МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1.

Раз $ab \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, то $ab \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$. Аналогично $bc \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$, $ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$. Перемножим ab, bc, ac: $ab \cdot bc \cdot ac \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, т.е. $a^2b^2c^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$. (числа a, b, c по условию натуральные, поэтому при их перемножении никаких проблем со знаком не возникает, так что $abc > 0$). Тогда: $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$, числа a, b и c – натуральные, поэтому abc – тоже натуральное. Значит, оно не иррациональное $\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$.

Заметим, что показатели степеней простых множителей в разложении числа abc не могут быть меньше показателей степеней простых множителей в разложении чисел ab, bc, ac. То есть, если $ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, то степень 5 в разложении abc не менее 43, т.к. abc содержит в себе множителем ac. Таким образом, получаем, что $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$. С числами ab и bc ~~подобных~~ подобные нюансы соблюдены.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 (продолжение).

Осталось показать, что равенство $abc = 2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$ возможно. Возьмём $a=2^4\cdot3^6\cdot5^{15}$, $b=2^3\cdot3^5$, $c=2^{10}\cdot3^{11}\cdot5^{28}$.
Действительно, $ab \vdots 2^7\cdot3^{11}\cdot5^{14}$; $bc \vdots 2^{13}\cdot3^{15}\cdot5^{18}$; $ac \vdots 2^{14}\cdot3^{17}\cdot5^{43}$, а $abc=2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$.

Ответ: $2^{17}\cdot3^{22}\cdot5^{43}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2.

Дано: Решение:

$\triangle ABC$ – прямоугольный,

CD – высота,

$AB \parallel EF$,

$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

Найти:

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ – ?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 (X) 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3.

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

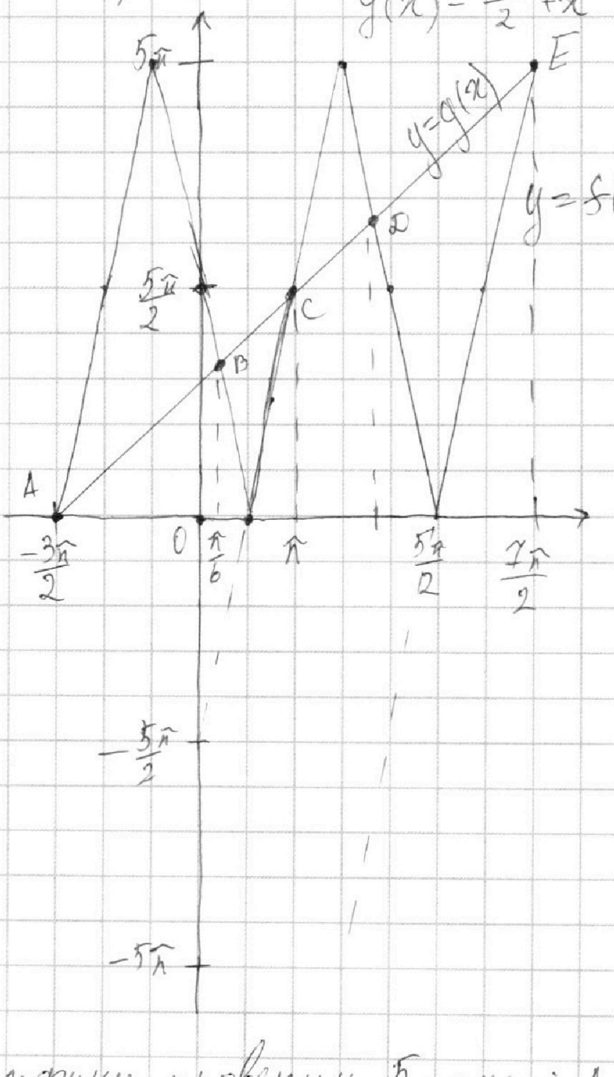
Отметим, что $0 \le \arccos(\sin x) \le \pi \Rightarrow 0 \le 5\arccos(\sin x) \le 5\pi$,

Поэтому мы рассматриваем такие x, что ~~$0 \le \frac{3\pi}{2}$~~

$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi$, т.е. $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$.

Построим графики $f(x) = 5\arccos(\sin x)$ на отрезке $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

$g(x) = \frac{3\pi}{2} + x$



По графику проверим 5 точек: A, B, C, D, E:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 3 (продолжение).

Точка A принадлежит участку $[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$, где $f(x) = 5x + \frac{15}{2}\pi$.

Тогда $5x + \frac{15\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$.

Поступим аналогично для остальных точек:

B: $f(x) = -5x + \frac{5\pi}{2}$; $\Rightarrow -5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

C: $f(x) = 5x - \frac{5\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$

D: $f(x) = -5x + \frac{25\pi}{2} \Rightarrow -5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$

E: $f(x) = 5x - \frac{25\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

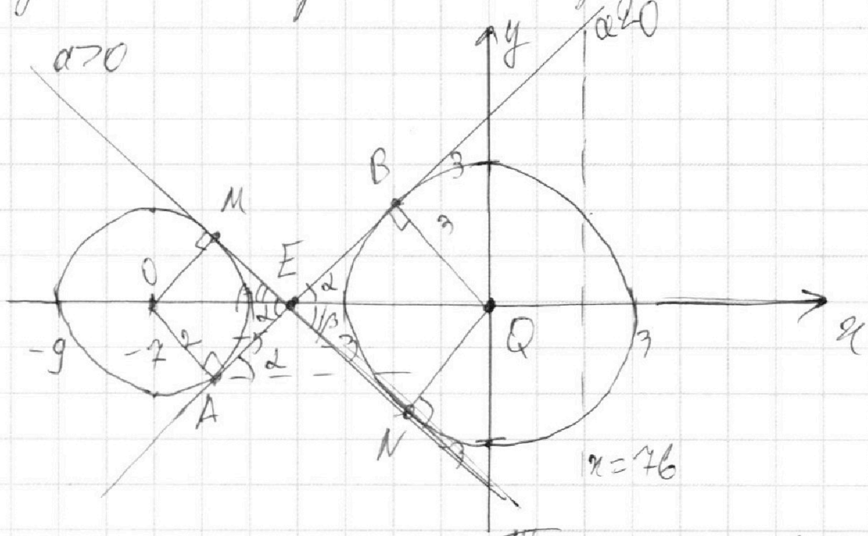
Задача 4.

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

Нижнее уравнение системы задаёт совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=4 \text{ — окр-ть с центром } O(-7;0) \text{ и радиусом } r=2 \\ x^2+y^2=9 \text{ — окр-ть с центром } Q(0;0) \text{ и радиусом } R=3. \end{array}\right.$$

Изобразим эти окр-ти на коорд. плоскости:



Сначала рассмотрим $a=0$. Тогда прямая l задана уравнением $x=7b$. Эта прямая всегда параллельна оси ординат $\Rightarrow$ не имеет более двух общих точек с окр-тями при всех b. Значит, $a=0$ не подходит.

Тогда при $a\neq0$ прямая l задана: $y=-\frac{1}{3a}x+\frac{7b}{3a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

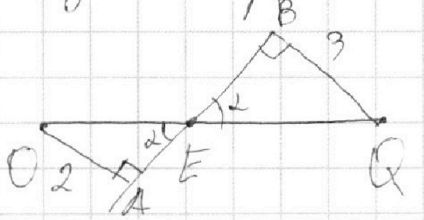
МФТИ

Задача 4 (продолжение).

Такая прямая имеет разный угол наклона и параллельно переносится на любые значения при разных в.

Пусть $a<0$. Тогда $\frac{1}{-3a}>0 \Rightarrow$ прямая l образует острый угол с осью абсцисс. Прямая будет 4 раза пересекать окружности при таких a, когда она не касается их обеих, как показано на графике (см. пред. стр.). При таком угле наклона ~~пр~~ и угле больше него прямая будет сначала иметь 2 общие точки с окр-тью с центром O, затем с окр-тью с центром Q, но никак не одновременно. В случае же касания прямая l будет иметь по 1 общей точке с окр-тями.

Из геометрии найдём $tg\,\alpha$:



$OQ=7$, $BQ=R=3$, $OA=r=2$.

$\triangle OAE \sim \triangle QBE$ по углу $\angle OEA$ и $\angle BEQ$.

$\frac{QE}{OE}=\frac{BQ}{OA}=\frac{3}{2} \Rightarrow QE=\frac{3}{2}\cdot OE$

$QE+OE=\frac{5}{2}OE=OQ=7 \Rightarrow OE=\frac{14}{5}$.

$\cancel{tg\alpha=}$ $AE=\sqrt{OE^2-OA^2}=\sqrt{\frac{196}{25}-\frac{100}{25}}=\frac{\sqrt{96}}{5}=\frac{4\sqrt{6}}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 4 (продолжение).

$tg\alpha = \frac{OA}{AE} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{2.5}{4\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = -\frac{1}{3a}$

$15a = -2\sqrt{6} \Rightarrow a = -\frac{2\sqrt{6}}{15} \Rightarrow$ при $a < -\frac{2\sqrt{6}}{15}$ $tg\alpha < \frac{5}{2\sqrt{6}}$,

и система может иметь 4 решения при каком-то b.

~~Картинка симме~~ При $a > 0$ прямая l соответственно будет убывать, и картинка будет симметрична относительно оси абсцисс той картинке, которую мы рассматривали при $a < 0$. Соответственно 4 решения для $a > 0$ может быть при $a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

Сразу скажем про ограничения для x и y:

$6x>0 \Rightarrow x>0$ $\quad 36x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\frac{1}{6}$

$6x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{6}$ $\quad y>0,\ y\neq 1,\ y^2 \neq 1 \Rightarrow y \neq \pm 1$

Подытожим: $x>0,\ x\neq \frac{1}{6},\ y>0,\ y\neq 1$.

Разберёмся с верхним уравнением системы:

$$\log_7^4(6x) - 2\cdot\frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

Пусть $t = \log_7 6x$.

$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4,\ t\neq 0$

$t^5 + 4t - 2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} \cancel{(1)} = 0$ (1)

Заметим, что $f(t) = t^5$ — возрастающая монотонно функция, $g(t) = t$ — тоже $\Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} = h(t)$ — монотонно возрастает, т.е. ур-е (1) имеет только 1 решение, которому соответствует только 1 значение x ($t = \log_7 6x$ тоже монотонно возрастает).

Задача 5 (продолжение).

Теперь поговорим о нижнем ур-ии системы:

$$\log_7^4 y + 6\cdot\frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 y} - 4$$

Пусть $n=\log_7 y$, $n\neq 0$. Тогда:

$$n^4+\frac{6}{n}=\frac{5}{2n}-4 \Rightarrow n^5+4n+6-\frac{5}{2}=0$$

$$n^5+4n+\frac{7}{2}=0 \quad (2)$$

С уравнением (2) получаем аналогичную ~~сис~~ ситуацию, как и с ур-ем(1). Есть только одно значение y, удовл. ур-ю (2). Сложим ур-я (1) и (2):

$$n^5+4n+t^5+4t+\frac{7}{2}-\frac{7}{2}=0$$

$$n^5+t^5+4(t+n)=0$$

$$(t+n)(t^4-t^3n+t^2n^2-tn^3+n^4)+4(t+n)=0$$

$$(t+n)(t^4-t^3n+t^2n^2-tn^3+n^4+4)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t+n=0,\\ t^4-t^3n+t^2n^2-tn^3+n^4+4=0;\end{array}\right. \quad \cancel{\left[\begin{array}{l} t+n=0\\ (t^2)^2-2\cdot t^2\cdot\frac{1}{2}tn+\frac{1}{4}t^2n^2+\frac{1}{4}t^2n^2\end{array}\right.}$$

Для нижнего ур-я совокупности имеем:

$$(t^2)^2-2\cdot\frac{1}{2}tn\cdot t^2+\frac{1}{4}t^2n^2+\frac{1}{4}t^2n^2-2\cdot\frac{1}{2}tn\cdot n^2+n^4+\frac{1}{2}t^2n^2+4=0$$

$$\left(t^2-\frac{1}{2}tn\right)^2+\left(\frac{1}{2}tn-n^2\right)^2+\frac{1}{2}t^2n^2+4=0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 5 (продолжение).

$\left(t^2-\frac{1}{2}tn\right)^2 \geq 0$, $\left(\frac{1}{2}tn-n^2\right)^2 \geq 0$, $\frac{1}{2}t^2n^2 \geq 0$, $4>0$, поэтому $\left(t^2-\frac{1}{2}tn\right)^2+\left(\frac{1}{2}tn-n^2\right)^2+\frac{1}{2}t^2n^2+4>0$, т.е. нижнее ур-е системы не имеет решений. Вот и остаётся:

$t+n=0 \Leftrightarrow \log_7 6x+\log_7 y=\log_7 1 \Rightarrow \log_7 6xy=\log_7 1$

$6xy=1 \Rightarrow xy=\frac{1}{6}$. Можно взять $x=1$, $y=\frac{1}{6}$. Тогда как раз будет соблюдено ОДЗ и будет получаться такое значение xy.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

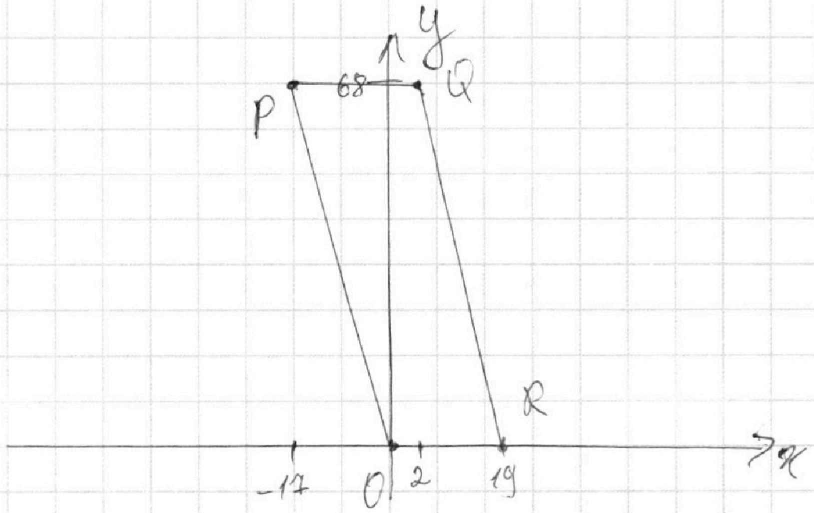
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6.

Изобразим на координатной плоскости параллелограмм $OPQR$:



Заметим, что если у нас есть прямая $y=-4x+a$, и если ей принадлежит точка $(x_1; -4x_1+a)$, а так же есть прямая $y=-4x+40+a$, и если ей принадлежит точка $(x_2; -4x_2+40+a)$, то как раз выполняется условие $4x_2-4x_1-4x_2+40+a+4x_1-a=40$. То есть, нам нужно посчитать количество точек в параллелограмме $OPQR$ таких, что ~~одна~~ первая из них принадлежит прямой $y=-4x+a$, а вторая — прямой $y=-4x+a+40$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6 (продолжение)

Сразу скажем, что сторона PO задана уравнением ~~y=4x~~ ~~y=~~ $y=-4x$ (коор-ды точек P и O действительно удовл. этой прямой). Найдём прямую, задающую сторону QR:

$$\begin{cases} 68=2a+b \text{ - коорд-ы т. } Q \\ 0=19a+b \text{ - коорд-ы т. } R \end{cases} \Rightarrow a=\cancel{-17}\,-4,\ b=76.$$

QR: $y=-4x+76$

То есть для прямых $y=-4x+a$ и $y=-4x+a+40$ можно сказать, что: $a\geq 0$, $a+40\leq 76$, т.к прямые эти лежат в парал-ме OPQR или лежат на его границах. Отсюда $0\leq a\leq 36$.

~~Через любую прямую такую~~ На любой такой прямой будет лежать 18 целых точек, т.к. $0\leq y\leq 68$, т.е. мы ограничены сверху и снизу а идём по целым точкам, т.е. $0\leq -4x+a\leq 68$. ~~Соответственно, у нас 37 значений a, для каждого из которых есть 18 точек на одной прямой, которым соответствуют по 18 точек~~

Для $a=4k$, $k\in\mathbb{Z}$ есть по 18 целых точек, для $a=4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ по 17.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6 (продолжение).

$10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17$

Ответ: $10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \frac{3}{2}\log_{6x}7 - 4$

$\begin{cases} x>0 \\ x \neq \pm\frac{1}{6} \end{cases}$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$

$x \neq$

$36x^2 - 1 \neq 0$

$(6x-1)(6x+1) \neq 0$

$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\log_7 6x} - 4$

$\begin{cases} y>0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$

$t = \log_7 6x \quad t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$

$t^5 - 2 = \frac{3}{2} - 4t \quad t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$

$n = \log_7 y$

$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{n} - 4 \quad n^5 + 6 - \frac{5}{2} + 4n = 0$

$n^5 + 4n + \frac{7}{2} = 0$

$t + n = \log_7 6xy \quad t^5 + n^5 + 4(t+n) = 0$

$\cancel{(t+n)(t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4)} + 4(t+n) = 0$

$t+n=0$

$(t^4 + t^3 n + t^2n^2 + tn^3 + n^4 + 4 = 0$

$6xy = 1$

$\cancel{t^4 + n^4 + tn(t^2+n^2) + t^2n^2 = 0}$

$xy = \frac{1}{6}$

$\cancel{t^4 + n^4 + tn(t^2 + n^2) = 0}$

$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$

$t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$

$\cancel{(t+n)(t^3 - t^2n}$ $\quad t^4 + n^4 + 4 + t^2n^2 - tn(t^2+n^2) = 0$

$\cancel{(t^2+n^2)^2 - tn(t^2+n^2) + 4 - t^2n^2 = 0}$

$(t^2+n^2)^2 - t^2n^2 - tn(t^2+n^2) + 4 = 0$

$t \quad \cancel{D = t^2n^2}$

$(t^2+n^2)^2 - tn(t^2+n^2) + 4 - t^2n^2 = 0$

$D = t^2n^2 - 16 + 4t^2n^2$

$t^4 - t^3n + \frac{1}{2}t^2n^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$

$t^4 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\cdot tn + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2\cdot\frac{1}{2}tn\cdot n^2 + n^4 + 4 = 0$

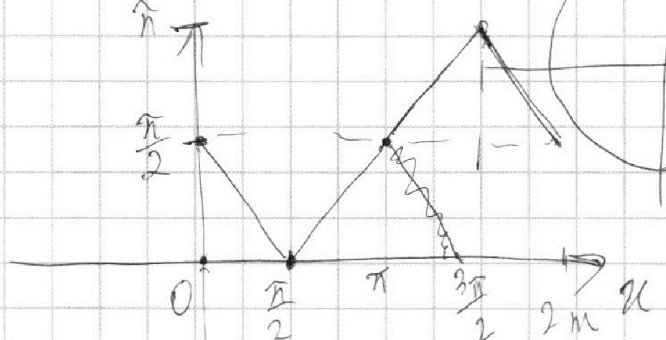
$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 +$

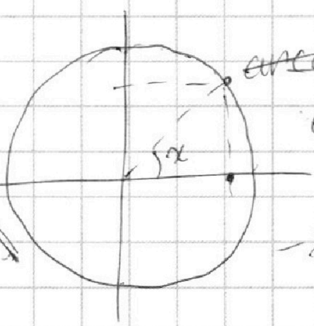
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

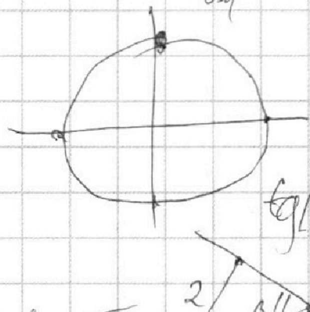




~~$\arccos(\sin x)$~~

~~$\arccos(\cos x) = x$~~

$-\frac{1}{3a} = -\frac{5}{2\sqrt6}$



1)

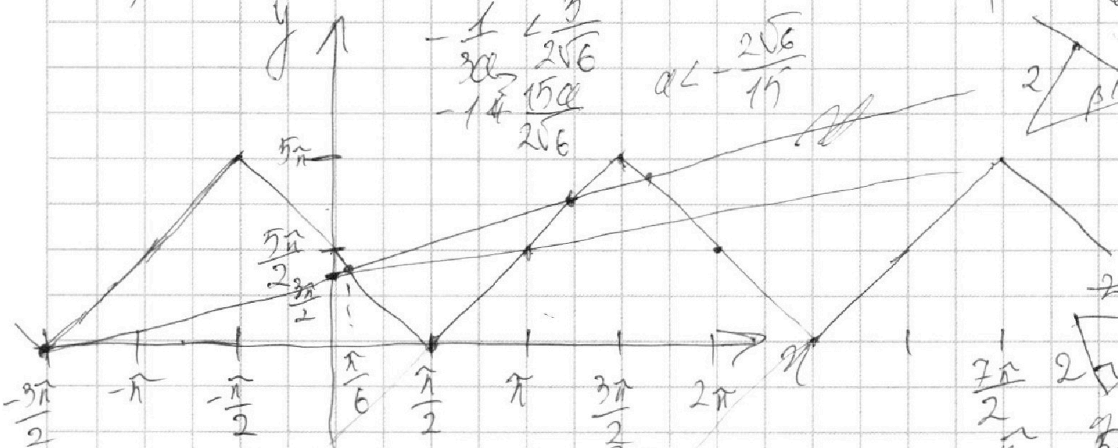
$\cancel{2}4\cdot 24 = 16\cdot 6$

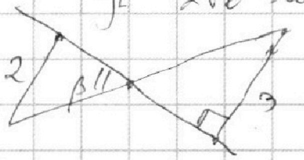
$-\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt6}$

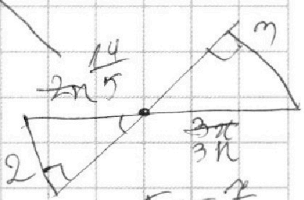
$-1 < \frac{15a}{2\sqrt6}$

$a < -\frac{2\sqrt6}{15}$

$tg\beta = \frac{5}{2\sqrt6} = \frac{1}{3a}$







$x = -\frac{3\pi}{2}$?

$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow \pi = 6x \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 4x = 4\pi \Rightarrow x = \pi$

$x + \frac{3\pi}{2} > 5\pi$

$x > \frac{7\pi}{2}$ — не смотрим

$5n = 7$

$n = \frac{7}{5}$

$tg\alpha = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

$\begin{cases} x + 3ay - 76 = 0 \\ \left[\begin{array}{l}(x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9\end{array}\right.\end{cases}$

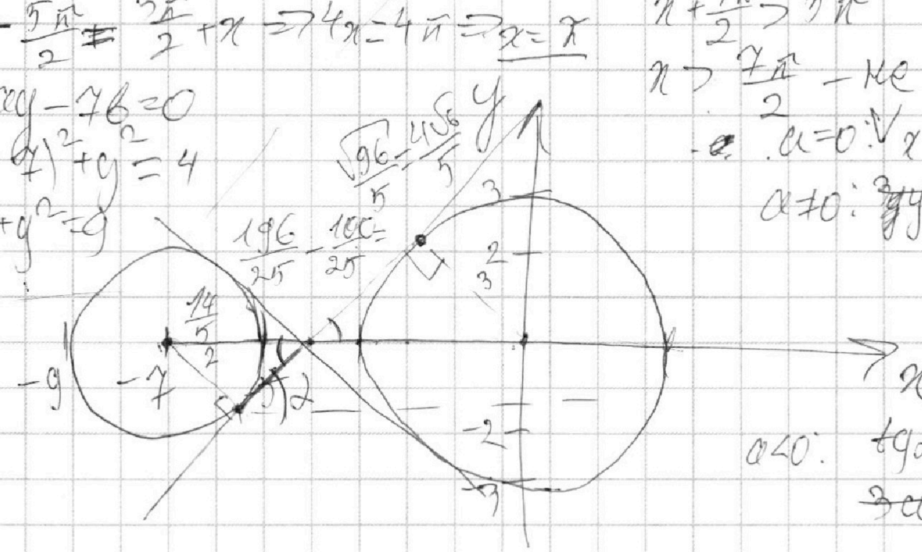
$a = 0$: $x = 76$

$a \neq 0$: $3ay = -x + 76$

$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{76}{3a}$

$\sqrt{\frac{96}{5}} = \frac{4\sqrt6}{5}$

$\frac{196}{25} - \frac{100}{25} =$



$a < 0$: $tg\alpha = -\frac{1}{3a} = \frac{5}{7}$

$\cancel{3a}\ 15a = -7$

$a = -\frac{7}{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

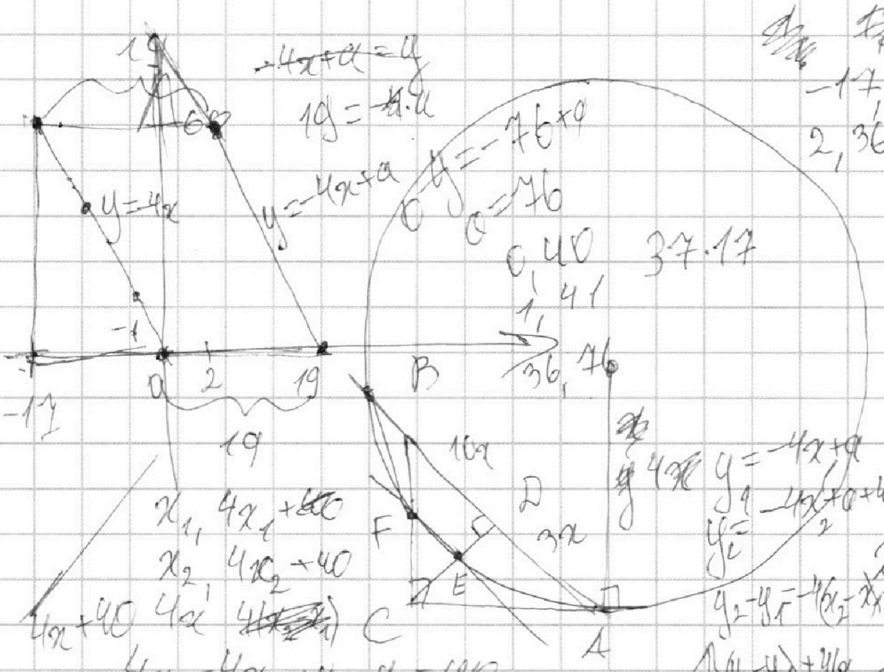
МФТИ

-4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$19=4a$

$y=-76+a$

$a=76$

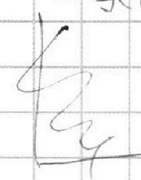
-17 6.8

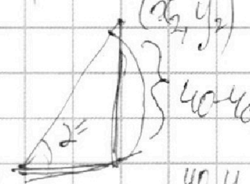
$2,36$

$0,40$ $37\cdot17$

$1,41$

$36,76$





$(0,40)$

$(0,0)$

$(1,41)$

$tg\alpha=\frac{40-4a}{a}$

$x_1,\ 4x_1+40$

$x_2,\ 4x_2+40$

$4x+40$

$y=-4x+a$

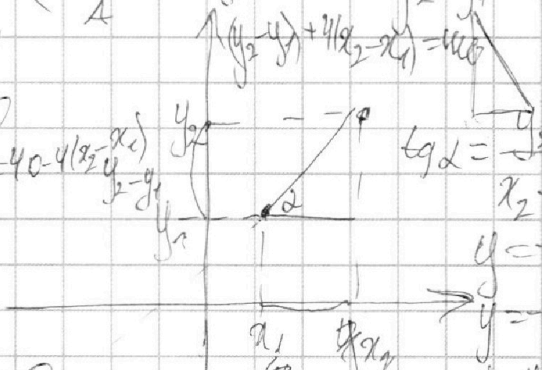
$x_2-x_1=a$

$y_2-y_1=b=40-4a$

$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40$

$4(x_2-x_1)+y_2-y_1=40$

$y_2-y_1=40-4(x_2-x_1)$



$tg\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\begin{cases} ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \end{cases}$

$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0$

~~$a(x_2-x_1)+4b(x_2-x_1)=0$~~ $a=-4b$

$a(x_2-x_1)+40b-4b(x_2-x_1)=0$

$y_2-y_1=40-4(x_2-x_1)$

$y=-4x$

$y=-4x+40$ $x_2,\ y_2=-4x_2+40$

$y_2-y_1=-4x_2+4x_1+40$

$y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1+b$

$y_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_2+b$

$y=\frac{40}{x_2-x_1}x-4$

$y_2=\frac{40}{x_2-x_1}x_2-4$

$y_1=\frac{40}{x_2-x_1}x_1-4$

$y_2-y_1=\frac{40}{x_2-x_1}(x_2-x_1)$

$y_2-y_1=40$

$x_2-x_1=0$

$4x+y=40$

$y=-4x+40$

$x_1,\ y_1=-4x_1+40$

$x_2,\ y_2=-4x_2+40$

$4(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=$

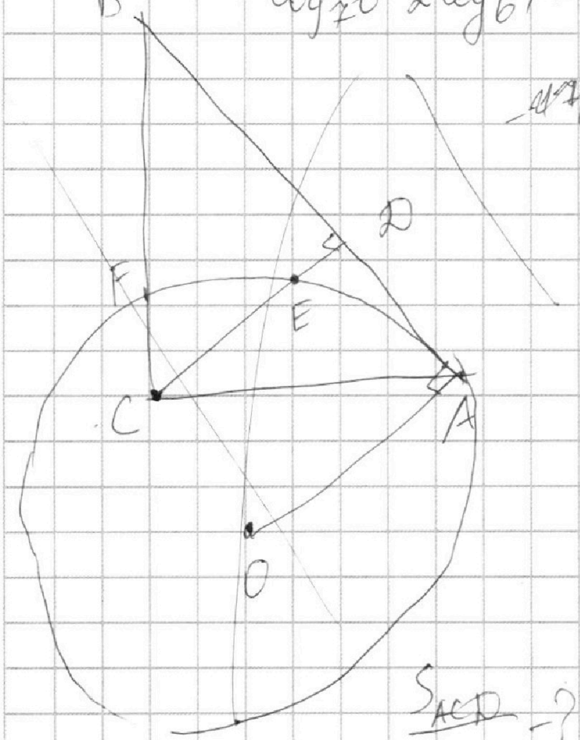
$=4(x_2-x_1)+(-4(x_2-x_1)+40-40)=0$

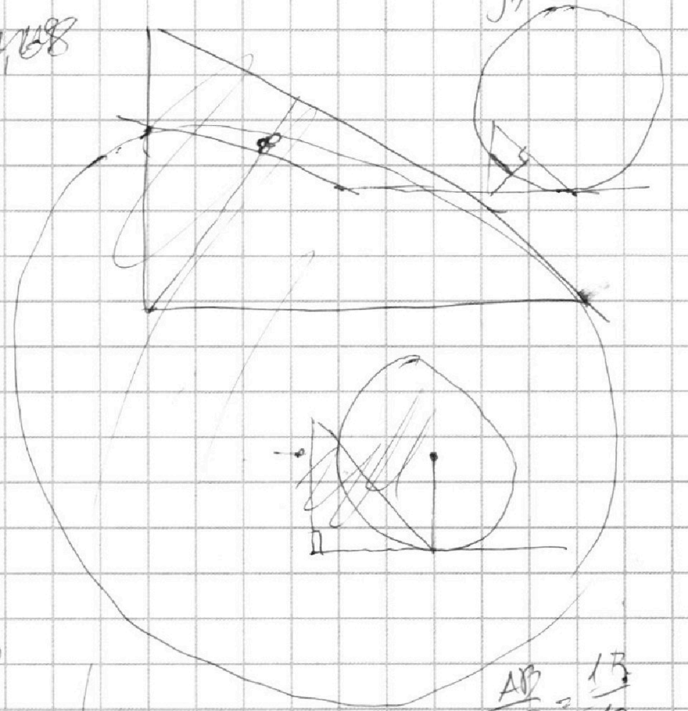
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_7^4 6 - 2\log_6 7 = \log_{36} 7^3 - 4 \Rightarrow \log_7^4 6 - \frac{2}{\log_7 6} - \frac{3}{2}\log 6$



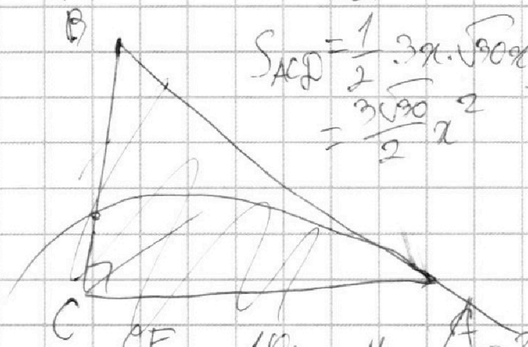


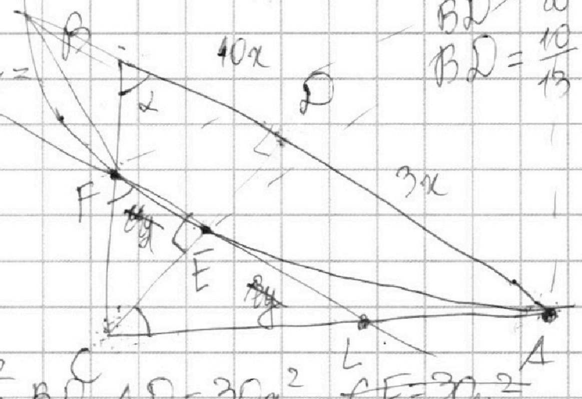
$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} - ?$

$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$

$BD = \frac{10}{13} AB$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} 3x \cdot \sqrt{30}x = \frac{3\sqrt{30}}{2}x^2$





$\frac{CE}{CD} = \frac{10y}{10x} = \frac{y}{x}$ $\quad CD^2 = BD \cdot AD = 30x^2$ $\quad \cancel{CE = 30y^2}$

$\cancel{AC^2 = CE \cdot CD}$ $\quad \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$ $\quad \frac{CL}{FL}$ $\quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{y}{x} \Rightarrow xy^2 = yx^2 \Rightarrow y = x?$

$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow CD = x\sqrt{30}$ $\quad AC^2 = CD^2 + AD^2 = 39x^2$

$\frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD} = \frac{CF}{BC}$ $\quad AC = x\sqrt{39}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{39}}{13}$ $\quad AL^2 = LE \cdot FL$

$CE^2 = FE \cdot EL =$ $\quad \cancel{\frac{AL}{CL} = \frac{LE}{CE} = \frac{BF}{CF}}$

$\frac{FL}{BA} = \frac{CL}{AC}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, $bc \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$, $ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$ab \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc \vdots$ ~~$abc = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$~~ $ac \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

ac $a \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ $ab \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$b \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $bc \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$abc \geq 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61}$

$a \geq \frac{2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}}{b}$ $\frac{1}{b} \leq \frac{c}{2^7 \cdot 3}$ C $a^2b^2c^2 \geq 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

$abc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$? $\Rightarrow$ ~~$b = 1$~~, $c = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

~~$a \geq 2, b \geq 3, c \geq 5$ $abc \Rightarrow$~~

$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2}$

$\frac{a}{b} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{25}$

$\begin{cases} ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \\ ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$

$\frac{c}{a} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \Rightarrow a = b \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{25}$

~~$ac = ab$~~ $c = a \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4$

$\frac{c}{b} = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} \Rightarrow c = b \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29}$

~~$ac = ab \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} = 2^1$~~

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 17$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 7$

$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$ $\Rightarrow$ $\alpha_3 - \alpha_2 = 7$, $\alpha_3 + \alpha_2 = 17$ $\Rightarrow \alpha_3 = 5, \alpha_2 = 12, \alpha_1 =$

$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 14$

$\alpha_3 - \alpha_2 = 7$ $\Rightarrow \alpha_3 = 10$ $\alpha_2 = 3$ $\alpha_1 = 4$

$\alpha_2 + \alpha_3 = 13$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 22$

$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$

$\beta_2 + \beta_3 \geq 15$ $\Rightarrow$ $\beta_3 - \beta_2 = 6$ $\Rightarrow \beta_3 = 10,5$ $\beta_1 = 6,5$ $\beta_2 = 8,5$ $4,5$

$\beta_1 + \beta_3 \geq 17$ $\beta_3 + \beta_2 = 15$ 11 7 5

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 38$ 6

$\gamma_1 + \gamma_2 = 14$ $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$

$\gamma_2 + \gamma_3 = 18$ $\gamma_3 - \gamma_2 = 29$ $\Rightarrow \gamma_3 = 23,5$ $\gamma_2 =$ $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$\gamma_1 + \gamma_3 = 43$ $\gamma_2 + \gamma_3 = 18$ $2\gamma_3 = 47$ $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{28}$

$\gamma_3 = 23,5$ $\gamma_1 =$

Отв: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!