



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1 : 3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Рассмотрим $a^7 \cdot b^11 \cdot c^{14}$, то $abc \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$. Аналогично
 $b^c \geq 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$, а $c^a \geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$. Перемножим все, получим
 $abc \cdot b^c \cdot c^a \geq 2^{47} \cdot 3^{44} \cdot 5^{14+17+43}$, т.е.
 $a^7 b^2 c^2 \geq 2^{47} \cdot 3^{44} \cdot 5^{45}$. (числа a, b, c сплошь натуральные, поэтому при их перемножении никаких проблем со
знаком не возникает, так как $abc > 0$). Тогда:
 $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$, числа a, b и c - натуральные,
помимо abc -тоже натуральное. Значит, оно
не супернатуральное $\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$.

Заметим, что показатели степеней простых множителей в разложении числа abc не могут быть
меньше показателей степеней простых множителей
в разложении чисел ab, bc, ac . Но есть, если $ac \geq$
 $\geq 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$, то степень 5 в разложении abc не менее
43, т.к. abc содержит в себе множители ac . Таким
образом, получаем, что $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$. Следовательно
 a, b и c подобных подобных нюансов состоят.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

ЛМФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1(продолжение).

Осталось показать, что равенство $a \bar{b} c = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$ возможно. Возьмём $a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{15}$, $b = 2^7 \cdot 3^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{28}$.

Действительно, $a \bar{b} : 2^{7+11+14} = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$; $\bar{b} c : 2^{10+11+18} = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^{43}$;

$$a c : 2^{14+17+43} = 2^{44} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}, \text{ а } a \bar{b} c = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}.$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Дано: Решение:

$\triangle ABC$ -тупо-

угольный,

CD -биссектриса,

$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

Найти:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

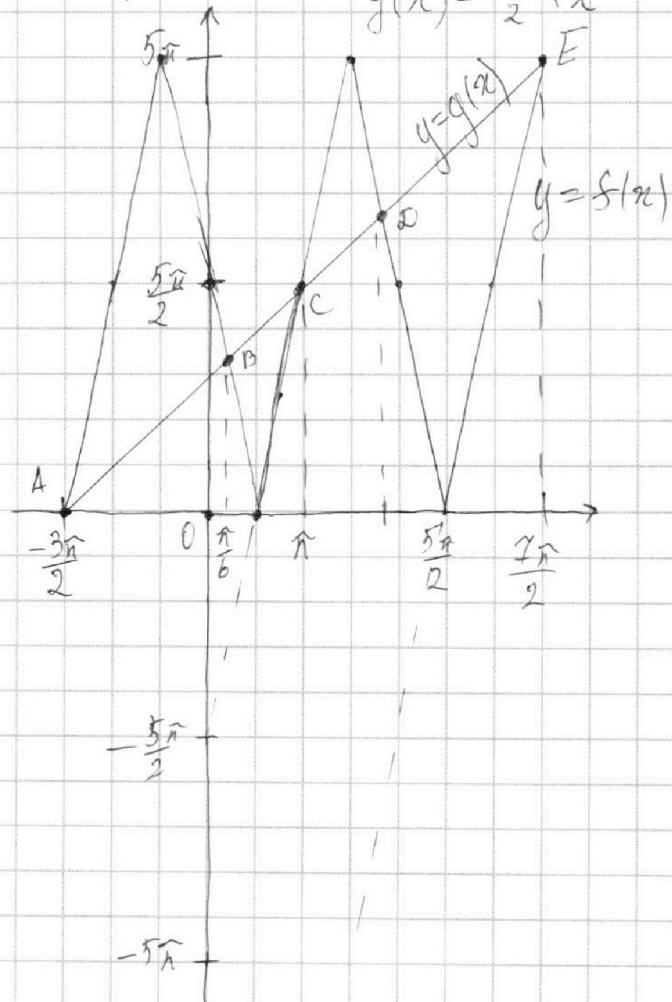
Отметим, что $0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 5 \arccos(\sin x) \leq 5\pi$,

Такому же рассмотрим такое x , что $0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi, \text{ т.е. } -\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}.$$

Построим графики $f(x) = 5 \arccos(\sin x)$ на отрезке $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$

$$g(x) = \frac{3\pi}{2} + x$$



На графике проверки 5 точек: A, B, C, D, E:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (продолжение).

Неска A ~~на~~ примацяжсам участку, где $f(x) = 5x + \frac{15}{2}\pi$.

$$\text{Неска } 5x + \frac{15\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$$

Поступили аналогично для остальных точек:

B: $f(x) = -5x + \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

C: $f(x) = 5x - \frac{5\pi}{2} \Rightarrow 5x - \frac{5\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

D: $f(x) = -5x + \frac{25\pi}{2} \Rightarrow -5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$

E: $f(x) = 5x + \frac{25\pi}{2} \Rightarrow 5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2}$

Онбем: $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

1 2 3 4 5 6 7**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

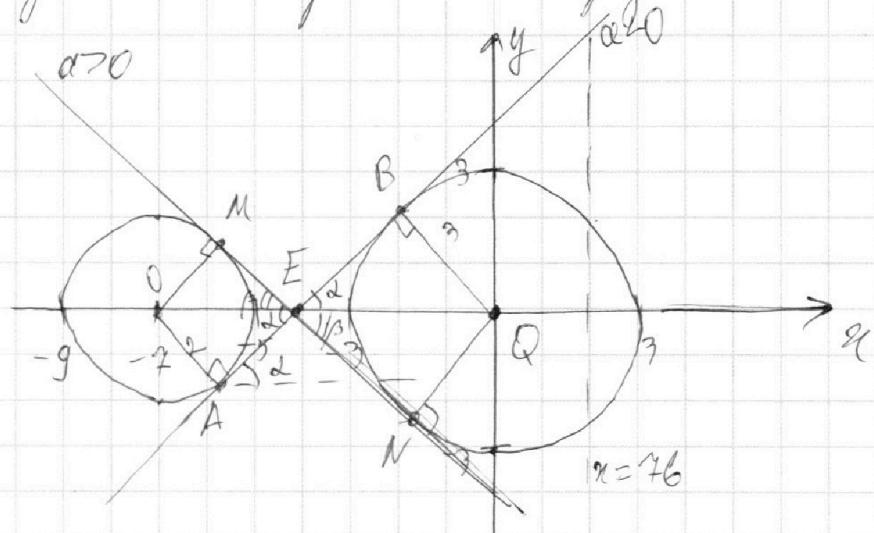
$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3xy - 76 = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{array} \right.$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

Нижнее уравнение системы задаёт симметрию:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x+7)^2 + y^2 = 4 - \text{окр-ть с центром } O(-7,0) \text{ и} \\ \text{радиусом } r=2 \\ x^2 + y^2 = 9 - \text{окр-ть с центром } Q(0;0) \text{ и} \\ \text{радиусом } R=3. \end{array} \right.$$

Изобразим эти окр-ти на коорд. плоскости:



Сначала рассмотрим $a=0$. Тогда прямая (заданная уравнением $x=76$) эта прямая всегда параллельна оси ординат \Rightarrow не имеет более двух общих точек с окр-тями при всех y . Значит, $a=0$ не подходит.

Тогда при $a \neq 0$ прямая (задана: $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{76}{3a}$)

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

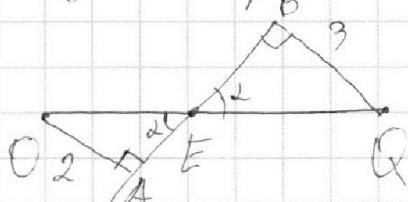


Задача 4 (продолжение).

Такая прямая имеет разный угол наклона и параллельно переносится на любые значения при разнице b .

Пусть $a < 0$. Тогда $\frac{1}{3a} > 0 \Rightarrow$ прямая образует острый угол с осью абсцисс. Прямая будет 4 раза пересекать окружность при таких a , когда она не касается их. Одна из линий наклона ~~не~~ и одна большее него наклона будут симметричны и иметь 2 общие точки с окр-ностью с центром O , затем с окр-ностью с центром Q , но никак не одновременно. В случае же касания прямая (будет иметь по 1 общей точке с окр-ностью.

Из геометрии найдём $\tan \alpha$:



$$OQ = 7, BQ = R = 3, OA = r = 2.$$

$\triangle OAE \sim \triangle QBE$ по углам $\angle OEA = \angle BEQ$.

$$\frac{QE}{OE} = \frac{BQ}{OA} = \frac{3}{2} \Rightarrow QE = \frac{3}{2} \cdot OE$$

$$QE + OE = \frac{5}{2}OE = OQ = 7 \Rightarrow OE = \frac{14}{5}.$$

$$\tan \alpha = AE = \sqrt{OE^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{196}{25} - \frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{96}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{AE} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = -\frac{1}{3\alpha}$$

$$15\alpha = -2\sqrt{6} \Rightarrow \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{15} \Rightarrow \text{при } \alpha < -\frac{2\sqrt{6}}{15} \operatorname{tg} \alpha < \frac{5}{2\sqrt{6}},$$

и система может иметь 4 решения при каком-то α .

Картинка симметрична. При $\alpha > 0$ прямая L соответственно будет удаляться, и картина будет симметрична относительно оси абсцисс той картины, которую мы рассматривали при $\alpha < 0$. Соответственно 4 решения для $\alpha > 0$ может быть при $\alpha > \frac{2\sqrt{6}}{15}$.

$$\text{Ответ: } \alpha \in (-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}, +\infty).$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_7^4(6x) - 2 \log_7 x = \log_{7x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_7^4 y + 6 \log_7 y = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{array} \right.$$

Сразу скажем про ограничения для x и y :

$$6x > 0 \Rightarrow x > 0 \quad 36x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm \frac{1}{6}$$

$$6x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{6} \quad y > 0, \quad y \neq 1, \quad y^2 \neq 1 \Rightarrow y \neq \pm 1$$

Подытожим: $x > 0, x \neq \frac{1}{6}, y > 0, y \neq \pm 1$

Рассмотрим с верхним уравнением систему:

$$\log_7^4(6x) - 2 \cdot \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

Пусть $t = \log_7 6x$.

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4, t \neq 0$$

$$t^5 + 4t - 2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} + 1 = 0 \quad (1)$$

Заметим, что $f(t) = t^5 -$ возрастающая и монотонно
убывающая, $g(t) = t -$ линейная $\Rightarrow t^5 + 4t - \frac{7}{2} + 1 = h(t)$ -
линейно возрастают, т.е. ур-е (1) имеет

только 1 решение, которому соответствует
только 1 значение x ($t = \log_7 6x$ также монотонно
и возрастает).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (продолжение).

Теперь повторим о линейной ур-ии системы:

$$\log_2 y + 6 - \frac{1}{\log_2 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 y} - 4$$

Пусть $n = \log_2 y$, $n \neq 0$. Тогда:

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4 \Rightarrow n^5 + 4n + 6 - \frac{5}{2} = 0$$

$$n^5 + 4n + \frac{7}{2} = 0 \quad (2)$$

Сравнивши (2) получаем аналогичную ис-
считуюшую, как и с ур-ией (1). Есть только одно
значение y , удовл. ур-ю (2). Можем ур-ю (1) и (2):

$$n^5 + 4n + t^5 + 4t + \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0$$

$$n^5 + t^5 + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4) = 0$$

$$\begin{cases} t+n=0, \\ t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t+n=0 \\ (t^2 - 2t^2n + t^2n^2 + 1)^2 = 0 \end{cases}$$

Две линейные ур-я совокупности ищем:

$$(t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot t^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot n^2 + n^4 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0$$

$$(\frac{1}{2}tn)^2 + (\frac{1}{2}tn - n^2)^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (продолжение).

$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 \geq 0$, $(\frac{1}{2}tn - n^2)^2 \geq 0$, $\frac{1}{2}t^2n^2 \geq 0$, $t^2 \geq 0$, поэтому

$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 + (\frac{1}{2}tn - n^2)^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 + 4 \geq 0$, т. е. никакие две

системы не имеют решений. Всё и остаётся.

$$t+n=0 \Leftrightarrow \log_2 6x + \log_7 y = \log_7 1 \Rightarrow \log_2 6xy = \log_7 1$$

$6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$. Можно взять $x=1$, $y=\frac{1}{6}$. Тогда
как раз будет соблюдено ОДЗ и будем полу-
чать такое значение xy .

Ответ: $\frac{1}{6}$.



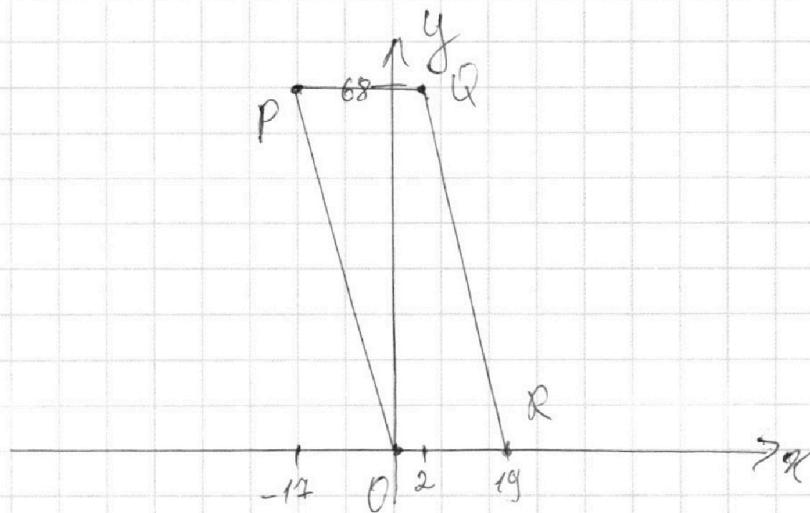
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6.

Изображите на координатной плоскости параллелограмм $OPQR$:



Заметим, что если у нас есть прямая $y = -4x + a$,
и если ей принадлежат точки $(x_1; -4x_1 + a)$, а также
есть прямая $y = -4x + 40 + a$, и если ей принадлежат
точки $(x_2; -4x_2 + 40 + a)$, то как раз выполняется
условие $4x_2 - 4x_1 - 4x_2 + 40 + a + 4x_1 - a = 40$. То есть,
нам нужно посчитать количество точек в парал-
лелограмме $OPQR$ таких, что ~~одна~~^{первая} из них при-
надлежит прямой $y = -4x + a$, а вторая — прямой
 $y = -4x + a + 40$.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6 (продолжение).
Сразу скажем, что строка РО задана уравнением ~~$y = -4x$~~ $y = -4x$ (коэффициент $R \neq 0$ действительно удобен. Этой причиной). Найдём прямую, задаваемую строкой QR:

$$\begin{cases} 68 = 2a + b & \text{-координаты Q} \\ 0 = 19a + b & \text{-координаты R} \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = 46.$$

QR: $y = -4x + 46$

Таким образом имеем $y = -4x + a$ и $y = -4x + a + 40$.
Можно сказать, что: $a \geq 0$, $a + 40 \leq 46$, т.к. прямые эти лежат в порядке O PQR или лежат на его продолжениях. Отсюда $0 \leq a \leq 6$.

Через любую прямую на любой прямой можно будет лежать 18 целых точек, т.к. $6y \leq 68$,
т.е. мы ограничены сверху и снизу и идём по целым точкам, т.е. $0 \leq -4x + a \leq 68$.
Но, у нас 37 различных a , где каждому из которых есть 18 точек на другой прямой, который соответствует 18 точек

Два $a = 4k$, где есть 18 целых точек, где
 $a = 4k+1, 4k+2, 4k+3$ нет.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 6 (продолжение).

$$10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17 + 9 \cdot 17 \cdot 17$$

Ответ: $10 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2\log_7 x \neq 7 = \frac{2}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 y = \frac{2}{2} \log_y 7 - 4$$

$$x \neq$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$$\begin{cases} 36x^2 \neq 170 \\ (6x-1)(6x+8) \neq 0 \end{cases}$$

$$t = \log_7 6x \quad t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2} - 4$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$t^5 - 2 = \frac{9}{2} - 4t \quad t^5 + 4t - \frac{9}{2} = 0$$

$$\log n = \log_7 y$$

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n} - 4 \quad n^5 + 6 - \frac{5}{2} + 4n = 0$$

$$t+n = \log_7 6xy$$

$$n^5 + 4n + \frac{1}{2} = 0$$

$$(t+n)(t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$6xy = t$$

$$(t^4 + n^4 + tn(t^2 + n^2)) + t^2n^2 = 0$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$(t+n)$$

$$(t^4 + t^3n + t^2n^2 + tn^3 + n^4) + 4(t+n) = 0$$

$$t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$$

$$(t+n)(t^3 - t^2n - 2tn^2 + t^4 + n^4 + 4 + t^2n^2 - tn(t^2 + n^2)) = 0$$

$$(t^2 + n^2)^2 - t^2n^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 = 0 \quad (t^2 + n^2)^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 - t^2n^2 = 0$$

$$(t^2 + n^2)^2 - tn(t^2 + n^2) + 4 - t^2n^2 = 0$$

$$t^4 - t^3n + t^2n^2 + \frac{1}{2}t^2n^2 - \frac{1}{2}t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 4 = 0$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot tn + \frac{1}{4}t^2n^2 + \frac{1}{4}t^2n^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tn \cdot n^2 + n^4 + 4 = 0$$

$$(t^2 - \frac{1}{2}tn)^2 +$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

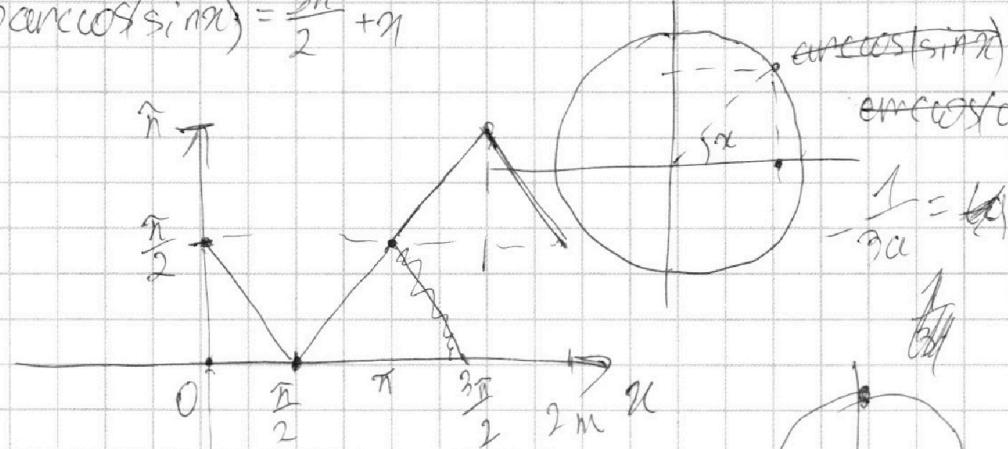
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\operatorname{tg}(\cos(\sin x)) = \frac{3\pi}{2} + n$$

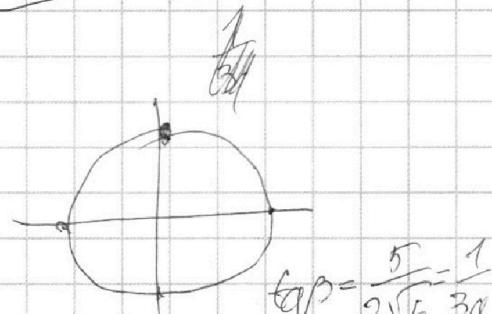


$$\operatorname{em}(\cos(\cos x)) = n$$

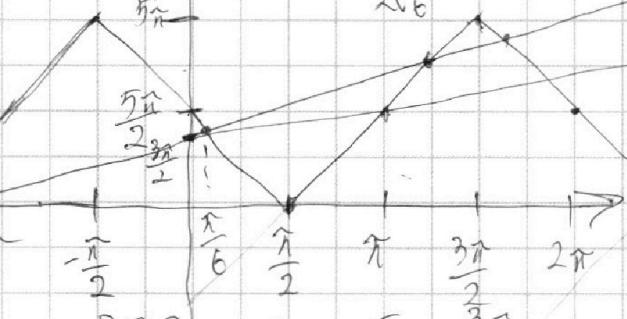
$$n = 60 - \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$1) \quad 4 \cdot 24 = 16 \cdot 6$$

$$-\frac{1}{3} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \\ -\frac{14}{15} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$



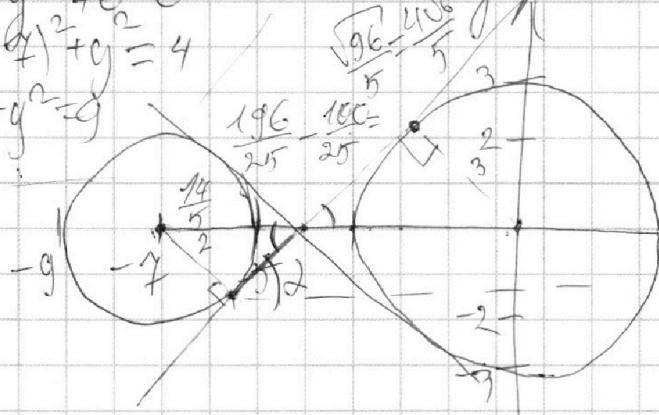
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$



$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$5x = \frac{5\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 4x = 4\pi \Rightarrow x = \pi$$

$$\begin{cases} x + 20y - 76 = 0 \\ (x + 4)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$



$$\frac{7\pi}{2} > 5\pi \Rightarrow n = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$$

$$\pi + \frac{9\pi}{2} > 5\pi \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{105}{14} \neq 14$$

$\pi > \frac{7\pi}{2}$ — не смотрели

$$\alpha = 0 \Rightarrow x = 76$$

$$\alpha \neq 0: 3yy + 2y = -x + 76$$

$$y = -\frac{1}{3\alpha}x + \frac{16}{3\alpha}$$

$$\alpha \neq 0: \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3\alpha} = \frac{\pi}{7}$$

$$3\alpha - 15\alpha = -7$$

$$\alpha = -\frac{7}{12}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

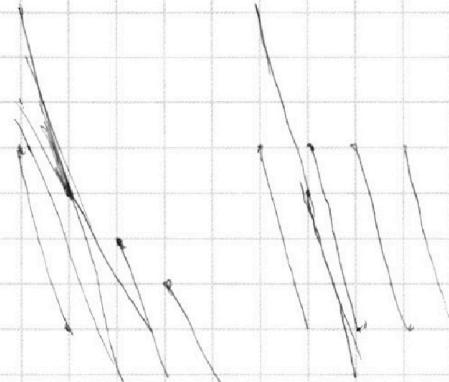
6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

-4



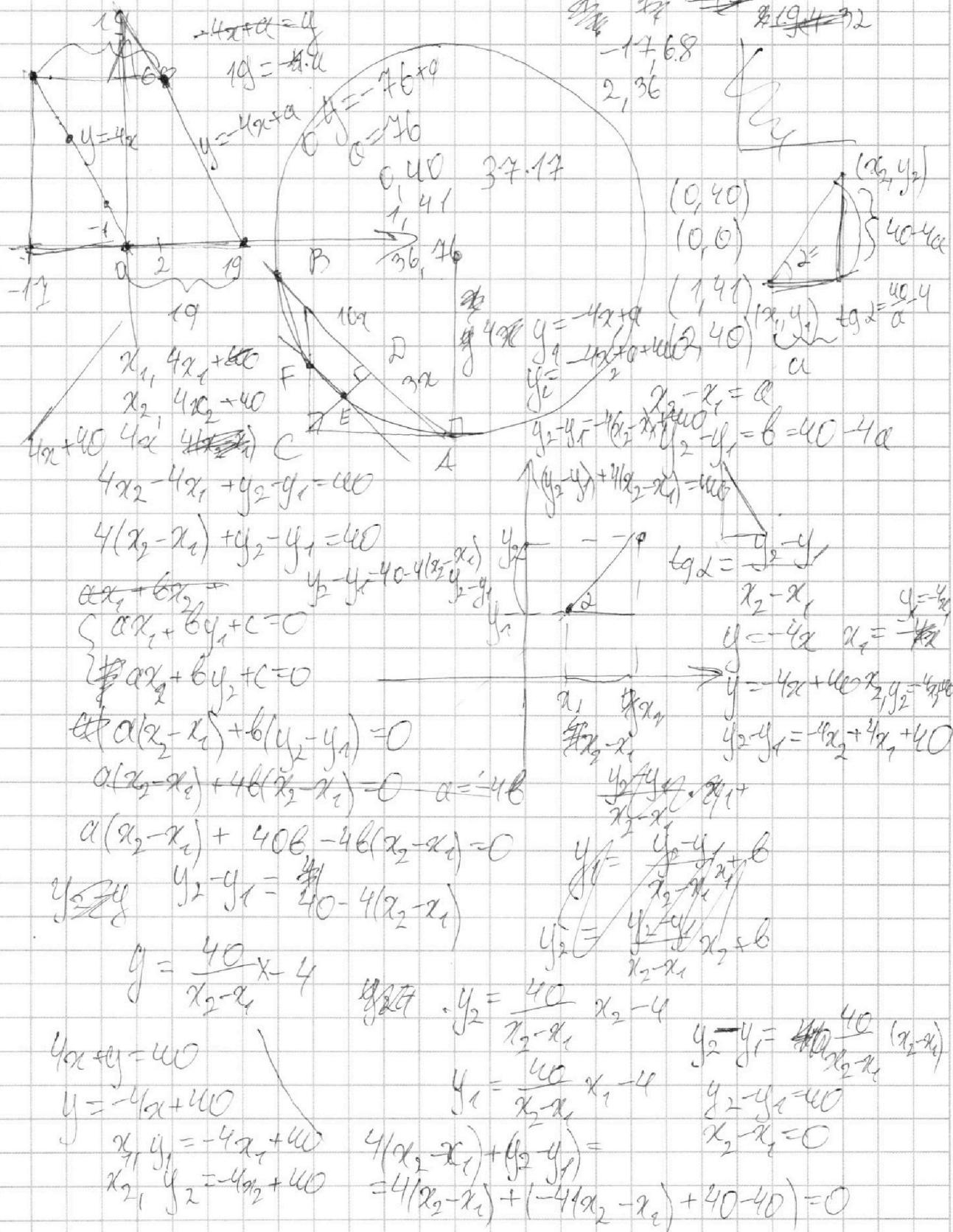


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

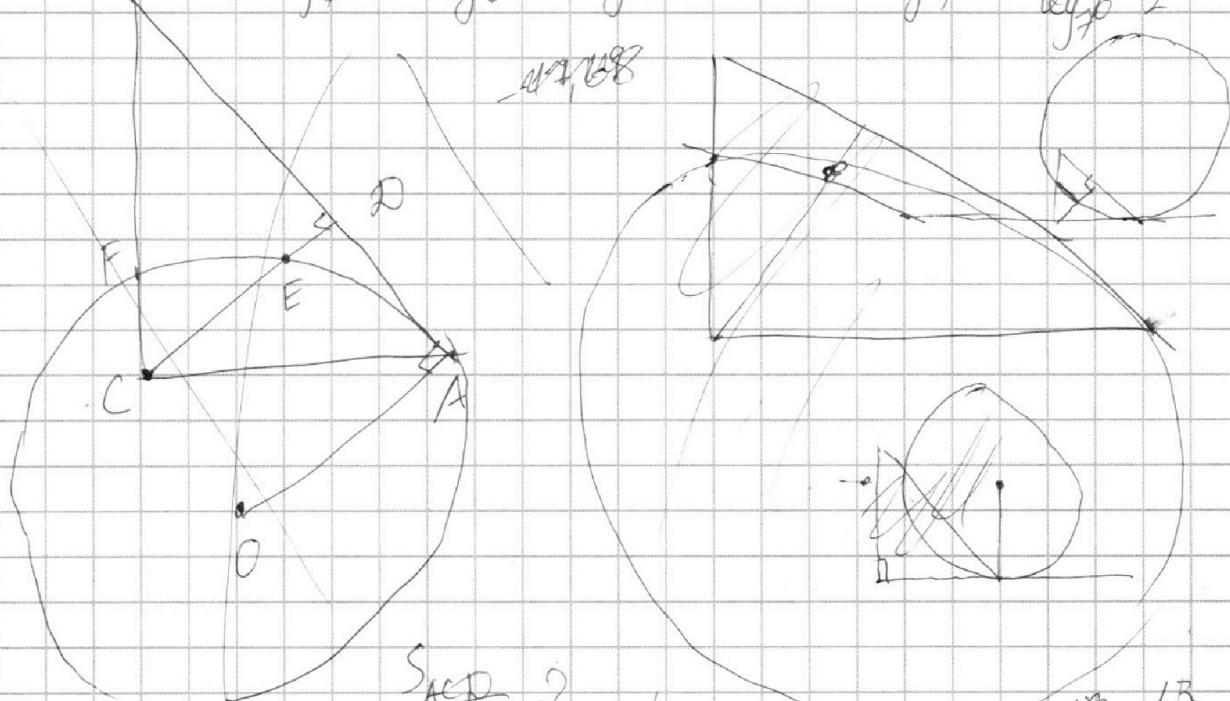


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

B. $\log_{\frac{1}{2}} 6 + 2 \log_6 7 = \log_{36} 7^2 - 4 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 6 - \frac{2}{\log_6 2} = \frac{-3}{10}$



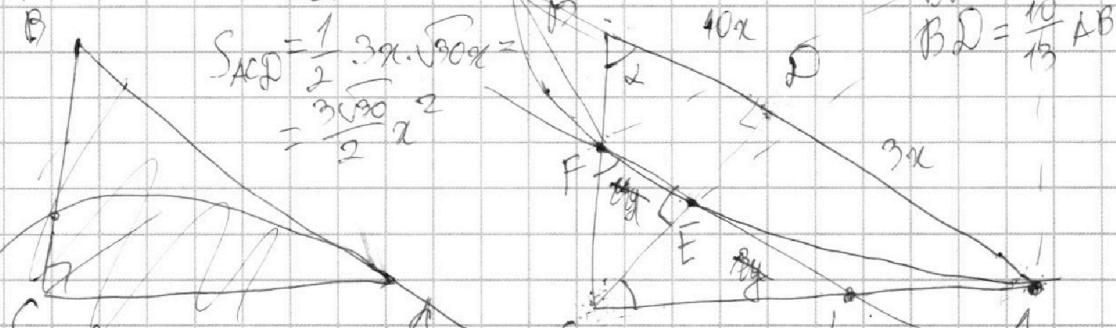
$$S_{ACD} - ?$$

$$S_{CEF}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$BD = \frac{10}{13} AB$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sqrt{90}x = \frac{3\sqrt{90}}{2} x^2$$



$$\frac{CE}{CD} = \frac{10y}{10x} = \frac{y}{x} \quad CD = BD \cdot AD = 30x^2 \quad CE = 30y^2$$
$$AC^2 = CE \cdot CD \quad \frac{AC}{CD} = \frac{AB \cdot CL}{BC} \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{y}{x} \Rightarrow xy = 9x^2 \Rightarrow y = 9x$$
$$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow CD = x\sqrt{90} \quad AC^2 = CD^2 + AD^2 = 39x^2$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD} = \frac{CE}{BC} \quad AC = 2\sqrt{39} \quad AL^2 = LE \cdot FL$$
$$\sin \angle = \frac{\sqrt{39}}{13} \quad CL = \frac{AE \cdot BF}{CE \cdot CF}$$
$$\cancel{CL}$$
$$\frac{CE^2}{BA} = \frac{FL}{AC}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6}{3^2}} \cdot \frac{a}{b} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^{25} \quad \begin{cases} ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc = 2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$$

$$\frac{c}{b} = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \Rightarrow a = b \cdot 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^{25}$$

$$a = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4$$

$$\frac{c}{b} = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} \Rightarrow c = b \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29}$$

$$a = ab \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{29} - 2^1$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 17 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &\neq 7 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &\neq 7 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &\neq 7 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 22 \\
 \beta_1 + \beta_2 &\neq 11 \\
 \beta_2 + \beta_3 &\neq 15 \\
 \beta_1 + \beta_3 &\neq 12 \\
 \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 38 \\
 \gamma_1 + \gamma_2 &\neq 14 \\
 \gamma_2 + \gamma_3 &= 18 \\
 \gamma_1 + \gamma_3 &= 43
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{aligned}
 \beta_3 - \beta_2 &= 6 \Rightarrow \beta_3 = 10,5 \quad \beta_1 = 6,5 \quad \beta_2 = 8,5 \quad \beta_3 = 4,5 \\
 \beta_3 + \beta_2 &= 15 \quad \beta_3 = 11 \quad \beta_1 = 11 \quad \beta_2 = 4 \quad \beta_3 = 6,5 \\
 \gamma_3 - \gamma_2 &= 29 \Rightarrow \gamma_3 = 23,5 \quad \gamma_2 = 8 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\
 \gamma_2 + \gamma_3 &= 18 \quad \gamma_3 = 27,5 \quad \gamma_1 = 1 \quad C = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{28} \\
 \gamma_1 + \gamma_3 &= 43 \quad \gamma_3 = 27,5 \quad \gamma_1 = 1 \quad C = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{28} \\
 \text{Out}: & 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{43}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Графический блок для записи решения задачи, состоящий из 20 строк и 30 столбцов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!