МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1. $ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$

$bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac = k \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

Тогда:

$abc = \sqrt{2mnk} \sqrt{2^{50} \cdot 7^{64}} = \sqrt{2mnk} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$

Наименьшее значение abc будет достигаться тогда и только тогда, когда $\sqrt{2mnk}$ минимально. Заметим, что $\sqrt{2mnk} \in \mathbb{Z}$ и $\sqrt{2mnk} \neq 1$ (в этом случае, если $2mnk = 1$, то $mnk = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Тогда $mnk = 2$:

$\sqrt{2mnk} = 2$. (если $n=1$, $m=1$, $k=2$, то $mnk = 2$ и

$abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ – минимальное значение

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{32}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $НОД(a;b)=1$ – по условию

Пусть $\begin{cases} a \underset{m}{\equiv} -b \\ (a+b)^2 - 8ab \underset{m}{\equiv} 0. \end{cases}$ Тогда $8ab \underset{m}{\equiv} 0$.

$$\begin{cases} a \underset{m}{\equiv} -b \\ 8ab \underset{m}{\equiv} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a^2 \vdots m \\ 8b^2 \vdots m \end{cases}$$

Так как числа a и b взаимно простые, то и ~~уже~~ a^2, b^2 взаимно простые. Тогда $8 \vdots m$, а значит $m=8$ – наибольшее значение m.

Пример: $a=5$ и $b=3$: $\begin{cases} 8:8 \\ -56:8. \end{cases}$

Ответ: 8

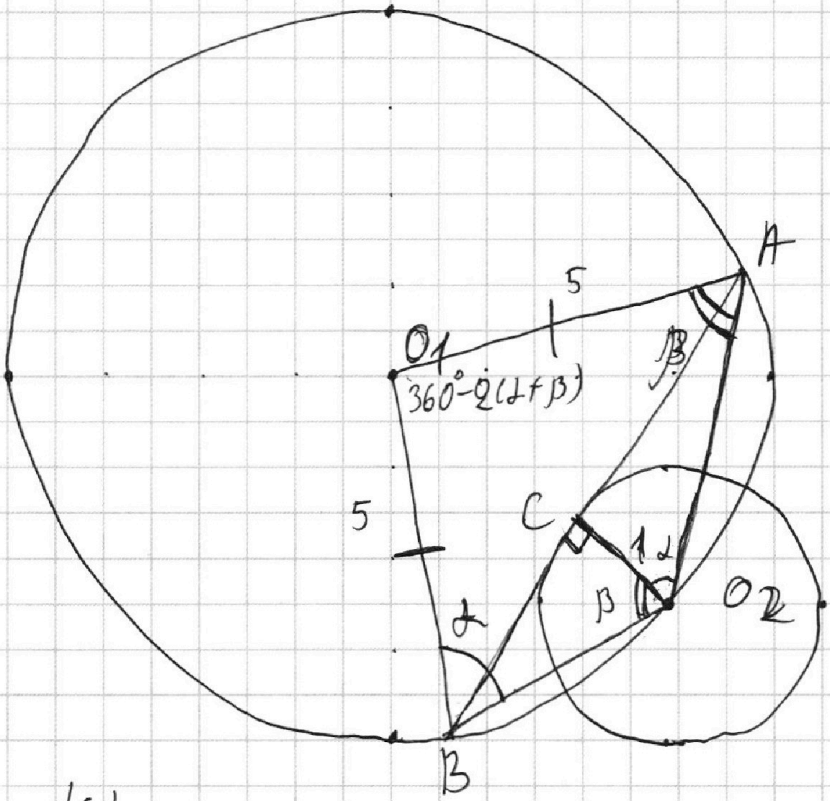
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$\frac{AC}{CB} = 7$

$r = 1, R = 5$

$AB - ?$

$O_2C \perp AB$

$O_2C = 1 = r$

$\frac{AC}{CB} = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = 7$

$\sin\alpha\cos\beta = 7\sin\beta\cos\alpha$

По теореме синусов: $AB = 10(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) =$

$= 80\sin\beta\cos\alpha$; $\boxed{AB = 80\sin\beta\cos\alpha}$

$\angle O_1BO_2 = \alpha + \beta - 90° + 90° - \beta = \alpha$, $\angle O_1AO_2 = \beta$

$O_1O_2 = O_1A = O_1B = 5 \Rightarrow \triangle O_1AO_2$ и $\triangle O_1BO_2$ –

равнобедренные с углами α и β при основаниях соответственно. Тогда $BO_1 = 10\cos\beta$, $O_2B = 10\cos\alpha$.

Осталось, что ~~$BC\sin\alpha =$~~ B

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $\frac{\sin\beta}{BC} = \cos 2$

Заметим, что $\frac{\sin\beta}{BC} = \cos\beta$.

Тогда:

~~$AB = 80\ BC \cos 2 \cos\beta$~~

Так как $\cos 2 = \frac{1}{O_2A} = \frac{1}{100\cos\beta}$, то

$AB = 80\sin\beta$

$80\sin\beta\cos 2 = \frac{80\,BC}{O_2A \cdot O_2B} = \frac{80\,BC}{100\cos 2\cos\beta} = AB$

$\frac{80}{100\cos 2\cos\beta} - 1 = 7 \Leftrightarrow \cos 2\cos\beta = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} =$

$= (O_2A \cdot O_2B)^{-1} \Leftrightarrow \boxed{O_2A \cdot O_2B = \frac{25}{2}}$

$\cos 2\cos\beta = \frac{1}{10} \Leftrightarrow O_2A \cdot O_2B = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. Замена: $\begin{cases} \sqrt{2x^2-5x+3} = a \geq 0 \\ \sqrt{2x^2+2x+1} = b \geq 0 \end{cases}$

Тогда:

$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \ ; (1) \\ a = -b \ (2) \end{cases}$

(1): $\begin{cases} -5x+3 = 2x+1 \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 2x^2-5x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$

(2): $a = -b$. Так как $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то

$\begin{cases} 2x^2-5x+3 = 0 \\ 2x^2+2x+1 = 0 \end{cases}$. Но эти два квадратных трехчлена равны $\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ и при этом при $x = \frac{2}{7}$ $2x^2-5x+3 \neq 0$. Значит случай $a = -b$ не приносит ни дон. корней.

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

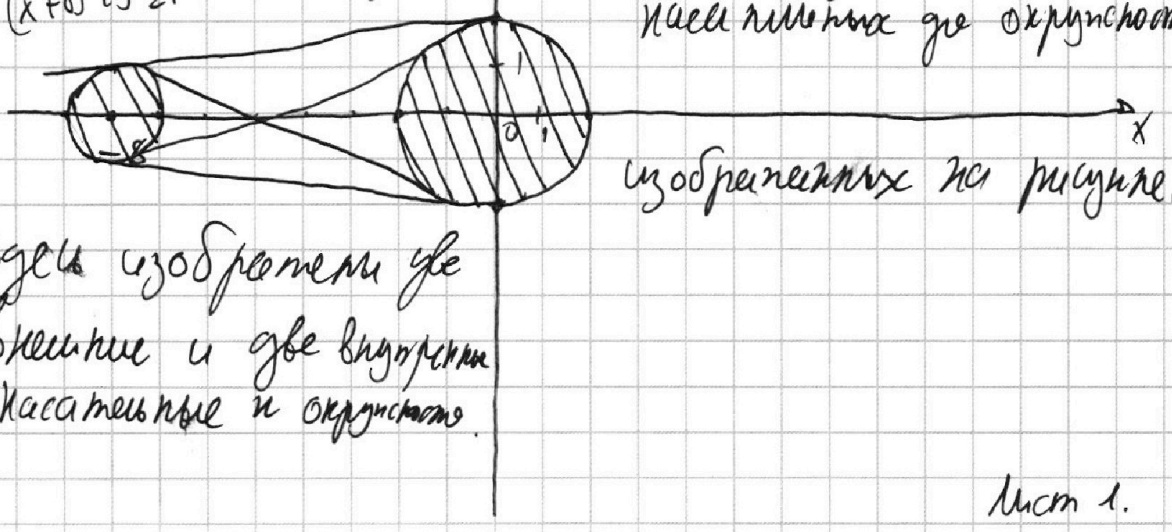
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. $\begin{cases} y = -ax - ab \ ;(1) \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \le 0 \ ;(2) \end{cases}$; $a : \exists b :$ ровно три

(1) – прямая

(2) – множество из окружности с центром в точке $(-8;0)$ радиуса 1 и окружности

(2) – множество, состоящее из круга с окружностью с центром $(-8;0)$ радиуса 1 и круга с окружностью с центром $(0;0)$ радиуса 2 (рассматривая случаи, когда $(x+8)^2+y^2-1 \le 0$, а $x^2+y^2-4 \ge 0$ и $(x+8)^2+y^2-1 \ge 0$ и $x^2+y^2-4 \le 0$ убеждаемся в вышесказанных)



Здесь изображены две внешние и две внутренние касательные к окружности.

Таким задачи ($a : \exists b :$ ровно) удовлетворяют такие и только такие a, при которых $y = -ax - ab$ параллельна одной из общих касательных окружностей, изображенных на рисунке.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$l: y = kx + b$ – общая касательная к окружностям

Пусть:

$x^2 + (kx+b)^2 = 4$

$x^2 + k^2x^2 + 2bkx + b^2 = 4$

$(k^2+1)x^2 + 2bkx + b^2 - 4 = 0$; единственное решение

$D_1 = b^2k^2 - (k^2+1)(b^2-4) = b^2k^2 - b^2k^2 + 4k^2 - b^2 + 4 =$

$= 4k^2 - b^2 + 4 = 0$

$\boxed{4k^2 - b^2 + 4 = 0}$

$(x+8)^2 + k^2x^2 + 2bkx + b^2 = 1$; единственное решение

$x^2 + 16x + 64 + k^2x^2 + 2bkx + b^2 - 1 = 0$

$(1+k^2)x^2 + 2(bk+8)x + 63 + b^2 = 0$

$D_1 = (bk+8)^2 - (63+b^2)(1+k^2) =$

$= b^2k^2 + 16bk + 64 - 63 - 63k^2 - b^2 - b^2k^2 =$

$= -63k^2 - b^2 + 16bk + 1 = 0$

$\boxed{63k^2 + b^2 - 16bk - 1 = 0}$

$\begin{cases} 4k^2 - b^2 + 4 = 0 \\ 63k^2 + b^2 - 16bk - 1 = 0 \end{cases} \cdot 4 \Rightarrow 256k^2 - 64bk + 3b^2 = 0 \;|:b^2$

$256\left(\frac{k}{b}\right)^2 - 64\left(\frac{k}{b}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{k}{b} = \frac{1}{16} \\ \frac{k}{b} = \frac{3}{16} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$b = 16k$:

$4k^2 - (16k)^2 + 4 = 0$

$k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$ - угловой коэффициент касательной к окружности

$b = \frac{16}{3}k$

$4k^2 - \frac{256}{5}k^2 + 4 = 0$

$36k^2 - 256k^2 + 36 = 0$

$220k^2 = 36$

$k = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$

Ответ: $a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$, $a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$

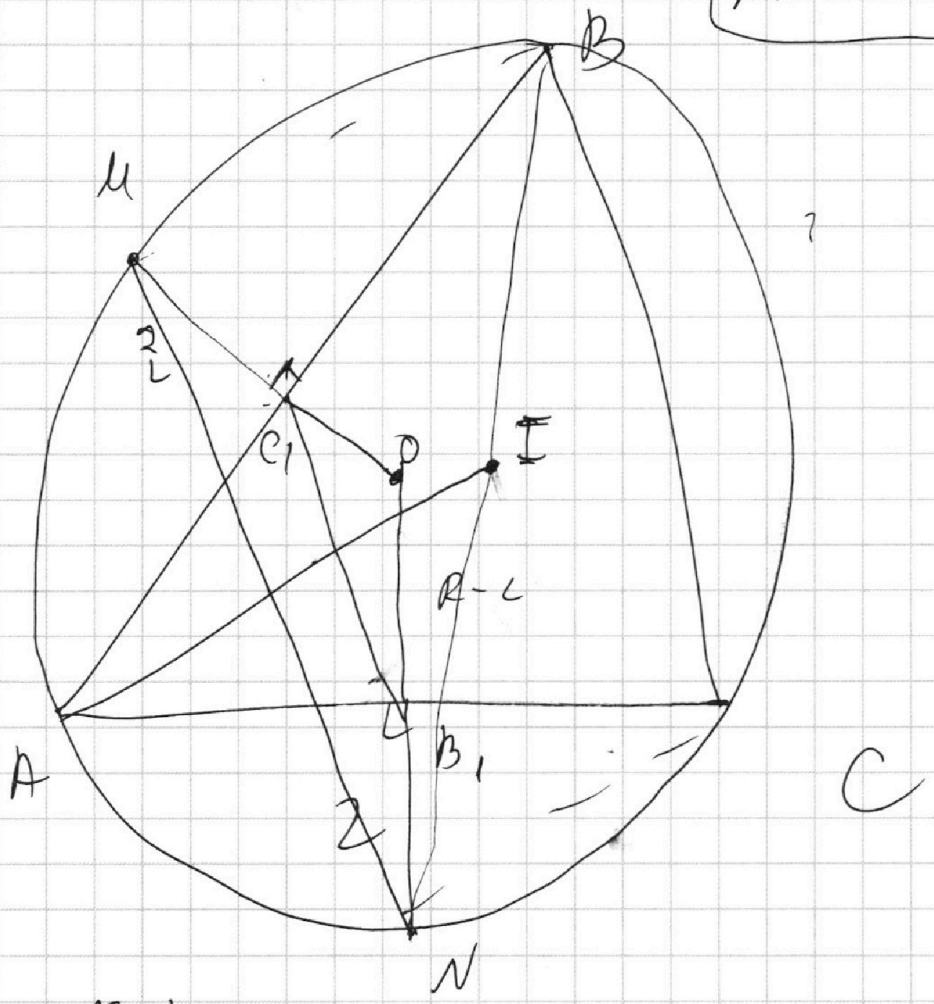
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$AI^2 = bc - 4Rr$



$\cos\beta = \frac{R-r}{R}$

$\cos\gamma = \frac{R-\frac{r}{2}}{R} = \frac{2R-r}{2R}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{R^2-(R-r)^2}}{R} = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$

$\sin\gamma = \frac{\sqrt{4R^2-4R^2+36R-81}}{2R} = \frac{\sqrt{36R-81}}{2R}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin\beta\cos\alpha - ?$$

$$\frac{\beta c}{\theta_2 h \cdot \theta_2 \beta} = \frac{\beta c}{\lambda_{00}\cos^2\beta} = h\beta$$

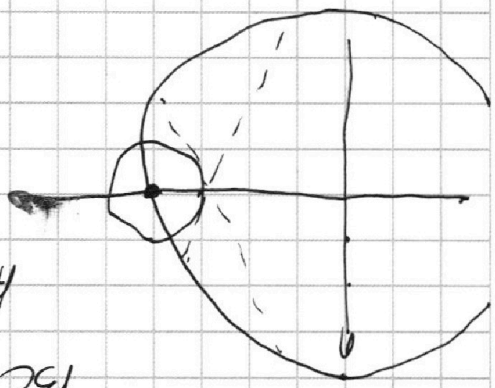
$$\frac{h\beta}{\beta c} = \frac{1}{\lambda_{00}\cos^2\beta}$$

$$hc \quad \frac{1}{\lambda_{00}\cos^2\beta} - 1 = \gamma$$

$$\frac{1}{\lambda_{00}\cos^2\beta} = \delta$$

$$\cos^2\beta = \frac{\delta}{\lambda_{00}}$$

$$\frac{h\beta}{L} = \frac{\gamma^5}{L}\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{L}}{c}$$



$$\sin\beta\cos\alpha = \cos(\beta+\delta) = \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta =$$

$$= \frac{\sqrt{(36R-8)(R-1)}}{R^2} - \frac{(R-1)(2R-5)}{2R^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

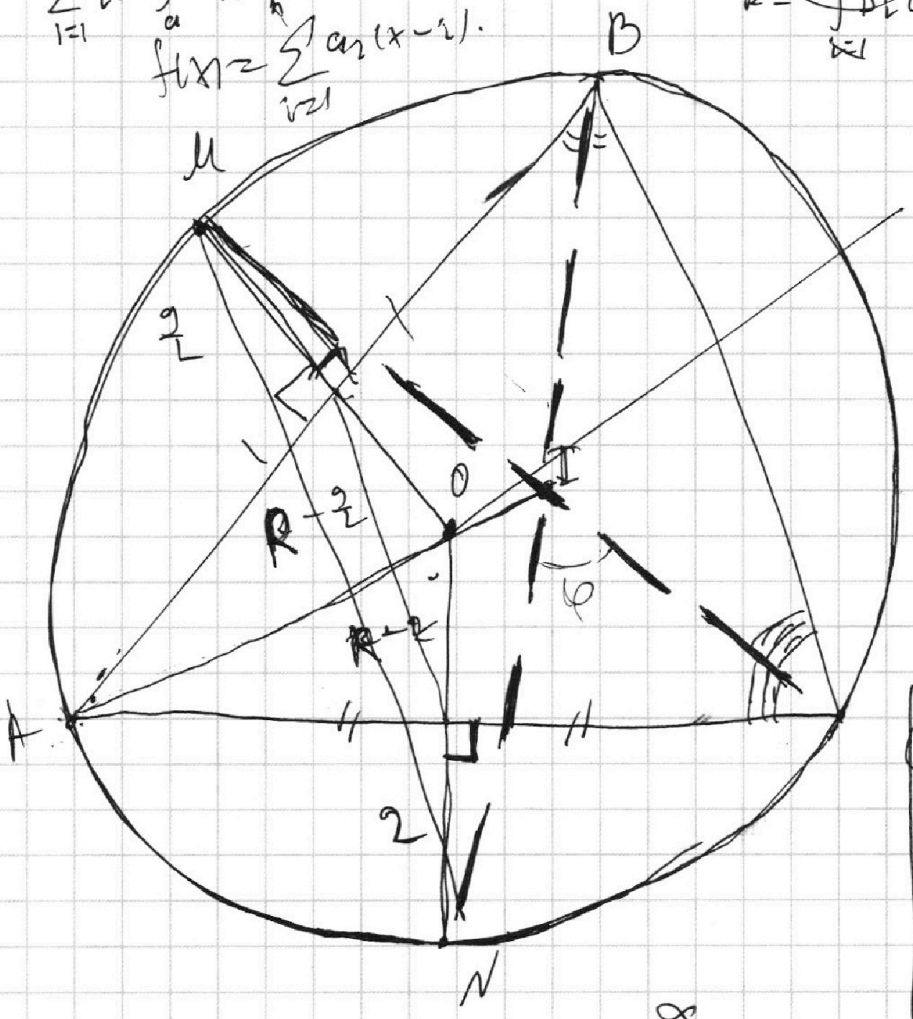
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \int_a^b f(x)\,dx + R$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x-i)\cdot$$

$$R = \int_{i=1}^{\infty} \dots$$



$$\frac{5}{\sin\beta} = \frac{AO_2}{\sin^2\beta}$$

$$\frac{\sin\beta}{BC} = \cos\beta$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD\cos^2\beta}{AC}$$

$$\frac{100}{64} = \frac{10}{8}$$

$$\frac{12\cdot 10}{64} \quad \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{64}{48} \quad 16$$

$$8D\cdot BC\cos^2\beta$$

$$8D\cdot BC\cos^2\beta = AB$$

$$\begin{array}{r} 64^2 \\ \times\ 75 \\ \hline 320 \\ 448 \\ \hline 4800 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

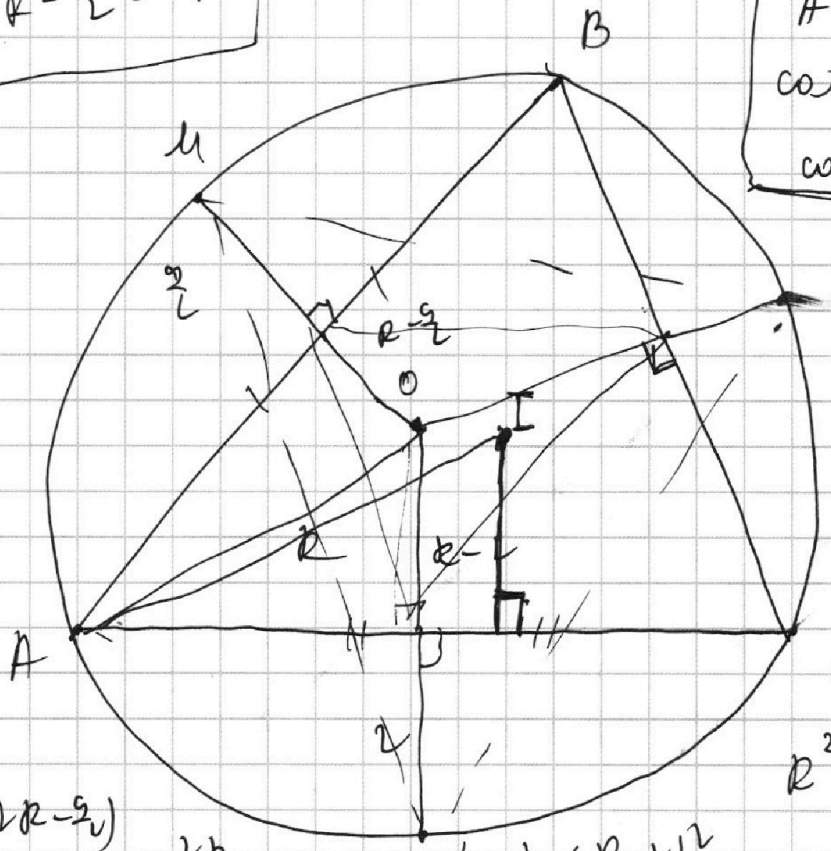
$R - \frac{9}{2} = R$

$AB = 9(2R - \frac{9}{2})$

$AC = 4(R-1)$

$\cos\beta = \frac{R-2}{R}$

$\cos\gamma = \frac{R-\frac{9}{2}}{R}$



$\sin\delta = \frac{9(2R-\frac{9}{2})}{2R}$

δ

$R^2 - (R-2)^2$

$(R-R+2)(R+R-2)$

$2(2R-2)$

$14+17+10$

$34+17$

$R^2 - R^2 + 4R - 4$

51

$\frac{9(2R-\frac{9}{2})}{\sin\alpha} = 2R$

$\sqrt{R^2-(R-2)^2}$

$R^2 - R^2 + 4R - 4$ $R - 2 + 2$

$\frac{9(2R-\frac{9}{2})}{2R}$

$R - 2 = R\cos\beta$ $4(R-1)$ $R - 2 - 2$

$(R-4)R$

$2R+4$

$\cos\beta = \frac{R-2}{R}$

$\frac{R-\frac{9}{2}}{R}$

$\frac{4(R-1)}{\sin\beta} = 2R$

$\frac{2(R-1)}{R}$

$\frac{AC}{2} = \sqrt{R^2 - (R^2 + 4R\cos\beta)\gamma} =$

$AB = 2 \cdot \frac{9}{2}(2R - \frac{9}{2}) = 9(2R - \frac{9}{2})$

$1 + \frac{2}{R}$

$\frac{AC}{2} = 2\sqrt{R+4}$

~~$AC = 2R(R-4)$~~

$1 + \frac{9}{R}$

$AC = 4\sqrt{R+4}$ $AC = 4(R-1)$

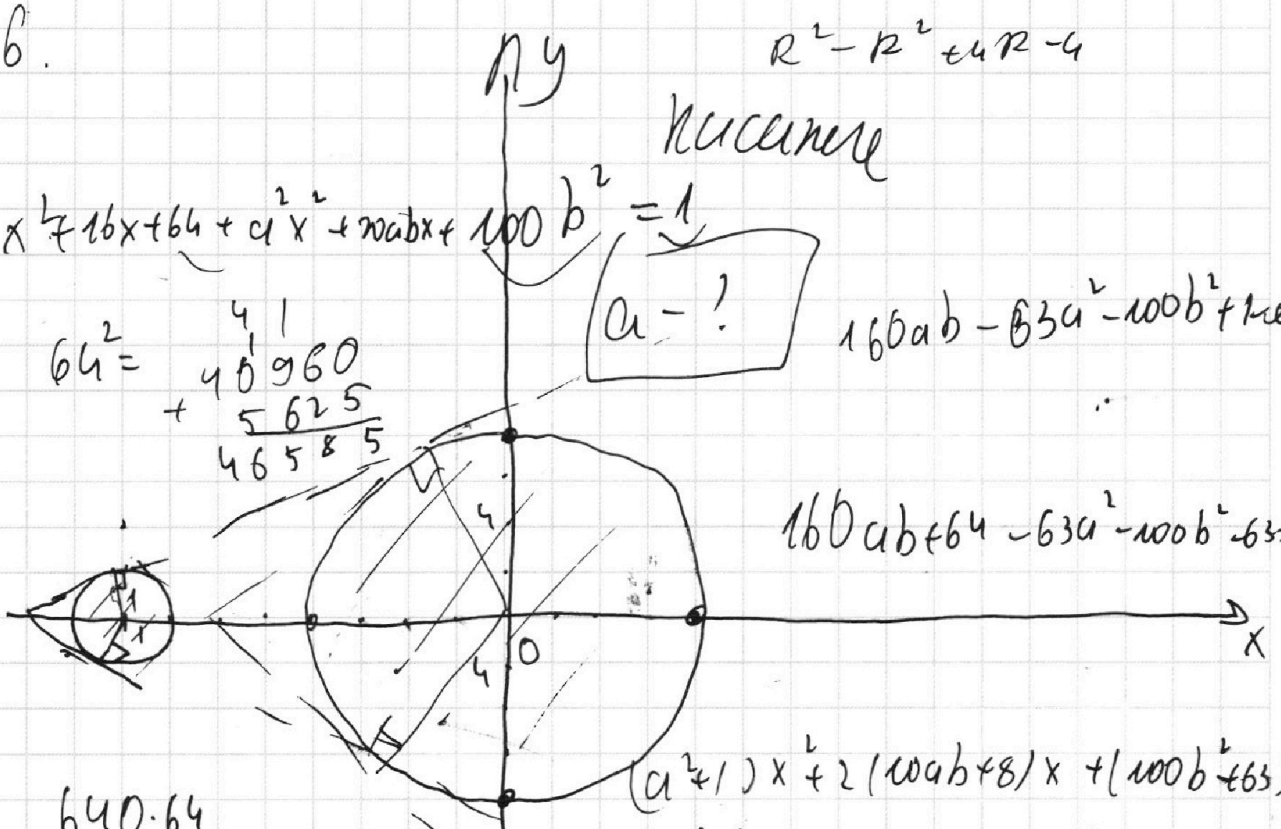
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.



$x^2+16x+64+a^2x^2+20abx+100b^2=1$

$a-?$

$64^2=4096+5625=4658\,5$

$640\cdot 64$

$\sqrt{46585}=215$

$41\overline{)565}$

$y=-ax-10b$

2485

$160ab-63a^2-100b^2+100$

$160ab+64-63a^2-100b^2-63=0$

$(a^2+1)x^2+2(10ab+8)x+(100b^2+63)=0$

$100a^2b^2+160ab+64-100a^2b^2-63a^2-100b^2-63=0$

$4^2+5^2=41$

$\times 5$

2125

$a^2-25b^2+1=0$

$63a^2+100b^2-160ab=1$

$x^2+a^2x^2+20abx+100b^2-4=0$

$(a^2+1)x^2+20abx+100b^2-4=0$

$D_1=100a^2b^2-(a^2+1)(100b^2-4)$

$12\cdot 3$

$3^2\cdot 4$ 6^2

$3^2\cdot 2^2$

$100a^2b^2-100a^2b^2+4a^2-100b^2+4$

$4a^2-100b^2+4=0$

x^2 $64a^2+75b^2-160ab=0$

$D=5625+160\cdot 64\cdot 4$

41×1

$+3\,|\,-45$

$-10\,|\,7$

$8\,|\,45$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

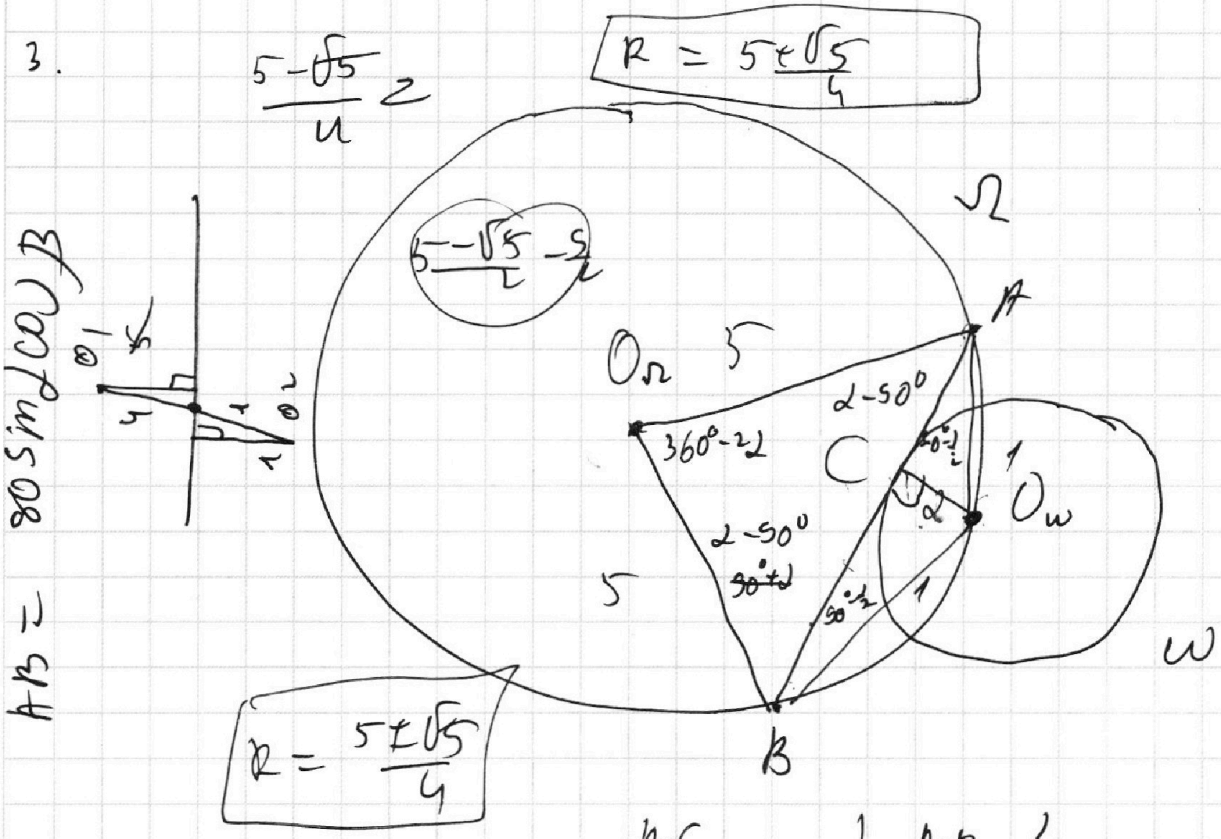
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$R = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$

$\frac{5-\sqrt{5}}{4}\cdot 2$

$\frac{5-\sqrt{5}}{2}-5$

$R = \frac{5\pm\sqrt{5}}{4}$

$R_\omega = 1$

$R_\Omega = 5$

$\frac{AC}{CB} = 7 \mid AB - ?$

$AB = 9\left(\frac{5+\sqrt{5}-9}{2}\right)$

$\frac{9}{2}\left(\sqrt{5}-4\right)$

$90°$

$\frac{5}{\sin(\alpha-50°)} = \frac{AB}{1}$

$\frac{5R^2-10R+5}{R^2} = 1$

$4R^2-10R+5=0$

$D_1 = 25-20=5$

$R = \frac{5\pm\sqrt{5}}{4}$

4. $\frac{\sqrt{2x^2-5x+3}}{a} - \frac{\sqrt{2x^2+2x+1}}{b} = -7x+2$

$\begin{cases} a-b= \\ \end{cases}$

$a-b = a^2-b^2$

$\frac{81\left(2R-\frac{9}{2}\right)^2}{4b^2} + \frac{R-\frac{9}{2}}{4\left|R-\frac{1}{2}\right|^2} + \frac{4R^2-8R+4+R^2-2R+1}{R^2} = 1$

$\frac{(R-1)^2}{R^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $ab : 2^{14} 7^{10}$

$bc : 2^{17} 7^{17}$

$ac : 2^{20} 7^{37}$

$k, l, n \in \mathbb{N}$

$abc \to m/m$

$34+17 = 51$

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = l \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$20+14+17$

$34+17 = 51$

$37+17+10 = 54$

$k=1$
$l=1$ $\Rightarrow$ ~~$kln=1 \Rightarrow$~~
$n=1$ ~~$\to m/n$~~

$(abc)^2 = kln \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$abc \quad 7^{32}\sqrt{kln} \cdot 2^{25}\sqrt{2}$

$abc = 2^{25} \cdot 7^{32}\sqrt{2kln}$

$\sqrt{2kln} \in \mathbb{N}$

~~3, 7~~

$\boxed{kln = 2} \Rightarrow$

$k=1$
$l=1$ | ga
$n=2$

$\boxed{2^{26} \cdot 7^{32}}$

~~5, 3~~

2. $\text{HOD}(a,b) = 1$

$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8ab : m \\ a+b : m \end{cases}$

$50 - 34 = 56$

(34)

$8a^2 : m$

$8b^2 : m$

$8ab \underset{m}{\equiv} 0$

$a \underset{m}{\equiv} -b$

~~6 8~~ 7-8

$8b^2 : m$

$56 \vdots$

$\boxed{m_{max} = 8}$

$\frac{8}{25+9-30} =$

$= \frac{8}{56}$

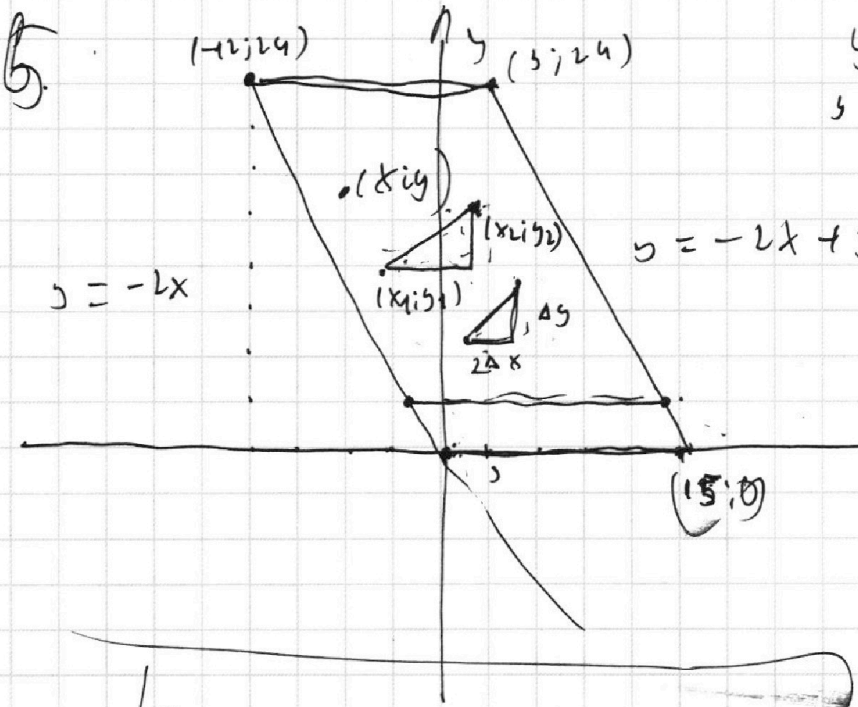
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.



$y \le 24$
$y \ge 0$
$y \ge -2x$
$y \le -2x + 30$

$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

$y = kx + b$

$\begin{cases} 15k + b = 0 \\ 3k + b = 24 \end{cases}$
$12k = -24$
$k = -2$

$1 = -2x + 30$
$2x = 29$

$2 = -2x + 30$
$1 = -x + 15$
$x = 14$

$3 = -2x + 30$
$x = \frac{27}{2} = 13,5$

x | y

(0;0) (0;1) ... (0; 15)
(1; 0) ... (1 ; 14)
(2; -1), (2; 0) ... (2; 14)
(3; -1), ... (3; 13)
⋮

$\begin{cases} y_1 \in [0; 24] \\ y_1 \ge -2x_1 \\ 2x_1 \le 30 - y_1 \end{cases}$

$y_1 \ge -2x_1$
$30 - y_2 \ge 2x_2$

$-y \le 2x$
$y \le -2x + 30$

$\begin{cases} y \in [0; 24] \\ y \ge -2x \\ y \le -2x + 30 \\ x \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_2 \in [0; 24] \\ y_2 \ge -2x_2 \\ 2x_2 \le 30 - y_2 \\ 2x_2 \ge \end{cases}$

$2\Delta x + 2\Delta y = 12$

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 =$

$2(x_2 - x_1) \le 30 + (y_2 - y_1)$

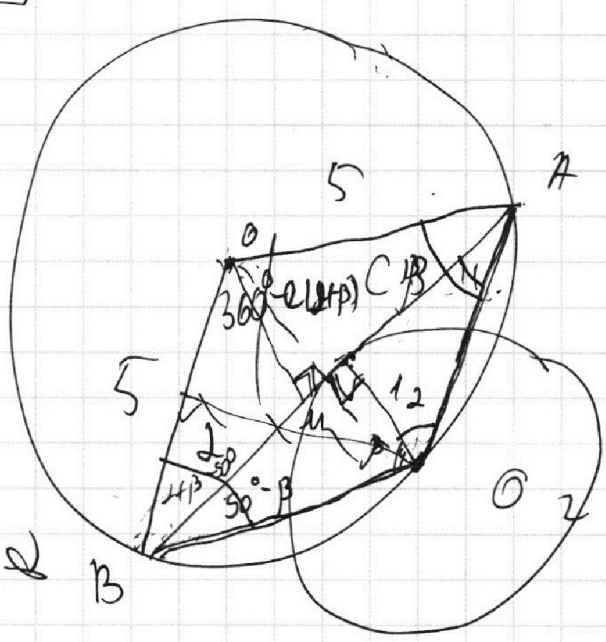
≥ 30

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AC}{CB} = 7$

$r = 1$

$R = 5$

$\frac{4(R-1)^2 + R^2 - 4R + 4 - 1}{R^2}$

$\frac{R-1+(R^2-4R+4)}{R^2} = 1$

$\frac{\log \alpha}{\angle 5\beta} = \frac{AC}{CB} = 7$

$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} = 7$

$AB = 10(\sin\alpha\cos\beta$

$AB = 80\sin\beta\cos\alpha$

$\frac{BC}{O_2B} \cdot O_2A$

$\frac{AC}{O_1H} =$

$\sin\beta =$

$\cos\beta = \frac{R-4}{R}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{R-1}}{R}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{4(R-1)}}{R}$

$\cos\beta = \frac{R-4}{R}$

$R-2 = R\cos\beta$

$\cos\beta = \frac{R-2}{R}$

$\sin\beta = \frac{4\sqrt{R-1}}{2R} = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$

$R-2 = R\cos\beta$

$\cos\beta = \frac{R-2}{R}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{R-1}}{R}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{4(R-1)}}{R}$

$\sin\beta =$

$\cos\beta = \frac{R-4}{R}$

$\sin\beta$

$\cos\beta =$

$\

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = -7x+2$

Замена: $\begin{cases} \sqrt{2x^2-5x+3} = a \\ \sqrt{2x^2+2x+1} = b \end{cases}$

Тогда

$a-b = a^2-b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5x+3 = 2x+1 \\ 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{array}\right.$ ⇔

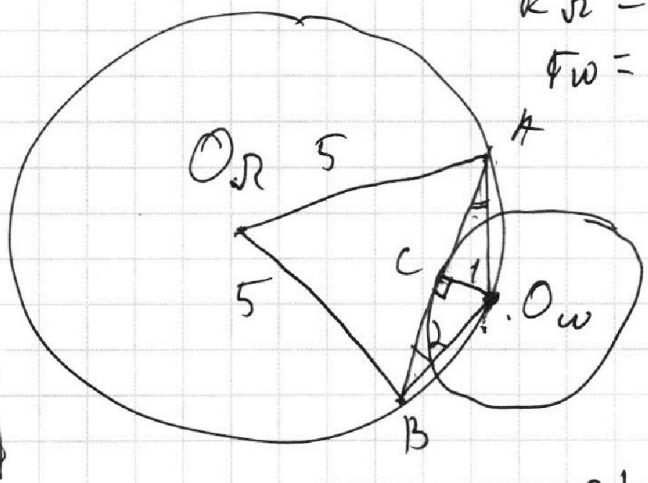
$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = \frac{2}{7}} \\ \end{cases}$

$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3$

$\frac{8}{47} - \frac{70}{49} + 3$

$-\frac{62}{49} + 3 \neq 0$

3.



$R_{\Omega} = 5 = R$

$r_w = r = 1$

$\frac{AC}{CB} = 7$

$\frac{AC}{CB} = \frac{ctg\,A}{ctg\,B}$

$\boxed{ctg\,A + ctg\,B = AB}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

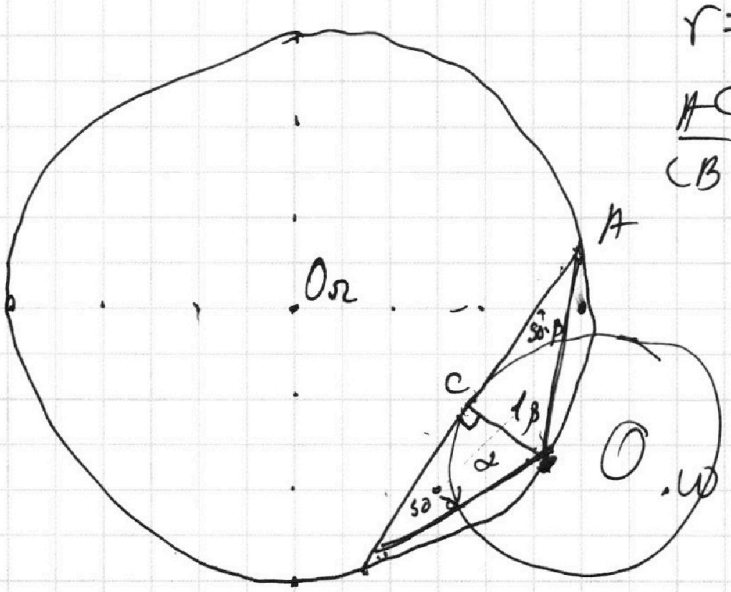
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

$R = 5$
$r = 1$
$\frac{AC}{CB} = 7$
$AB - ?$



$\frac{CB}{O_rB}$ $\frac{AC}{O_rA}$

$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{1}$

~~$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}$~~

~~$\operatorname{tg}\alpha +$~~ $\boxed{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 7}$

$\frac{AB}{10\sin(\alpha+\beta)}$

$\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta\sin\beta} = 7$

$10(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$

$\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta} = 7$ $\frac{O_rB}{\cos\beta} = 10$

$80\sin\alpha\cos\beta$

$BC =$

$7\sin\alpha\cos\beta = \sin\beta\cos\alpha$

$O_rB = 10\cos\beta$

$O_rA = 10\cos\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

$AB - ?$

$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

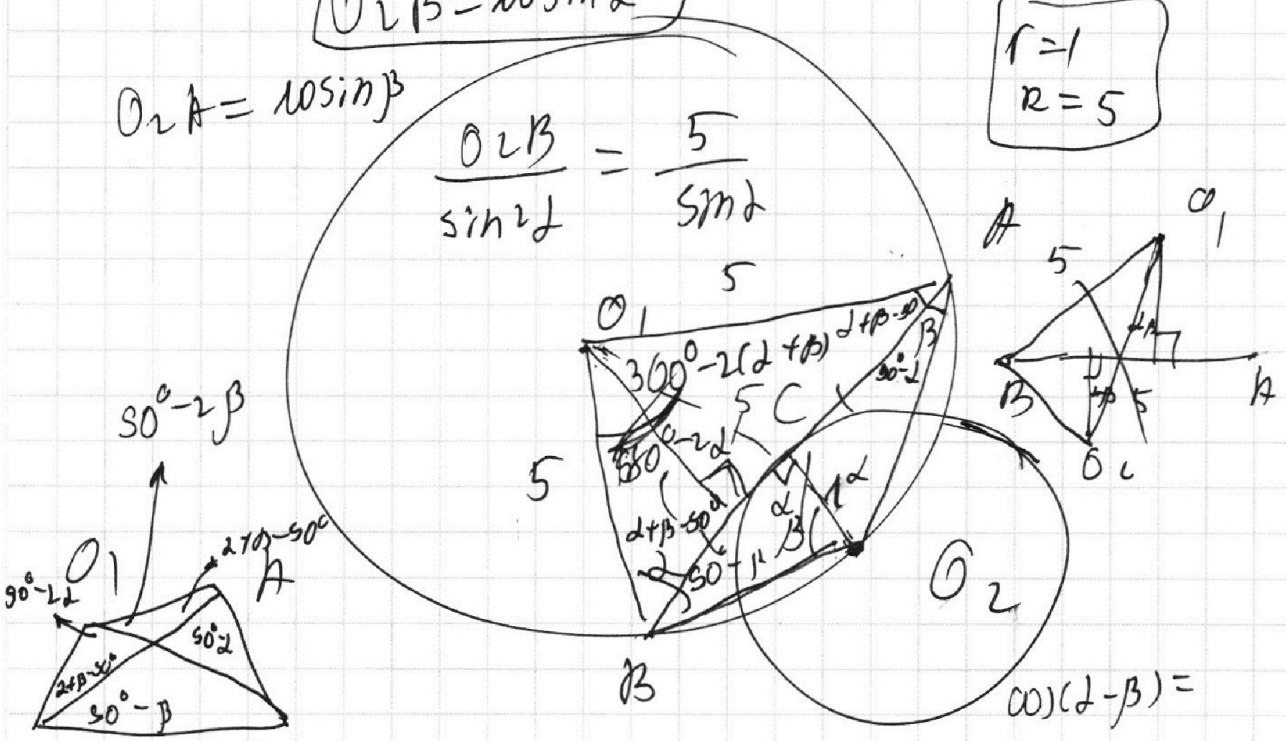
$r = 1$

$R = 5$

$O_2B = 10\sin\alpha$

$O_2A = 10\sin\beta$

$\frac{O_2B}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin\alpha}$



$\cos(2\alpha-\beta) =$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta} = \frac{AC}{CB} = 7$

$\frac{\sin 2\alpha \cos\beta}{\sin\beta\cos 2\alpha} = 7$

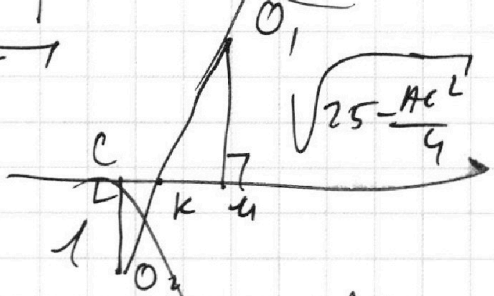
$AB = 10(\sin 2\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos 2\alpha)$

$AB = 80\sin\beta\cos 2\alpha$

$100\sin^2 2\alpha - 1 + 100\sin^2\beta - 1 = AB^2$

$25 - \frac{AC^2}{4}$

$100(\sin^2 2\alpha + \sin^2\beta) - 2 = AB^2$



$\frac{AC}{CB} = 7$

$\sqrt{25-\frac{AC^2}{4}} = \frac{AK}{KC}$

$\frac{AM}{MC} = 1$

$\sqrt{25-\frac{AB^2}{4}} + 1 = \frac{MC}{KC}$

$100(\sin^2 2\alpha + \sin^2\beta) - 2 = 80\sin\beta\cos 2\alpha$

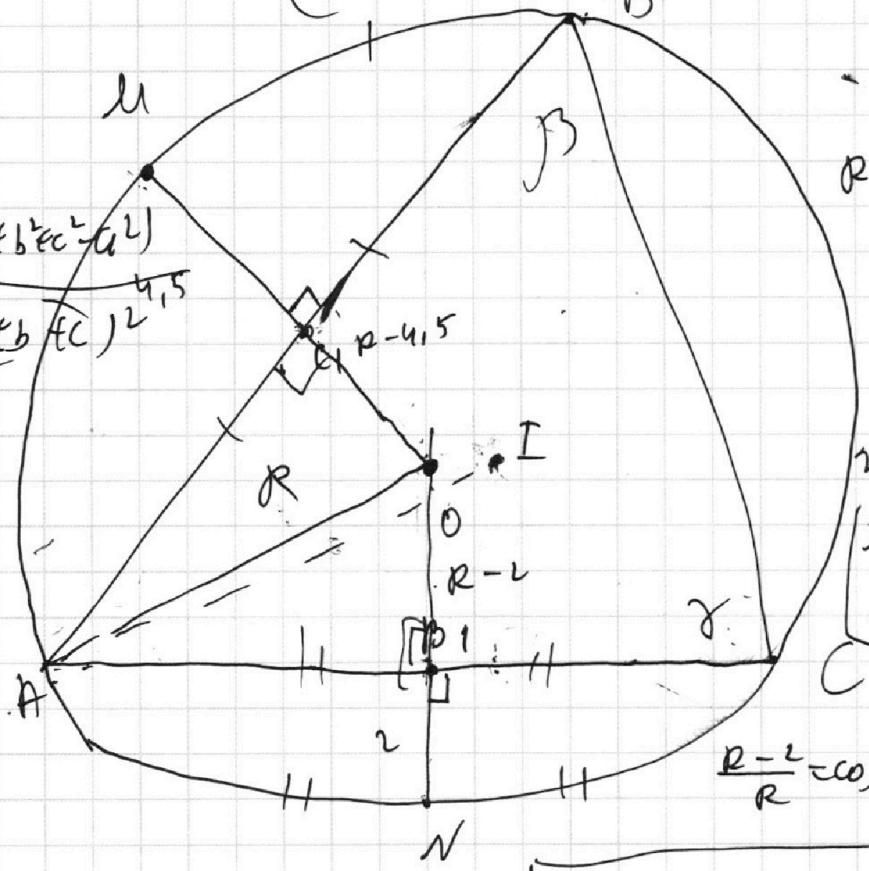
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7. $\dfrac{b^2c^2+b^2c^2+2bc(b^2+c^2-a^2)}{(a+b+c)^2}$



AI - ?

$2b^2c^2$

$2bc(bc+b^2+c^2-a^2)$

$(a+b+c)^2$ 4,5

$R-4,5=R\cos\gamma$

$R-2=R\cos\beta$

$2AB\cdot AC\cos\alpha$

$1-\frac{4,5}{R}=\cos\gamma$

$1-\frac{2}{R}=\cos\beta$

$\frac{R-2}{R}=\cos\beta$ $\sum_{i=1}$

$AB=3(2R+4,5)$

$AC=4(2R+2)$

$R^2-(R-4,5)^2$

$2R(\cos2+\cos\beta+\cos1)\ge 2R+7$

$(R-R+4,5)(R+R-4,5)$

$1-\left(\frac{R-2}{2}\right)^2$

$4,5(2R+4,5)$

$2(2R+2)$

$1-\frac{R^2-4R+4}{4}$

$AI^2=ab-4Rr$

$AI=bc-4Rr$

$\overrightarrow{OI}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{2p}$

$\dfrac{4-R^2+4R-4}{4}$

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{2p}$

$\frac{\sqrt{4R-R^2}}{2}=\sin\beta$ $\frac{4R-R^2}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2+(ax+10b)^2=4$ – имеет единственное решение

$(a^2+1)x^2+20abx+100b^2-4=0$

$D_1 = 100a^2b^2-(a^2+1)(100b^2-4) = 100a^2b^2-100a^2b^2+4a^2-100b^2+4=0$

$\boxed{a^2-25b^2+1=0}$; (*)

$(x+8)^2+a^2x^2+20abx+100b^2=1$ – единственное решение

$(a^2+1)x^2+2(10ab+8)x+100b^2+63=0$

$D_1 = 100a^2b^2+160ab+64-100a^2b^2-63a^2-100b^2-63 =$

$= -63a^2-100b^2+160ab+1=0$

$\boxed{63a^2+100b^2-160ab-1=0}$; (**)

Нам нужно, чтобы (*) и (**) выполнялись одновременно:

$$\begin{cases} a^2-25b^2+1=0 \\ 63a^2-160ab+100b^2-1=0 \end{cases}$$

Тогда:

$64a^2-160ab+75b^2=0$

$64\left(\frac{a}{b}\right)^2-160\left(\frac{a}{b}\right)+75=0$

$D_1 = 6400-4800 = 1600 = 40^2$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{80+40}{64} = \frac{120}{64} = \frac{60}{32} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} \\ \frac{a}{b} = \frac{40}{64} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Лист 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$6t^2 - 4bkt + 3 = 0$

$D_1 = 4k^2 - 18 = 4(k^2 - 18)$

$\frac{D_1}{4} = k^2 - 18$

$\begin{cases} 15k^2 + 4b^2 - 6kbk - 4 = 0 \\ 4k^2 - b^2 = 0 \end{cases}$

$b = \pm 4k$

$4k^2 - 256k^2 + 4 = 0$

$-252k^2 = -4$

$k^2 = \frac{4}{252} = \frac{1}{63}$

$15 \cdot \frac{1}{63} + 3b^2 - 6 \cdot 4k^2 = 0$

$\frac{15}{63} + 3b^2 - 24k^2 = 0$

$\frac{5}{21} + 3b^2 - 24k^2 = 0$

$3b^2 - 24k^2 = -\frac{5}{21}$

$b^2 - 8k^2 = -\frac{5}{63}$

$8k^2 - b^2 = \frac{5}{63}$

$\frac{D}{4} = 16 - 8 \cdot \frac{5}{63} = \frac{16 \cdot 63 - 40}{63} = \frac{1008 - 40}{63} = \frac{968}{63}$

$\sqrt{\frac{D}{4}} = \frac{\sqrt{968}}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 242}}{\sqrt{63}} = \frac{2\sqrt{242}}{\sqrt{63}}$

$t_1 = \frac{4 - \frac{2\sqrt{242}}{\sqrt{63}}}{3} = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{242}}{3\sqrt{63}}$

$t_2 = \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{242}}{3\sqrt{63}}$

$\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{242}}{3\sqrt{63}} > 0$

$\frac{4}{3} > \frac{2\sqrt{242}}{3\sqrt{63}}$

$4\sqrt{63} > 2\sqrt{242}$

$2\sqrt{63} > \sqrt{242}$

$4 \cdot 63 > 242$

$252 > 242$

$\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{242}}{3\sqrt{63}} > 0$

$\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{242}}{3\sqrt{63}} > 0$

$\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{242}}{3\sqrt{63}} < \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{242}}{3\sqrt{63}}

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $\sin\beta = \frac{4(R-1)}{2R}$

$\sin\beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{2R}$

$\sin\beta = 0$

$\frac{\sqrt{R-1}}{R}$ | $\frac{4(R-1)}{4R^2} + \frac{(R-1)^2}{R^2} = \frac{R-1}{R^2} + \frac{(R-1)^2}{R^2} = 1$

$R = 1 + (R-1)^2$

$R^2 = 1$

$R^2 - 4R + 4 + R - 1 = R^2$

$-3R + 3 = 0$

$3R = 3$

$R = 1$

$\triangle ABC$ — пр.

$\angle B = 50°$

$\frac{AC}{CB} = 7$

$R - 1 + R^2 - 4R + 4 = R^2$

$-3R + 3 = 0$

$R = 1$

$\cos\alpha = -1$

$\cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{1}$

$\sin\beta\cos\alpha = \frac{BC}{O_1B} \cdot \frac{O_1A}{O_1B} = \frac{BC\cos\beta}{O_1B} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$

$\frac{O_1A}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin\beta}$

$O_1A = 10\cos\beta$

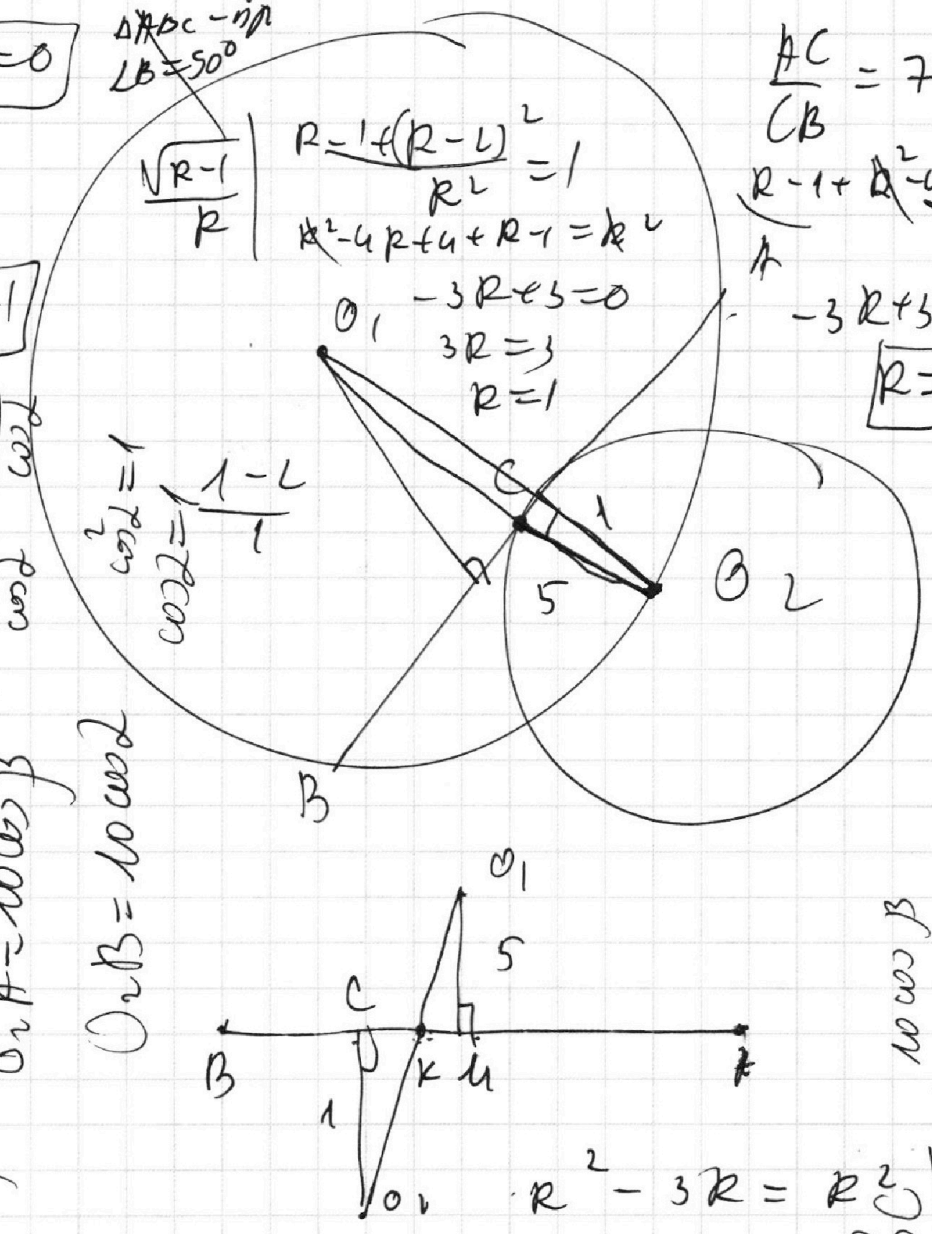
$O_1B = 10\cos\alpha$

$\frac{BC\cos\beta}{10\cos\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$

$\frac{BC^2}{10\cos\alpha}$

$R^2 - 3R = R^2$

$\frac{R^2 - 4R + 4 + R - 1}{R^2} = 1$



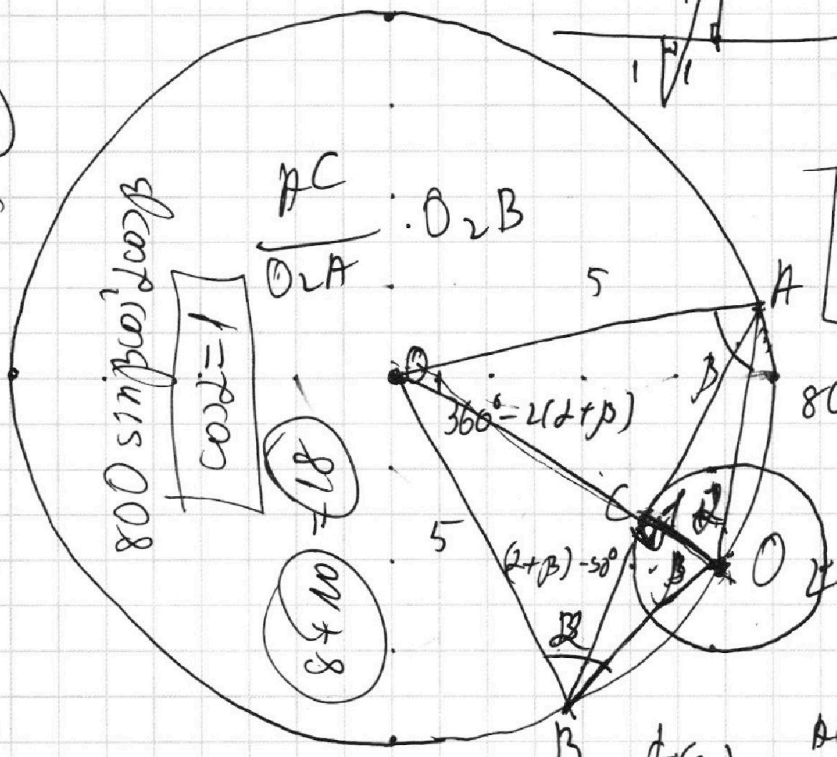
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

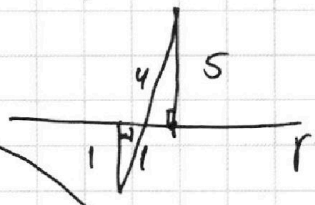
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.





$AB_1 - ?$

$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

$\frac{AC}{O_2A} \cdot O_2B$

$800\sin\beta\cos^2\alpha\cos\beta$

$\cos\alpha = 1$

$80\sin 2\alpha\cos\beta =$

$= 5(\cos 2\alpha\cos\beta - \sin 2\alpha\sin\beta)$

$16\sin 2\alpha\cos\beta = \cos 2\alpha\cos\beta - \sin 2\alpha\sin\beta$

$\frac{AB}{L} = 8\sin\beta\cos 2\alpha \cdot 10\cos\alpha\cos\beta$

$12 + 5 + 5$

$\frac{80}{30}\left|\frac{5}{16}\right.$

$\frac{\sin 2\cos\beta}{\sin\beta\cos 2} = 7$

$\frac{5}{\sin(2+\beta)} = \frac{AB}{\sin(2+\beta)}$

$AB = 10(\sin 2\cos\beta + \sin\beta\cos 2)$

$\frac{tg2}{tg\beta} = 7$

$tg2 = \frac{AC}{BC}$

$tg\beta = \frac{BC}{AC}$

$\frac{a}{b} = 7$

$a = 7b$

$a + b - ?$

$BC\cos\beta = \sin\beta$

$BC\cos 2\cos\beta$

$\frac{AC\cos 2\cos\beta}{7}$

$5 = \frac{AB}{\sin(2+\beta)}$

$\frac{AB}{L} = 50\sin(2+\beta)\cos 2\cos\beta$

$AB = 100\sin(2+\beta)\cos 2\cos\beta$

$800\sin 2\cos\beta\cos 2\cos\beta$

$80(\sin\beta\cos\beta)$

$\sin 2\cos 2 = \frac{\sin 2\cos\beta}{\cos 2\cos\beta}$