t = 0 \quad b = 4$

$3t^5 - 4t^2 + 9t - 9 = 0$

$\log_5 y = v$

$v^4 + \frac{4}{v} = -\frac{1}{3}v - 3 \quad | \cdot 3v$

$3v^5 + 12 + v^2 + 9v = 0$

$3v^5 + v^2 + 9v + 12 = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

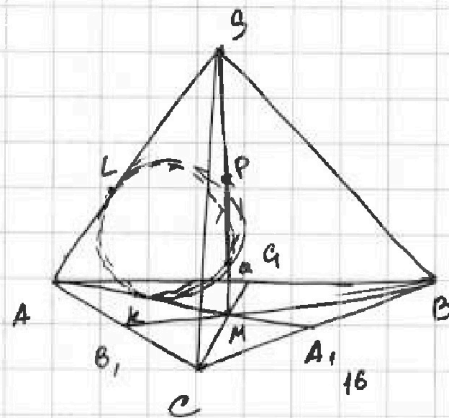
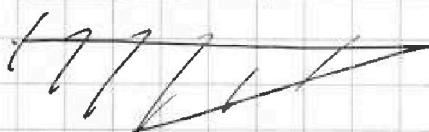
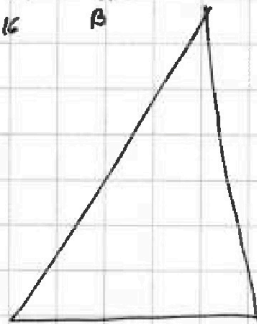
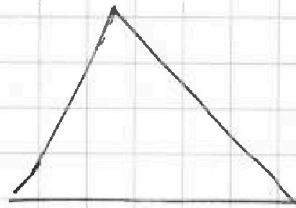
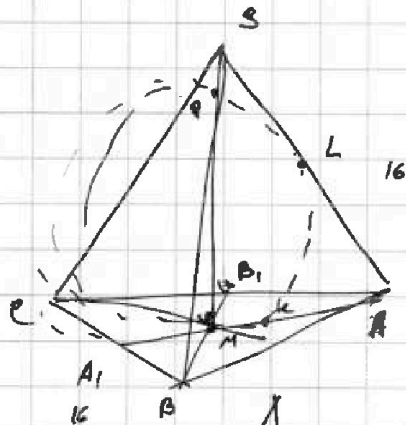
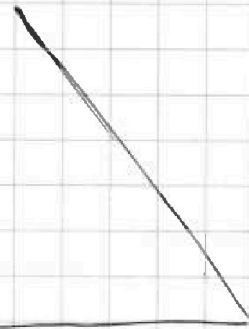
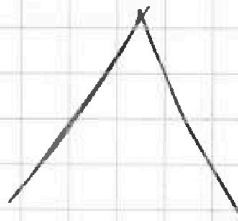
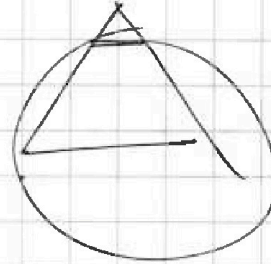
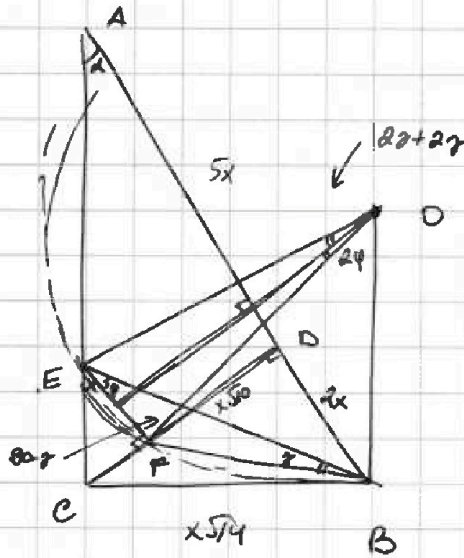
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2



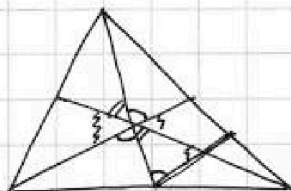
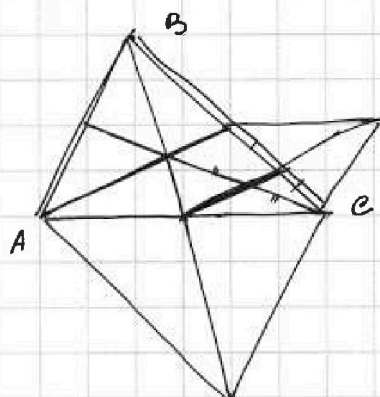
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



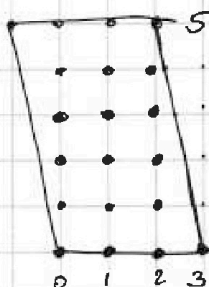
34-16
18
 $\frac{2\sqrt{3}}{2}$
 $\frac{3}{4}$
когда мододея
3
3 из мододея - 75

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

↑
0, 1, 2, 3, 4, ..., 9

$$x_2 - x_1 = 9 \quad 0, 9 \quad 1, 10, \dots, \underline{9 \ 18}$$

$$18 \cdot 5 = 90$$



QR - 19

$$19 \cdot 16 +$$

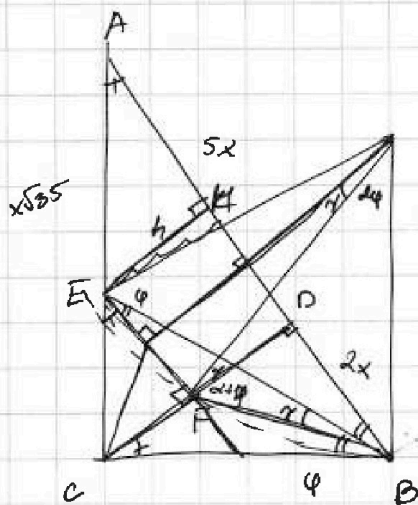
$$19 \cdot 17 + (80 - 17) \cdot 9 \quad \text{— целых точек}$$

$$y_2 = y_1: \quad \underline{10 \cdot 17 + (80 - 17) \cdot 9}$$

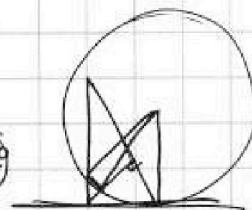
← 16
↑ 80
← 2 ← 1
↑ 10 ↑ 5

PO: $y = -5x$
-16; 80

QR: $y = -5x +$
 $-5x + 90$
 $y_2 - y_1: 5$



$$\frac{x \cdot 2 \cdot \sqrt{10}}{2}$$



$$\frac{BC}{AB} = \frac{CF}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$2\varphi + \theta + \alpha = 90^\circ$$

$$2\varphi + \theta = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \alpha = \dots$$

$$CF = a \quad AE = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{h}{AE} = \sin \alpha = \frac{CF}{AE} = h = CF$$

EP

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $ab = k \cdot 2^8 3^{14} 5^{12}$; $bc = m \cdot 2^{13} 3^{20} 5^{12}$; $ac = n \cdot 2^{14} 3^{21} 5^{20}$
 $a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{55} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$
 $2^{36} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68}$
 $abc = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$
 $ab = 2^8 3^{14} 5^{12}$
 $k=1, m=2, n=3$
 $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$
 $b = 2^4 \cdot 3^7$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$

$a = 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^8$; $b = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^2$; $c = 2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^7$

$\beta_1 + \beta_2 \geq 14$
 $\beta_2 + \beta_3 \geq 20$
 $\beta_1 + \beta_3 \geq 21$
 $\beta_2 = 0$
 $2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55$
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 28$
 $\beta_1 = 14$
 $\beta_2 = 8$
 $\beta_3 = 7$
 $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$
 $b = 2^4 \cdot 3^7$
 $c = 2^{10} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$
 $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$
 $\alpha_3 + \alpha_1 \geq 14$
 $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 35$
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$
 $\alpha_1 = 10$
 $\alpha_2 = 5$
 $\alpha_3 = 4$

$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 12$
 $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$
 $\gamma_3 + \gamma_1 \geq 39$
 $2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68$
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39$
 $\gamma_1 = 12$
 $\gamma_2 = 0$
 $\gamma_3 = 17$
20, 19

③ $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$
 $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow$

$\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) = \cos x$
 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$
 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$
 $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$
 $10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$
 $10(\frac{\pi}{2} - x) = \pi - 2x$
 $5\pi - 10x = \pi - 2x$
 $4\pi - 8x = \pi - 2x$
 $3\pi - 6x = \pi - 2x$
 $2\pi = 4x$
 $x = \frac{\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\sin\left(\frac{\pi-2x}{5}\right) = 0$

$-\pi \leq x \leq 3\pi$

$\frac{\pi-2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\pi-2x = 5\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$2x = \pi - 5\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$k=0: \frac{\pi}{2} \quad k=-1: \frac{6\pi}{2} = 3\pi \quad k=1: \frac{-4\pi}{2} = -2\pi$

2) $\cos\left(\frac{3\pi-6x}{10}\right) = 0$

$\frac{3\pi-6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$3\pi-6x = 5\pi + 10\pi k$

$6x = -2\pi - 10\pi k$

$x = \frac{-2\pi - 10\pi k}{6} = \frac{-\pi - 5\pi k}{3}$

$k=0: -\frac{\pi}{3}$

$k=1: -\frac{6\pi}{3} = -2\pi$

$k=-1: -\frac{-4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$k=-2: \frac{-2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{3} \\ -2\pi \\ 2\pi \end{cases}$

$2\pi: \cos x = -1$

$\cos(\pi) = -\frac{1}{2}$

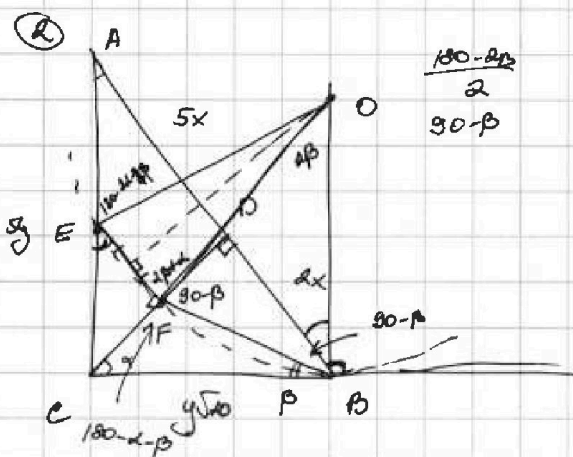
$\frac{5\pi}{3}$

$\pi = 6\pi$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

$\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$



$AD:DP = 5:2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{EFP}} = ?$

$\tan \alpha = \frac{AD}{DP} = \frac{2x}{x} = 2$

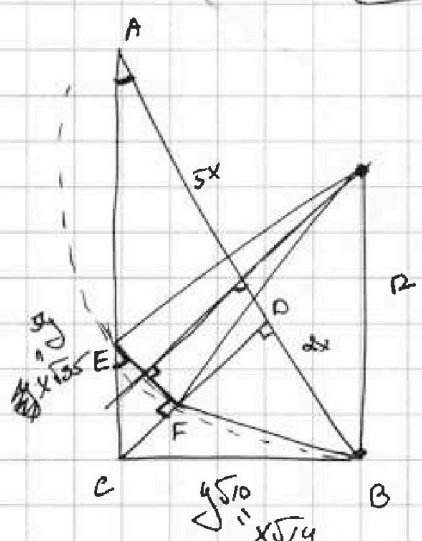
$AB \parallel EF$

$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CA}$

$h^2 = 10x^2$

$h = x\sqrt{10}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{h}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$



$25y^2 + 10y^2 = 35y^2$

$y\sqrt{35} = 7x$

$S_{ABC} = \frac{x^2 \sqrt{35} \cdot 14}{2} = \frac{x^2 \cdot 7\sqrt{10}}{2}$

$y = \frac{7x}{\sqrt{35}} = x\sqrt{\frac{7}{5}}$

$y \cdot 5 = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{5}} x = \frac{25\sqrt{7}}{5}$

$\sqrt{10}y = \sqrt{\frac{70}{5}} x = \sqrt{14} x$

$2\alpha + \beta + \gamma + 90 + \beta - 90 =$

$= 2\beta + \alpha$

$180 - \alpha - \alpha - 2\beta$