



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1} \cdot d$, где $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{O}$; $d = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, d - некоторое натуральное число (d может иметь в своем разложении множители $2, 3, 5$).

Аналогично: $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2} \cdot \beta$, $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3} \cdot \gamma$.
Рассмотрим условия: $ab \geq 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$. Это значит, что сумма показателей степеней факторов a и b больше либо равно сумме показателей степеней факторов a и $b \geq 41$. Перепишем все наши условия в виде систем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_3 + x_1 \geq 14 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_1 + y_3 \geq 17 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_1 + z_3 \geq 43 \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что (1) система имеет решения: $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 10$, причем это минимально возможные решения, т.к. при них достигается равенство. \Rightarrow мин. сумма $x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$.

Сложим все нерав-ва (2) системы и получим: $2(y_1 + y_2 + y_3) \geq 43$, $y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{43}{2}$. $\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 \geq 22$ т.к. $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{N}$. Т.к. нужно найти min возможное abc , то не важно у какого числа сколько "3" в разложении, важна их сумма: \Rightarrow min $y_1 + y_2 + y_3 = 22$.

Сложим все нерав-ва (3) системы: $2(z_1 + z_2 + z_3) \geq 75 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 \geq \frac{75}{2}$, $z_1 + z_2 + z_3 \geq 38$ т.к. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{N}$ или \mathbb{O} . Минимальная сумма $z_1 + z_2 + z_3 = 38$.

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

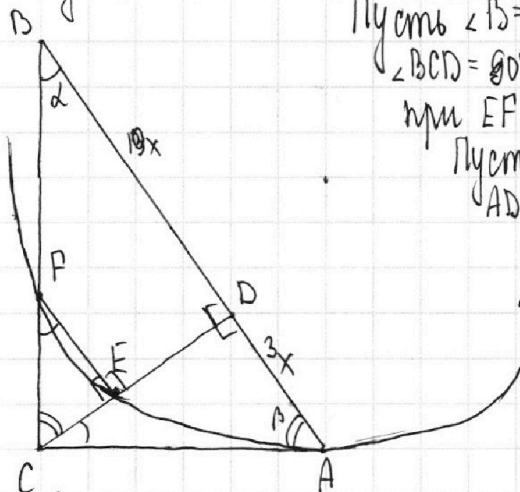
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2



Пусть $\angle B = \alpha$, $\angle A = \beta$. Тогда $\angle ACD = 90 - \beta = \alpha$.
 $\angle BCD = 90 - \alpha = \beta$. $\angle CFE = \angle CBD = \alpha$. \rightarrow соответственные
при $EF \parallel AB$
Пусть $BD = 10x$, тогда $AB = 13x$ (по условию) \Rightarrow
 $AD = 3x$.

~~$\triangle CFE \sim \triangle ACD$~~ Высота в прямоугольном \triangle
проведенная к гипотенузе равна:

$$CD^2 = BD \cdot AD \Rightarrow CD = \sqrt{10x \cdot 3x} = \sqrt{30}x$$

По теореме Пифагора для $\triangle ADC$: $AC = \sqrt{(\sqrt{30}x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{39}x$.
По теореме Пифагора для $\triangle ABC$: $BC = \sqrt{169x^2 - 39x^2} = \sqrt{130}x$.

По свойству касательной и секущей: $CF \cdot CB = AC^2 \Rightarrow CF = \frac{AC^2}{CB} = \frac{39x^2}{\sqrt{130}x} =$
 $= \frac{39}{\sqrt{130}}x$. $\triangle CFE \sim \triangle ACD$ по двум углам: $\angle ADC = \angle FEC = 90^\circ$ и $\angle CFE = \angle DCA = \alpha$.

CF коэффициент подобия k : $k = \frac{AC}{CF} = \frac{\sqrt{39}x}{\frac{39}{\sqrt{130}}x} = \sqrt{\frac{130}{39}}$.

Тогда их площади относятся как k^2 , т.е. как $\frac{130}{39}$.

Ответ: $\frac{130}{39}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ Уравнение: $-1 \leq \sin x \leq 1$ — итак выполняется.

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$5 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

\arccos принимает значение $\text{числ} \in [0, \pi]$. Поэтому:

① когда $\frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi]$: $5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x \quad \Leftrightarrow 6x = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{6}$

Проверка: $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \in [0, \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ — решение

② когда $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$. Т.к. $\arccos(\sin x) \in [0, \pi]$, то

$5 \arccos(\sin x) \in [0, 5\pi]$. Уравнение арккосинуса выполняется: $|\sin x| \leq 1$

$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi \Rightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] \mid \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

• при $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right]$: $5 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$
 $5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi = \frac{3\pi}{2} + x \Rightarrow 6x = \frac{3\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{4}$ — не на отрезке, не подходит

• при $x \in (-\pi, 0)$: —

Уравнение имеет вид: $5 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

• при $\frac{\pi}{2} - x \in [-\pi, 0]$, т.е. при $x \in$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$. Уравнение: $|\sin x| \leq 1$ - вычитаемось

Так как $\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$, то $5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$, ~~мы~~ \llcorner

$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$ $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$. $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ Уравнение имеет

следующий вид: $5 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$. Учитывая ограничения

на x : $-3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 2\pi$.

• при $-3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -2\pi$: $5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + 3\pi) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\frac{5\pi}{2} - 5x + 15\pi = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = 16\pi$ ~~$x = \frac{8\pi}{3}$~~ $x = \frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{3} = -\frac{13\pi}{6}$

• при $-2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$: $5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi = \frac{3\pi}{2} + x$

• при $-3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -2\pi$: $5 \cdot (-\frac{\pi}{2} - x - 2\pi) = \frac{3\pi}{2} + x$ $(5 \cdot (-\frac{5\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$

$4x = 14\pi$ $x = \frac{7\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{2} = -3\pi \in [-3\pi; -2\pi]$ - $x = \frac{7\pi}{2}$ корень

• при $-2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$: $5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + \pi) = \frac{3\pi}{2} + x$ $5 \cdot (\frac{5\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = 11\pi$ $x = \frac{11\pi}{6}$ $\frac{\pi}{2} - \frac{11\pi}{6} = -\frac{10\pi}{6} = -\frac{5\pi}{3} \in [-2\pi; -\pi]$ - корень!

• при $-\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0$: $5 \cdot (-\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$ $5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$

~~$4x = 8\pi$~~ $4x = 4\pi$ $x = \pi$ $\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \in [0 - \pi; 0]$ - $x = \pi$ - корень!

• при $0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$: $5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$ $\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$ $6x = \pi$

$x = \frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ $x = \frac{\pi}{6}$ - корень

• при $\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 2\pi$: $5 \cdot (-\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = \frac{3\pi}{2} + x$ $5x - \frac{5\pi}{2} + 10\pi = \frac{3\pi}{2} + x$

$4x = -6\pi$ $x = -\frac{3\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2} - (-\frac{3\pi}{2}) = 2\pi \in [\pi; 2\pi]$ $x = -\frac{3\pi}{2}$ - корень!

Ответ: $x = \frac{7\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$x + 3ay - 7b = 0$$

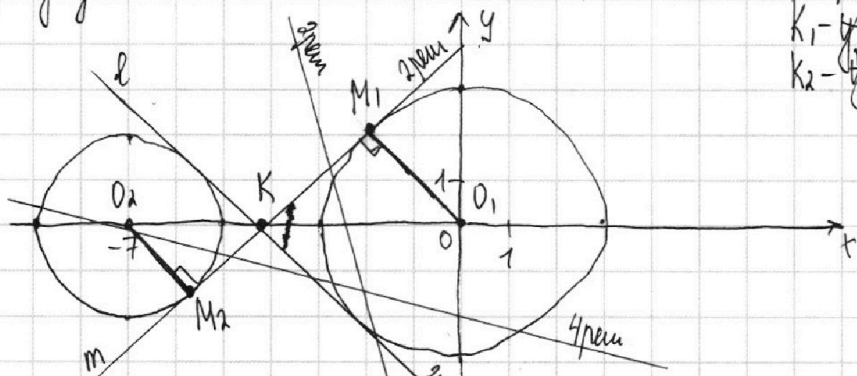
$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3ay = -x + 7b \quad (1)$$

$$((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (2)$$

(2) уравнение системы дает решения: $(x+7)^2 + y^2 = 2^2$ или $x^2 + y^2 = 3^2$ - уравнения окружностей с центрами в точках $(-7, 0)$ и $(0, 0)$ и радиусами 2 и 3 соответственно.

k_1 - ^{коэф.} углового наклона прямой в m
 k_2 - ^{коэф.} углового наклона прямой в l



Рассмотрим (1) уравнения когда $a=0$: получим: $x + 0 - 7b = 0$ $x = 7b$ - график прямой, ну график видно, что не решение при такой системе максимум два $\Rightarrow a=0$ не подходит. Перепишем (2) ур-е в виде:

$$y = \frac{7b - x}{3a} = \frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

Заметим, что коэффициент углового наклона

прямой такого графика зависит только от a а то насколько сдвинута прямая по вертикали зависит от b т.е. для любого a можно подобрать такое b , чтобы ^{соот. наклона} прямая была любой по отношению вертикали. Проведем общие касательные к окружностям, несомненно увидим, что при наклоне прямой $\in (k_2, k_1)$ всегда можно подобрать такое b , чтобы эта прямая пересекала окружности в 4-х точках. при $k = k_1, k_2$ - решение всего 2, а при $k \in (-\infty, k_2) \cup (k_1, +\infty)$ - решение максимум 2

Пусть l имеет уравнение: $y = k_2 x + c_2$ прямая m : $y = k_1 x + c_1$.

Подставим в ур-е окружностей: l : ур-е для m :

$$x^2 + 14x + (k_2 x + c_2)^2 + 45 = 0 \quad D \geq 0 \Rightarrow x^2 + 14$$

$$x^2 + (k_1 x + c_1)^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть M_1 и M_2 - точки касания прямой m и окружностей. Заметим, что окружности симметричны относительно оси $X \Rightarrow K$ - точка пересечения 3 и 4 касательных, тоже лежит на оси X (в силу симметрии).
 $\triangle O_2 M_2 K \sim \triangle O_1 M_1 K$ по двум углам: $\angle O_2 M_2 K = \angle O_1 M_1 K \neq 90^\circ$, $\angle O_2 K M_2 = \angle O_1 K O_1$ - вертикальные $\Rightarrow \frac{O_2 K}{K O_1} = \frac{O_2 M_2}{O_1 M_1} = \frac{2}{3}$. А т.к. $O_1 O_2 = 7$, то $O_2 K = \frac{2}{5} \cdot 7$, $O_1 K = \frac{3}{5} \cdot 7$

Коэффициент наклона прямой m равен $\operatorname{tg} \angle M_1 K O_1$. По теореме Пифагора для $\triangle M_1 K O_1$: $K M_1 = \sqrt{O_1 K^2 - O_1 M_1^2} = \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 7}{5}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{\frac{21^2 - 3^2}{5}} = \sqrt{\frac{21-3}{5} \cdot \frac{21+3}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5} \cdot \frac{36}{5}} = \frac{6}{5} \sqrt{6}$
 $\Rightarrow \operatorname{tg} \angle M_1 K O_1 = \frac{M_1 O_1}{K M_1} = \frac{3}{\frac{6 \sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2 \sqrt{6}} = \frac{5 \sqrt{6}}{12}$

Т.к. картинка симметрична относительно оси X , то коэффициент наклона прямой n противоположен коэф. наклона прямой m . Т.е. равен $-\operatorname{tg} \angle M_1 K O_1 = -\frac{5 \sqrt{6}}{12}$.

Т.к. коэффициента наклона прямой $y = \frac{-x}{3a} + \frac{7b}{3a}$ не может равняться нулю, то: ~~значения параметра~~ a , при которых суц. пар. b существуют так: $a \in \left(\frac{5 \sqrt{6}}{12}, 0\right) \cup \left(0, \frac{5 \sqrt{6}}{12}\right)$

Ответ: $a \in \left(-\frac{5 \sqrt{6}}{12}, 0\right) \cup \left(0, \frac{5 \sqrt{6}}{12}\right)$ $K \in \left(-\frac{5 \sqrt{6}}{12}, 0\right) \cup \left(0, \frac{5 \sqrt{6}}{12}\right)$, где

$K = -\frac{1}{3a}$ (из ур-я прямой $y = \frac{-x}{3a} + \frac{7b}{3a}$) \Rightarrow

$$\left[-\frac{5 \sqrt{6}}{12} < -\frac{1}{3a} < 0 \right]$$

$$\left[0 < -\frac{1}{3a} < \frac{5 \sqrt{6}}{12} \Rightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{2 \sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2 \sqrt{6}}{5}, +\infty\right) \right]$$

Ответ: $a \in \left(-\infty, -\frac{2 \sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2 \sqrt{6}}{5}, +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{26x^2} 343 - 4$$

$$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

Дополнения: $x \neq \pm \frac{1}{6}, x > 0; y > 0; y \neq \pm 1$

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7 - 4 \Rightarrow \log_7^4(6x) - \frac{7}{2}\log_{6x} 7 + 4 = 0 \quad (1)$$

$$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4 \Rightarrow \log_7^4 y + \frac{7}{2}\log_y 7 + 4 = 0 \quad (2)$$

Пусть $f(x) = \log_7^4 x - \frac{7}{2}\log_x 7 + 4$, $g(x) = \log_7^4 x + \frac{7}{2}\log_x 7 + 4$ - функции.

Пусть $\log_7 x = t$. Тогда функции можно представить в виде:

$f(t) = t^4 - \frac{7}{2t} + 4$, $g(t) = t^4 + \frac{7}{2t} + 4$. Возьмем производные от обеих функций:

$f'(t) = t^3 + \frac{7}{2t^2} + 4$ и $f(t) = t^4 - \frac{7}{2t} + 4$. Возьмем производные от обеих функций: $g'(t) =$

Дополним (1) на $\log_7(6x)$, а (2) - на $\log_7 y$. Получим:

$$\log_7^5(6x) - \frac{7}{2} + 4\log_7(6x) = 0 \quad (3)$$

$$\log_7^5 y + \frac{7}{2} + 4\log_7 y = 0 \quad (4)$$

Пусть $f(x)$ выразит следующим образом: $f(x) = \log_7^5 x - \frac{7}{2} + 4\log_7 x$, а

$g(x) = \log_7^5 x + \frac{7}{2} + 4\log_7 x$. Функции также можно представить в

виде $f(t) = t^5 + 4t - \frac{7}{2}$, где $t = \log_7 x$

и $g(t) = t^5 + 4t + \frac{7}{2}$, где $t = \log_7 x$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Возьмем производные от обеих функций:

$$g'(t) = 5t^4 + 4, \quad f'(t) = 5t^4 + 4. \text{ Заметим, что производные обеих}$$

функций всегда положительны \Rightarrow функции монотонно возрастают. \rightarrow

Т.к. ~~они~~ \Rightarrow Они пересекаются ровно в 1 точке, когда:

$$t^5 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

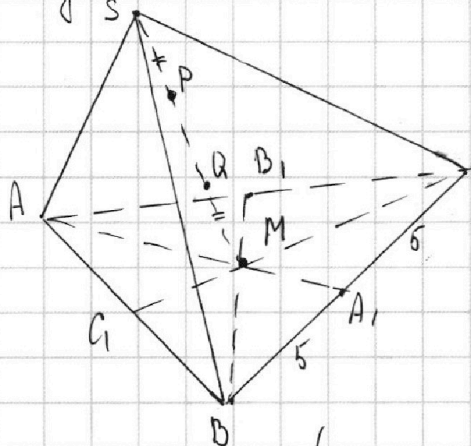
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

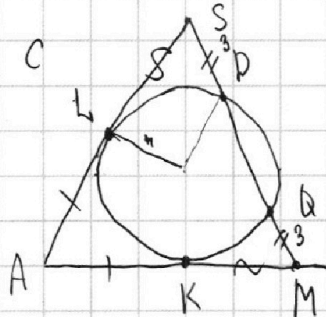
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



Рассмотрим сечение пирамиды в плоскости ASM - ^{срезом}



$AL = AK$ - касательные

По свойству о касательной и секущей:

$$KM^2 = KQ \cdot KL$$

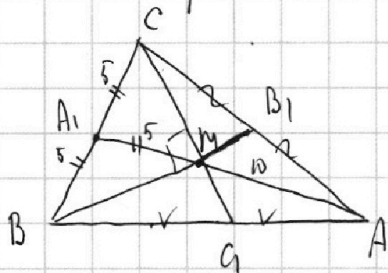
$$KM^2 = MQ \cdot MP, \text{ где}$$

$$SL^2 = SP \cdot SM$$

$$MQ = SP, MP = MQ \text{ (т.к. } MP = MQ + QP, SQ = SP + PQ) \Rightarrow KM = SL.$$

Заметим, что $AM = AS = AL + LS = AK + KM = 10$. По свойству медианы для $\triangle ABC$: $AM : AA_1 = 2 : 3 \Rightarrow AA_1 = 15 \Rightarrow MA_1 = 5$.

Рассмотрим m -ть ABC :



Рассмотрим $\triangle BMC$: у него медиана равна половине стороны \Rightarrow он прямоугольный $\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

Несколько раз воспользуемся методом площадей:

$$S_{\triangle CB_1A} = \frac{1}{2} S, \text{ где } S - \text{ площадь } \triangle ABC \text{ (т.к. } CB_1 = B_1A)$$

$$S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} S_{\triangle CB_1A} \text{ (т.к. } BM : BB_1 = \frac{2}{3} - \text{ от-во точки пересечения медиан)}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CMB} = \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle CB_1A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20. \text{ Т.к. } \triangle BMC - \text{ прямоугольный,}$$

$$\text{то } S_{\triangle CMB} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM \Rightarrow BM \cdot CM = 2 \cdot 20 = 40. \text{ При этом, что } BM = \frac{2}{3} BB_1,$$

$$CM = \frac{2}{3} CC_1 \Rightarrow \frac{4}{9} \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 40 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = 90. \text{ Т.к. } AA_1 = 15 \text{ мы знаем,}$$

$$\text{то: } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 90 \cdot 15 = 1350$$

Ответ: а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 1350$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8) $SN = SP$ - касательные $\Rightarrow SP = MQ = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

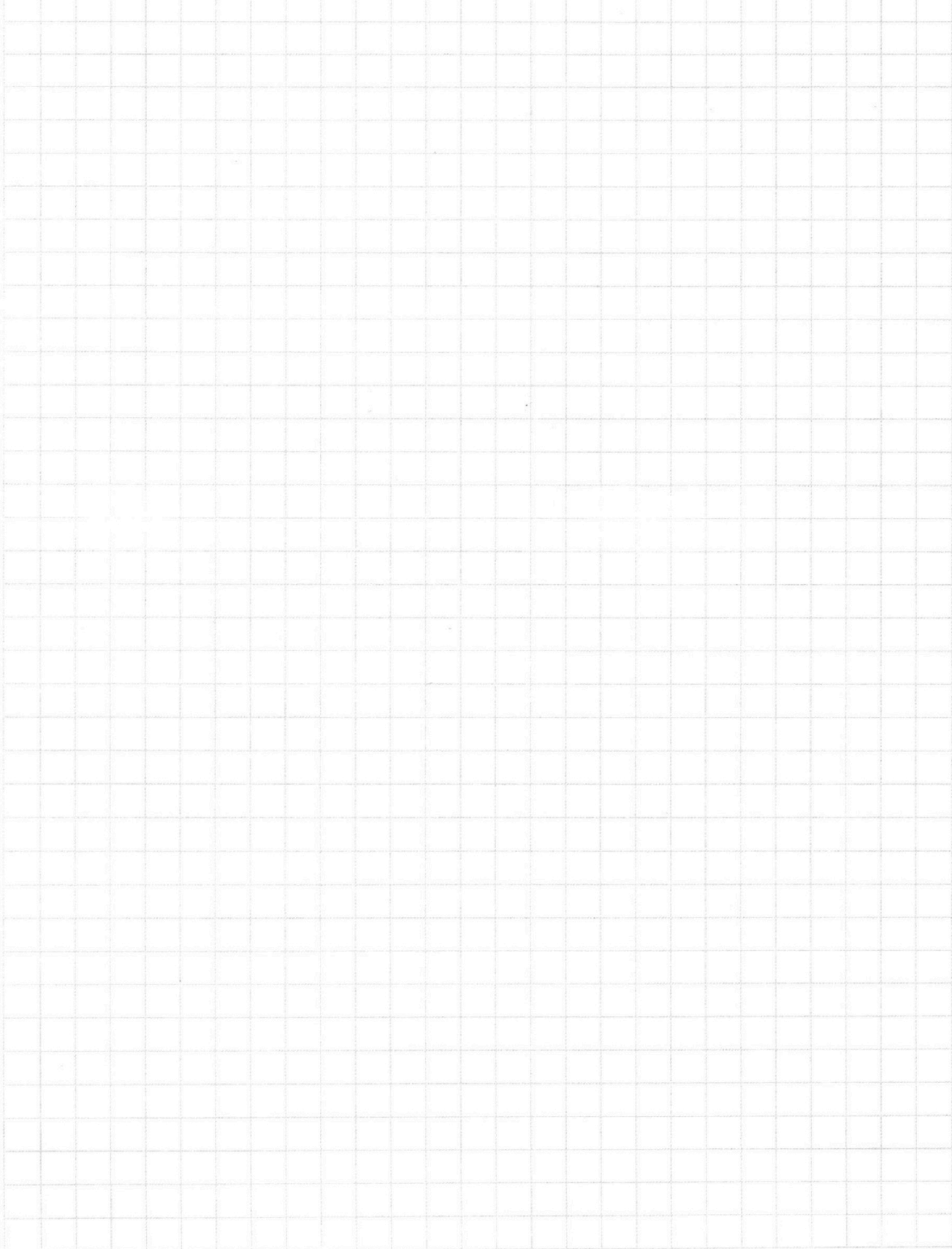
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



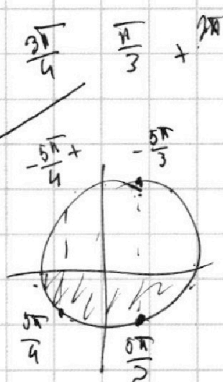
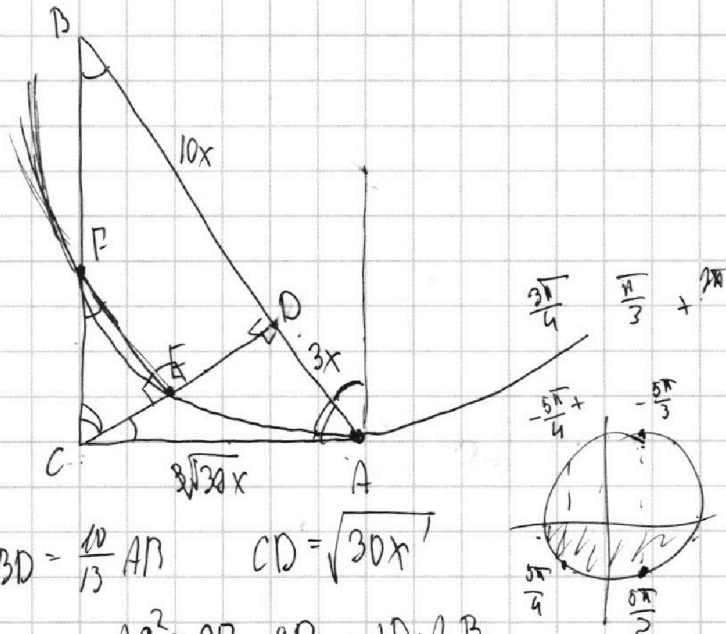
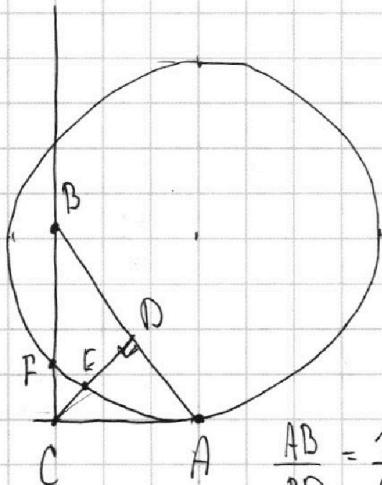
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10} \quad BD = \frac{10}{13} AB \quad CD = \sqrt{30}x$$

$$S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF}$$

$$AC^2 = CF \cdot CB = AD \cdot AB$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CFE \sim \triangle ABC$$

$$AC^2 = AB \cdot AD = 13x \cdot 3x = 39x^2$$

$$AC = \sqrt{39}x$$

$$\triangle ACD \sim \triangle CFE \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{CD}{FE} = \frac{AD}{CE}$$

$$\frac{CF}{AB} = \frac{FE}{BC} = \frac{CE}{AC}$$

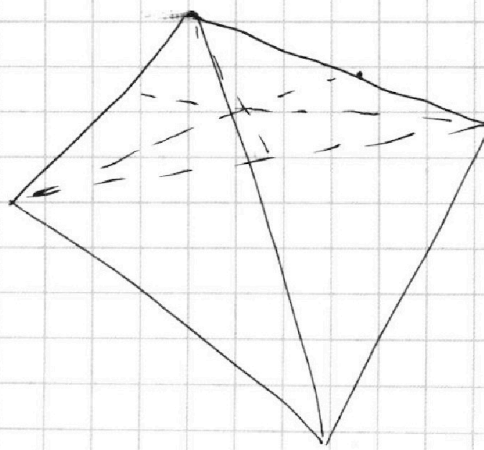
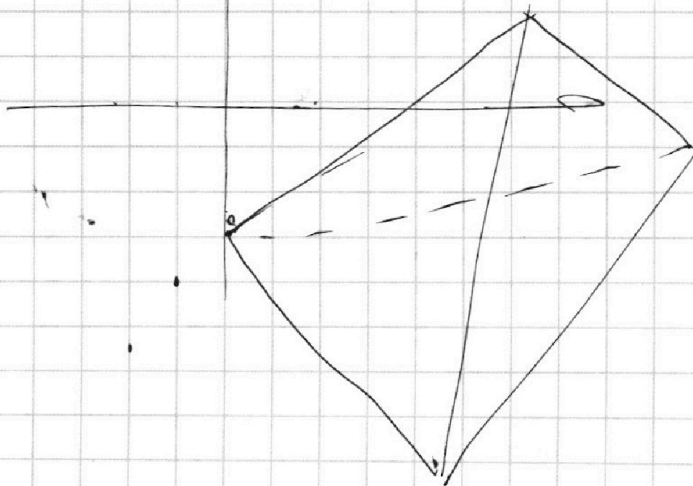
$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC}$$

$$BC = \sqrt{169 - 39}x = \sqrt{130}x$$

$$CF = \frac{AC^2}{CB} = \frac{39}{\sqrt{130}}x$$

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{1 \cdot 1} = 2$$

$$\frac{21}{4\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{1}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

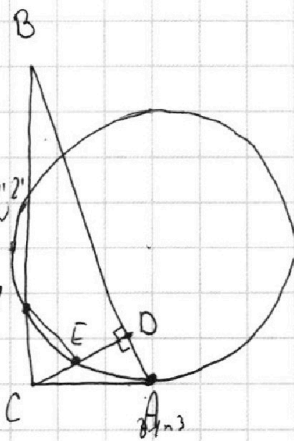
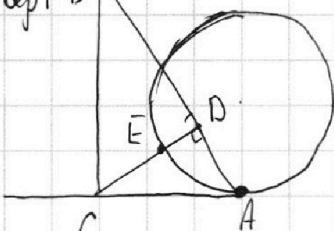
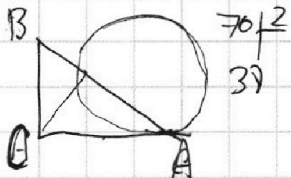


$$5 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

При $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, при $\frac{\pi}{2} - x \in I$ и II четвертей:

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x, \quad \delta x = \pi, \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \in I \text{ или } 0 - \pi$$

При $\frac{\pi}{2} - x \in III$ и IV четвертей: $\frac{\pi}{2} - x - \pi - 5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$
 $4x = 4\pi, \quad x = \pi - 6\pi$ не верт B



ab: $2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$
 bc: $2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{17}$
 ac: $2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

abc - min

Пусть в a - x_1 , в bок, y_1 - троек, z_1 - 5. x_1, y_1, z_1 -

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_3 + x_1 \geq 14 \\ y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_1 + y_3 \geq 17 \\ z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_3 + z_1 \geq 43 \end{cases}$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 34 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 10$$

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 43$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 22 \quad y_3 = 11, y_2 = 5, y_1 = 6$$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_y(7^{35}) - 4 \end{cases}$$

Ограничения: $x > 0, x = \frac{1}{6}, x \neq -\frac{1}{6}$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} =$$

$\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$-\pi$

5π

$\frac{3\pi}{2} + x$

x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad 343 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \quad 2 \cdot 347 \cdot 7 \cdot 7^3$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \frac{1}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \frac{1}{\log_7(6x)} - 4 \quad | \cdot 2 \log_7(6x) \quad | - 4 \cdot 2 \log_7(6x)$$

$$2t^5 + 8t - 7 = 0 \quad 2t^5 + 8t - 7 = 0 \quad a = 0 \quad \text{2 new roots.}$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ ((x+7)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{x-7b}{3a} = \frac{x}{3a} - \frac{7b}{a} = kt + d$$

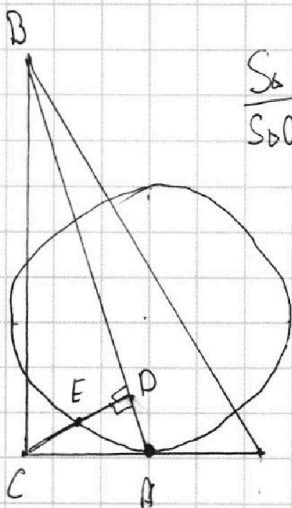
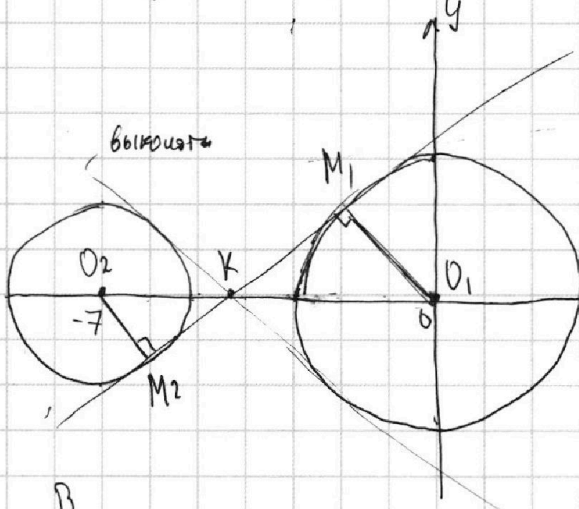
$a - 0 \cdot b$

$$x^2 + 14x + k^2 x^2 + 2k_1 x c_1 + c_1^2 + 45 = 0$$

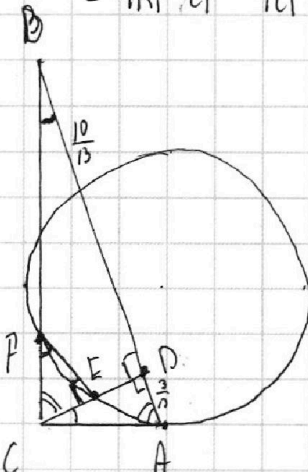
$$x^2 + k_1^2 x^2 + 2k_1 c_1 x + c_1^2 = 0$$

$$(1+k_1^2)x^2 + 2k_1 c_1 x + c_1^2 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 4k_1^2 c_1^2 - 4(1+k_1^2)c_1^2 = \\ &= 4k_1^2 c_1^2 - 4c_1^2 + 4k_1^2 c_1^2 \end{aligned}$$



$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$$



AB/EF,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

$$BD = \frac{10}{13} AB$$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC \sim \triangle ACB$

$$\frac{ADC}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$AC^2 = AB \cdot AD =$$