



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Пусть $a = 2^{d_a} \cdot 7^{\beta_a} \cdot A$, где d_a и β_a — неотрицательные
целые числа, $A \not\equiv 2$ и $A \not\equiv 7$; $b = 2^{d_b} \cdot 7^{\beta_b} \cdot B$, где d_b и β_b —
неотрицательные целые числа, $B \not\equiv 2$ и $B \not\equiv 7$; $c = 2^{d_c} \cdot 7^{\beta_c} \cdot C$,
где d_c и β_c — неотрицательные целые числа, $C \not\equiv 2$ и $C \not\equiv 7$.
Также A, B и C — натуральные числа. Иначе говоря:
 d_a, d_b и d_c — максимальные степени двойки, на которые
делятся a, b и c соответственно; $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ — максимальные
степени семерки, на которые делятся a, b и c соответственно.

Тогда $ab = 2^{d_a+d_b} \cdot 7^{\beta_a+\beta_b} \cdot AB$, где $AB \not\equiv 2$ и $AB \not\equiv 7$;
 $bc = 2^{d_b+d_c} \cdot 7^{\beta_b+\beta_c} \cdot BC$, где $BC \not\equiv 2$ и $BC \not\equiv 7$;
 $ac = 2^{d_a+d_c} \cdot 7^{\beta_a+\beta_c} \cdot AC$, где $AC \not\equiv 2$ и $AC \not\equiv 7$.

По условию: $\begin{cases} ab : (2^{14} \cdot 7^{10}) \Leftrightarrow [d_a+d_b \geq 14 \text{ и } \beta_a+\beta_b \geq 10] \\ bc : (2^{17} \cdot 7^{17}) \Leftrightarrow [d_b+d_c \geq 17 \text{ и } \beta_b+\beta_c \geq 17] \\ ac : (2^{30} \cdot 7^{37}) \Leftrightarrow [d_a+d_c \geq 30 \text{ и } \beta_a+\beta_c \geq 37] \end{cases}$

Таким образом: $\begin{cases} (d_a+d_b) + (d_b+d_c) + (d_a+d_c) \geq 14+17+30 = 51 \\ (\beta_a+\beta_b) + (\beta_b+\beta_c) + (\beta_a+\beta_c) \geq 10+17+37 = 64 \end{cases}$

$\begin{cases} 2(d_a+d_b+d_c) \geq 51 \\ 2(\beta_a+\beta_b+\beta_c) \geq 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_a+d_b+d_c \geq 25,5 \\ \beta_a+\beta_b+\beta_c \geq 32 \end{cases}$ Но $(d_a+d_b+d_c) \in \mathbb{Z}$ (*)
 $\Rightarrow \beta_a+\beta_b+\beta_c \geq 37$

* если $d_a+d_b+d_c \leq 25$, то противоречие. Значит
 $d_a+d_b+d_c \geq 26$

$abc = 2^{d_a+d_b+d_c} \cdot 7^{\beta_a+\beta_b+\beta_c} \cdot ABC \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

$2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 7^{17}$; $b = 2^9 \cdot 7^{11}$; $c = 2^{16} \cdot 7^{20}$

Пример: $a = 2^6 \cdot 7^{17}$; $b = 2^8$; $c = 2^{12} \cdot 7^{20}$ Тогда:

$ab = 2^{15} \cdot 7^{17}$, а $(2^{15} \cdot 7^{17}) : (2^{14} \cdot 7^{10})$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{20}$, а $(2^{17} \cdot 7^{20}) : (2^{17} \cdot 7^{17})$

$ac = 2^{17} \cdot 7^{20}$, а $(2^{17} \cdot 7^{20}) : (2^{30} \cdot 7^{37})$

abc

4) $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример на $abc =$

$a = 2^9 \cdot 7^{17}$; $b = 2^6$;

$c = 2^{11} \cdot 7^{20}$ Тогда:

1) $ab = (2^{15} \cdot 7^{17})$, то есть: $(2^{14} \cdot 7^{10})$

2) $bc = (2^{17} \cdot 7^{20})$, то есть: $(2^{17} \cdot 7^{17})$

3) $ac = (2^{20} \cdot 7^{37})$, то есть: $(2^{30} \cdot 7^{37})$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

По условию: $\text{НОД}(a; b) = 1$, иначе $\text{НОД}(a; b) = d > 1 \Rightarrow (d \in \mathbb{N})$
 $a = k_a d$ ($k_a \in \mathbb{N}; k_a < a$, т.к. $d \geq 2$) и $b = k_b d$ ($k_b \in \mathbb{N}; k_b < b$,
 т.к. $d \geq 2$) $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{k_a d}{k_b d} = \frac{k_a}{k_b}$. Противоречие.

Н. Пусть мы нашли натуральное m . Тогда $(a+b) \vdots m$ и $(a^2 - 6ab + b^2) \vdots m$. Заметим, что $a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab$.
 Так как $(a+b) \vdots m$, то $(a+b)^2 \vdots m$. По $((a+b)^2 - 8ab) \vdots m \Rightarrow$
 $\Rightarrow 8ab \vdots m$. Сразу отметим, что m — ~~целое~~ ^{натуральное} число, большее 1 (т.к. сократить на 1 — бессмысленное понятие, правильно «не сокращать»!).
 Предположим, что $\exists p$ — простое число: $a \vdots p$ и $m \vdots p$. Так как $(a+b) \vdots m \vdots p$, то $(a+b) \vdots p$. По $a \vdots p \Rightarrow b \vdots p \Rightarrow \text{НОД}(a; b) \vdots p$. По $p \geq 2$. Противоречие. Значит если $m \vdots p$, где p — простое число, то $a \nmid p$ и (аналогично) $b \nmid p$. Таким образом, $\text{НОД}(ab, m) = 1$, так как $\text{НОД}(a, m) = 1$ и $\text{НОД}(b, m) = 1$.
 Используем, что ^{натуральное} число, которое ≥ 2 , имеет х.д. 1 простой делитель.

Так как $8ab \vdots m$, а $\text{НОД}(ab, m) = 1$, то $8 \vdots m$. Таким образом, $m \leq 8$

Пример на $m=8$: $a=3$ и $b=53$. Тогда (поскольку 3 и 53 — различные простые числа) $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(3, 53) = 1$, то есть дробь $\frac{a}{b} = \frac{3}{53}$ несократима ($a=3 \in \mathbb{N}; b=53 \in \mathbb{N}$).

$$\text{Дробь на доске равна } \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{3+53}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 53+53^2} = \frac{56}{9-6 \cdot 159+2809} = \frac{56}{2848-954} = \frac{56}{1864} = \frac{7 \cdot 8}{233 \cdot 8} = \frac{7}{233+2}$$

Как видим, $233 \nmid 7$ (т.к. $2 \in (1; 6)$, т.е. $\neq 0$) $\Rightarrow$ дробь можно сократить максимум на 8.

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

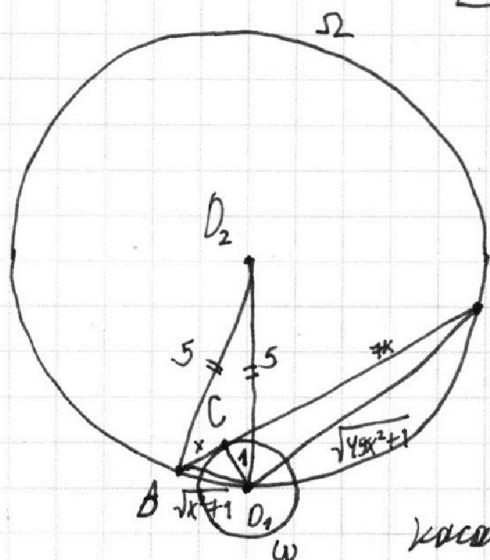
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3



Пусть $A = x$. По условию:

$$\frac{AC}{CB} = 7, \text{ omkryga } AC = 7x.$$

Пусть O_1 - центр ω ; O_2 - центр Ω .

$AB \neq \text{касается } \omega \Rightarrow$ (по свойству касательной к окружности)

$OC \perp AB \Rightarrow \Delta ACO_1$ и ΔBCO_1 —
равносторонние треугольники.

по мере необходимости: $BO_1 =$

$$= \sqrt{BC^2 + CO_1^2} = (m. k. CO_1 = R_{\Sigma=1} \text{ по условию})$$

касательной к окружности) $= \sqrt{x^2 + 1}$ и

$$A_{01} = \sqrt{AC^2 + C_1^2} = \sqrt{49x^2 + 1}$$

Рассмотрим $\triangle BO_2O_1$: он равнобедренный (т.к. $BO_2 = O_1O_2 = R_R = 5$; по признаку равнобедренного $\triangle$ -а), у него $BO_1 = \sqrt{x^2 + 1}$. Пусть M — середина BO_1 , то есть

$$BM = OM = \frac{BO_1}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2} \text{ по теореме}$$

равнобедренного Δ -а: D_2M — высота ΔBO_2O_1 , т.е.

$O_2M \perp BO_1$, т. е. $O_2M \perp BM$, т. е. ΔBO_2M прямоугольный. Значит $BM = BO_2 \cdot \sin \angle BO_2M \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} = \frac{1}{2} \text{ (по свойству равнобедренного)}$$

$$\Delta - a: D_2 M - \text{биссектриса } \angle BO_2 O_1, \text{ т.е. } \angle BO_2 M =$$

$$= \angle MD_2D_1 = \frac{\angle BD_2O_1}{2}) S \cdot \sin \frac{\angle BD_2O_1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \text{no}$$

свойству вписанного угла: $\angle BAO_1 = \frac{\angle BO_2O_1}{2}$ $10 \cdot \sin \angle BAO_1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = (\angle CAO_1 = \angle BAO_1, \text{ m.k. } C \in AB) \text{ to } \sin \angle CAO_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 10 \frac{CO_1}{AO_1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}$$

$$\bullet \sqrt{49x^2+1} = 10 \Leftrightarrow (x^2+1 \geq 1 > 0 \wedge 49x^2+1 \geq 1 > 0) \quad (x^2+1)(49x^2+1) =$$

$$= 100 \Leftrightarrow 49(x^2)^2 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow (49(x^2)^2 + 99x^2) - (49x^2 + 99) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow (49x^2 + 99)(x^2 - 1) = 0. \text{ Так как } 49x^2 + 99 \geq 99 > 0, \text{ то } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x > 0) \quad x = 1 \Leftrightarrow BC = 1 \Rightarrow AB = BC + AC = x + 7x = 8x = 8 \quad \boxed{\text{Daher: } AB = 8}$$

Umbern: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+1} + (2-7x) - \sqrt{2x^2-5x+3} = 2-7x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \Leftrightarrow (a = \sqrt{2x^2+2x+1}; b = 2-7x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b} - a = b \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b} = a+b$$

Отметим, что по ДДЗ: $a^2+b \geq 0$ и $a+b \geq 0$. А из последнего равенства получаем:

$$\begin{cases} a+b \geq 0 \\ a^2+b = a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow b^2+2ab-b=0 \Leftrightarrow b(b+2a-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \Leftrightarrow 2-7x=0 \Leftrightarrow x=3,5 \text{ (с.г.д.е.)} \\ b+2a-1=0 \Leftrightarrow 2a=1-b \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 1-(2-7x) = 7x-1, \end{cases}$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} 7x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{7} \\ 4(2x^2+2x+1) = 49x^2-14x+1 \Leftrightarrow 8x^2+8x+4 = 49x^2-14x+1 \Leftrightarrow 41x^2-22x-3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D' = \left(\frac{-22}{2}\right)^2 - 41 \cdot (-3) = 121 + 123 = 244 (>0) \Rightarrow x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{244}}{2 \cdot 41} = \frac{11 \pm \sqrt{61}}{41} \text{ (с.г.д.е.)}$$

Итак, получили 3 корня: $x_1 = 3,5$; $x_2 = \frac{11-\sqrt{61}}{41}$; $x_3 = \frac{11+\sqrt{61}}{41}$.

Отметим, что $2x^2+2x+1 = 2(x^2+2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2) + 0,5 = 2(x+\frac{1}{2})^2 + 0,5 \geq 0,5 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a$ всегда имеет смысл. Достаточно проверить, что $a^2+b \geq 0$ и $a+b \geq 0$.

При $x_1 = 3,5$: $x = 3,5$; $a = \sqrt{2(3,5+0,5)^2+0,5} = \sqrt{32,05}$ и $b = 2-7 \cdot 3,5 = -22,5$. Тогда $a+b = \sqrt{32,05} - 22,5 < \sqrt{36} - 22,5 = 6 - 22,5 = -16,5 < 0$ (н.р.)

При $x = \frac{11-\sqrt{61}}{41}$: $b = 2-7 \cdot \frac{11-\sqrt{61}}{41} = \frac{82-77+24\sqrt{61}}{41} = \frac{5+24\sqrt{61}}{41}$ и

$a = \sqrt{2\left(\frac{11-\sqrt{61}}{41} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{22-4\sqrt{61}+41}{82}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= \sqrt{\frac{2}{8^2} (65 - 4\sqrt{61})^2 + \frac{1}{2}} =$$

значит $x_1 \neq 3,5$ — НЕ решение.

Заметим, что $2x^2 - 5x + 3 = (2x^2 - 3x) - (2x - 3) = (2x - 3)(x - 1)$

При $x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$: $(2x - 3)(x - 1) = \left(\frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{41} - 3\right) \left(\frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} - 1\right) =$

$$= \frac{-101 \pm 4\sqrt{61}}{41} \cdot \frac{-30 \pm 2\sqrt{61}}{41} = \frac{8 \cdot 61 \pm (-30 \cdot 4 - 101 \cdot 2)\sqrt{61} + 3030}{41^2} =$$

$$= \frac{3518 \pm 322\sqrt{61}}{41^2}. \text{ Заметим, что } 3518 > 322\sqrt{61} \text{ (т.к.}$$

$$322 \cdot \sqrt{61} < 322 \cdot \sqrt{100} \text{ (} 61 < 100 \text{)} = 3220 < 3518) \Rightarrow -322\sqrt{61} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \text{ при } x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}, \text{ т.е. } a^2 + b \geq 0.$$

Осталось проверить, что $a + b \geq 0 \Leftrightarrow$ при $x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$:

$$b = 2 - 7 \cdot \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} \Leftrightarrow a \geq -b \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 7x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{7} \\ 7x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \geq 49x^2 - 28x + 4 \Leftrightarrow 47x^2 - 30x + 3 \leq 0. \text{ Корни} \end{cases}$$

интервала $x_{1,2} = \frac{-(-\frac{30}{2}) \pm \sqrt{(\frac{30}{2})^2 - 47 \cdot 3}}{47} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 141}}{47} =$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{84}}{47} = \frac{15 \pm 2\sqrt{21}}{47} \Rightarrow x \in \left[\frac{15 - 2\sqrt{21}}{47}, \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \right]$$

$$\frac{15 - 2\sqrt{21}}{47} \geq \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15 - 2\sqrt{21} \geq 14 \text{ (меньше)}$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \geq \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15 + 2\sqrt{21} \geq 14 \text{ (меньше, т.к. } 2\sqrt{21} < 2\sqrt{25} \text{ (} 21 < 25 \text{))} =$$

Таким образом, $x \leq \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \leq 2$

$$\frac{15 - 2\sqrt{21}}{47} \geq \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15 - 2\sqrt{21} \geq 14 \text{ (меньше, т.к. } 2\sqrt{21} > 14 \text{ (} 21 > 15 \text{))}$$

$$\frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \geq \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15 + 2\sqrt{21} \geq 14 \text{ (больше)} \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{7}, \frac{15 + 2\sqrt{21}}{47} \right].$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Итак, $x_1 \leq \frac{15+2\sqrt{21}}{47}$

Пусть $x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ — корень. Тогда:

$$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} \leq \frac{15+2\sqrt{21}}{47} \Leftrightarrow 517 - 94\sqrt{61} \leq (410+205) + 41\sqrt{21} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 47\sqrt{61} + 49 + 41\sqrt{21} \text{ (выполняется)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \text{ — корень.}$$

Пусть $x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ — корень. Аналогично $47\sqrt{61} \leq 49 +$

$+41\sqrt{21}$. Но $49+41\sqrt{21} > 49+41\sqrt{16} \text{ (} 21 > 16 \text{)} =$

$= 49 + 41 \cdot 4 = 213$. А $47\sqrt{61}$

$$\Leftrightarrow 47^2 \cdot 61 \leq 49^2 + 41^2 \cdot 21 + 2 \cdot 49 \cdot 41 \cdot \sqrt{21} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{21} \geq 4,5 \text{ т.к. } 21 \geq 20,25 \Rightarrow 49+41\sqrt{21} \geq 49+41 \cdot 4,5 =$$

$= 233,5$. Но $47\sqrt{61} \leq 47 \cdot 7,5 \text{ (т.к. } 61 > 56,25 \text{)} =$

$= 329 + 23,5 = 352,5$. $49+41\sqrt{21} \leq 49+41 \cdot 5 \text{ (т.к. } 21 < 25 \text{)} =$

$= 49 + 205 = 254$. И $254 < 352,5$. Значит $47\sqrt{61} >$

$> 49 + 41\sqrt{21} \text{ (} 2 \text{)} \Rightarrow x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41} \text{ — НЕ корень.}$

Таким образом, единственный корень уравнения —

это $x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

Ответ: $\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

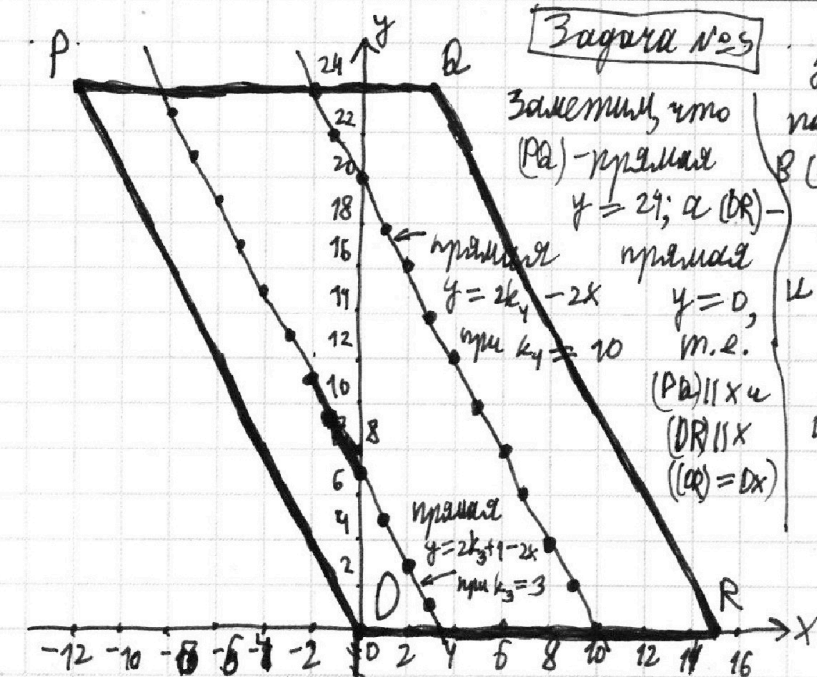
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5

Заметим, что

(PQ) — прямая

$y = 2x$; а (OR) —

прямая

$y = 0$, т.е.

$(PQ) \parallel x$

$(OR) \parallel x$

$(OQ) = (PR)$

Нужно посчитать кол-во пар точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ таких, что x_1, x_2, y_1, y_2 — целые числа,

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12$$

что представляет

из себя множество

точек $2x + y = z$, где

z — целое число?

Это прямая $y = z - 2x$.

А что из себя

представляют

прямые (PO) и (QR) : Подберем значения для (PO) : пусть это прямая $y = k_1 x + b_1$. Тогда:

$$\begin{cases} k_1 \cdot 0 + b_1 = 0 \\ k_1 \cdot (-12) + b_1 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 = 24 + 12k_1 \end{cases} \Rightarrow -12k_1 = 24 \Rightarrow k_1 = -2 \Rightarrow (PO) \text{ — это прямая } y = -2x \text{ (здесь } z=0).$$

Аналогично (QR) — это прямая $y = k_2 x + b_2$:

$$\begin{cases} k_2 \cdot 15 + b_2 = 0 \\ k_2 \cdot 3 + b_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = -15k_2 \\ b_2 = 24 - 3k_2 \end{cases} \Rightarrow 24 - 3k_2 = -15k_2 \Rightarrow 12k_2 = -24 \Rightarrow k_2 = -2 \Rightarrow b_2 = 30 \Rightarrow (QR) \text{ — это прямая } y = 30 - 2x \text{ (здесь } z=30).$$

Пусть (x_2, y_2) лежит на прямой $y = z_2 - 2x$, а точка (x_1, y_1) лежит на прямой $y = z_1 - 2x$. Здесь z_1, z_2 — целые числа, при этом $z_1 \in [0; 30]$ и $z_2 \in [0; 30]$. Тогда

$$z_2 - z_1 = 12 \Leftrightarrow z_2 = z_1 + 12 \Rightarrow z_1 + 12 \in [0; 30] \Leftrightarrow z_1 \in [-12; 18] \Rightarrow z_1 \in [0; 18] \Rightarrow z_2 \in [12; 30].$$

Заметим, что при $y = z$ прямая $y = z - 2x$ параллельна PO и QR , т.к. коэффициенты при x в $y = z - 2x$, $y = -2x$ и $y = 30 - 2x$ одни и те же. Таким образом, если $z = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$ и $k \in [0; 14]$), то

параллелограммы лежат точки с целыми координатами: $(0, 1), (1, -1), (2, -3), \dots, (k, -2k), \dots, (14, -28)$.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



координатами $((x-i); (1+2i))$, где $i \in \mathbb{Z}$ и $i \in [0; 11]$. Действи-
тельно, если $1+2i \in [0; 24]$, то $i \in [-0,5; 11,5] \Rightarrow i \in [0; 11]$,
ведь $i \in \mathbb{Z}$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$ и $x-i$

координатами $(x; 2k_3+1-2x)$, где. Поскольку $L \parallel PO$ и
 $L \parallel PA$ L задается уравнением $y = z - 2x$, то
проверку на x делать не нужно: нужно сделать
проверку на ординату: $(2k_3+1-2x) \in [0; 24] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (2x - 2k_3 - 1) \in [-24; 0] \Leftrightarrow 2x \in [2k_3-23; 2k_3+1] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in [\underbrace{k_3-11,5}_{(k_3-12; k_3-11)}; \underbrace{k_3+0,5}_{(k_3; k_3+1)}] \Rightarrow x \in [\underbrace{k_3-11}_{\mathbb{Z}}; \underbrace{k_3}_{\mathbb{Z}}]$.

Получаем на L 12 точек, разрешённых по условию.
(и кстати, не лежащих на границе)

Если $z = 2k_4 - 2x$ * $2k_3+1 \in [0; 30] \Leftrightarrow k_3 \in [-0,5; 14,5] \Rightarrow$
 $\Rightarrow k_3 \in [0; 14]$

Если $z = 2k_4 - 2x$ ($k_4 \in \mathbb{Z}$; $2k_4 \in [0; 30] \Leftrightarrow k_4 \in [0; 15]$), то
в параллелограмме (возможно, на границе) лежат
точки с целыми координатами $(x; 2k_4-2x)$. Аналогично
 $(2k_4-2x) \in [0; 24] \Leftrightarrow 2x - 2k_4 \in [-24; 0] \Leftrightarrow x \in [k_4-12; 0]$.

Получаем на L 13 точек, разрешённых по условию.

Итак, получаем, что на прямой $y = -2x$; $y = 2-2x$; ...; $y = 30-2x$
лежат по отдельности ровно 13 разрешённых
точек, а на каждой из 5 прямых $y = 1-2x$; $3-2x$; ...;
 $y = 29-2x$ по отдельности лежат ровно 12 разрешённых
точек. Заметим, что из $z_2 - z_1 = 12$ следует, что
(т.к. $z_1 \in \mathbb{Z}$ и $z_2 \in \mathbb{Z}$) z_1 и z_2 одной чётности (или
оба чётные, или оба нечётные). Как подходят пары вида
 $(2j; 2j+12)$, где $j \in [0; 9]$ (т.к. $z_1 \in [0; 18]$), I вида $(2m+1; 2m+13)$, где
 $m \in [0; 8]$ (т.к. $z_1 \in [0; 18]$, то $2m+1 \in [0; 18] \Leftrightarrow m \in [-0,5; 8,5] \Rightarrow m \in [0; 8]$).
Пар I вида 10; пар II вида 9. По структуре пар, в каждой из
пар z_1 и z_2 I вида есть ровно $13^2 = 169$ внутренних пар A и B, а
в каждой из пар z_1 и z_2 II вида - ровно $12^2 = 144 \Rightarrow$ всего внутренних
пар A и B $169 \cdot 10 + 144 \cdot 15 = (170-1) \cdot 10 + 72 \cdot 30 =$
 $= 338 \cdot 10 + 72 \cdot 30 = 2704 + 2160 = 4864$

Ответ: 4864

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

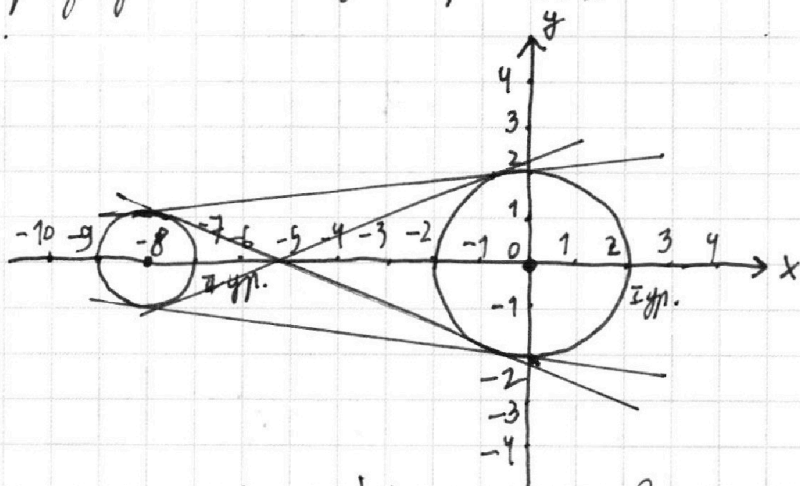
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 < 0 & (2) \end{cases}$$

$$U_1(1): y = ax + 10b$$

$$U_2(2): (x+8)^2 + y^2 > 1$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 > 1^2 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 1^2 \\ x^2 + y^2 > 2^2 \end{cases}$$

Построим графики уравнений $(x+8)^2 + y^2 = 1^2$ (окружность радиусом 1 в центре $(-8; 0)$) и $x^2 + y^2 = 2^2$ (окружность радиусом 2 в центре $(0; 0)$):



Система 2 задаёт множество точек, лежащих или в окружности I уравнения (или на границе), или в окружности II уравнения (или на границе).

Заметим, что $\sqrt{}$ прямая в координатной плоскости пересекает круг (сейчас имеется ввиду не круг, а не окружность, то есть круг — это окружность + все точки внутри неё) или в 0 точках (●), или в 1 точке (⊙), или в ∞ множестве точек (⊖). Тогда посмотрим, сколько всего решений в зависимости от того, как пересекает прямая $y = ax + 10b$ (1)

2 круга (и, вообще, окружности, которые их задают). Как видим из таблицы справа, как подходящий случай только при касании обоих кругов, то есть обеих окружностей.

ка-во т.п.с ка-во т.п.с	0	1	∞
0	0	1	∞
1	1	2	∞
∞	∞	∞	∞

Таким образом, нужно найти уравнения всех касательных прямых, касающихся обеих окружностей.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найти все пары (a, b) , для которых каждая из систем уравнений

$$\text{I} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1^2 \\ y = ax + 10b \end{cases} \text{ и } \text{II} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ y = ax + 10b \end{cases} \text{ имеют ровно 1 решение.}$$

Подставим y из второго уравнения в первое (а в I системе, а во II системе). Получим систему уравнений:

$$(x+8)^2 + (ax+10b)^2 = 1^2$$

$$\text{I) } (x+8)^2 + (ax+10b)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 16x + 64 + (a^2x^2 + 20abx + 100b^2) = 1 \Leftrightarrow x^2(a^2+1) + x(20ab+16) + (100b^2+63) = 0$$

$$D_I' = \left(\frac{20ab+16}{2}\right)^2 - (a^2+1)(100b^2+63) = 4(5ab+4)^2 - (100a^2b^2 + 63a^2 + 100b^2 + 63) = 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 = 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1$$

$$\text{II) } x^2 + (ax+10b)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + (a^2x^2 + 20abx + 100b^2) = 4 \Leftrightarrow x^2(a^2+1) + 20abx + (100b^2-4) = 0$$

$$D_{II}' = \left(\frac{20ab}{2}\right)^2 - (a^2+1)(100b^2-4) = 100a^2b^2 - (100a^2b^2 + 100b^2 - 4a^2 - 4) = 4a^2 - 100b^2 + 4$$

Заметим, что для $\forall x \in (-\infty, +\infty)$: $\exists$ единственный y : $y = ax + 10b$. Если $y_1 = y_2$, то $ax_1 + 10b = ax_2 + 10b$. Значит:

$$\begin{cases} D_I' = 0 \Leftrightarrow 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0 \\ D_{II}' = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 160ab - 63a^2 - 100b^2 + 1 = 0 \\ -(4a^2 - 100b^2 + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 160ab - 67a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{67a^2 + 3}{160a}. \text{ Подставим } b \text{ в нижнее уравнение: } 4a^2 - 100 \cdot \left(\frac{67a^2 + 3}{160a}\right)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 100 \cdot \frac{67^2a^4 + 402a^2 + 9}{256a^2} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1024a^2 - 100 \cdot \frac{67^2a^4 + 402a^2 + 9}{256a^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow 1024a^2 - 402 - \frac{4015}{a^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow 1024a^4 - 4015a^2 - 402 = 0 \Leftrightarrow 1024t^2 - 4015t - 402 = 0 \Leftrightarrow D = 4015^2 + 4 \cdot 1024 \cdot 402 = 1615^2 \Rightarrow D = 1615$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 1024a^4 - (3600 + 840 + 49)a^2 - 402a^2 - 9 + 622a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1024 - 4489)a^4 + 622a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow D' = \left(\frac{-622}{2}\right)^2 - 9 \cdot 3465 = 311^2 - 31185 =$$

$$= 58815 + 6600 + 121 = 65536 = 4 \cdot 16384 = 4 \cdot 4 \cdot 1024 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 32^2 = 8^2 \cdot 32^2 = 256^2 (> 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{-(-622) \pm 256}{2 \cdot 3465} = \frac{311 \pm 256}{3465} = \left\{ \frac{55}{3465}, \frac{567}{3465} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{63}, \frac{9}{55} \right\} \Rightarrow a \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{63}}, \frac{3}{\sqrt{55}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{3^2 \cdot 7}, \frac{3}{5 \cdot 11} \right\} \Rightarrow a^2 \in \left\{ \frac{1}{7 \cdot 21^2}, \frac{9}{55 \cdot 55^2} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left\{ -\frac{\sqrt{7}}{21}, -\frac{3\sqrt{55}}{55}, \frac{3\sqrt{55}}{55}, \frac{\sqrt{7}}{21} \right\} \left(\frac{\sqrt{7}}{21} < \frac{3\sqrt{55}}{55}, \text{ м.к.} \right)$$

$$\sqrt{55} < 9\sqrt{7}, \text{ м.к. } \sqrt{55} < \sqrt{64} \quad (55 < 64) = 8 < 9 < 9\sqrt{7} \quad (\text{м.к. } 7 > 1)$$

Получаю (как видишь, никакое $a \neq 0$) ищем в каждом случае по формуле, введенной ранее. Здесь это делать не будем.

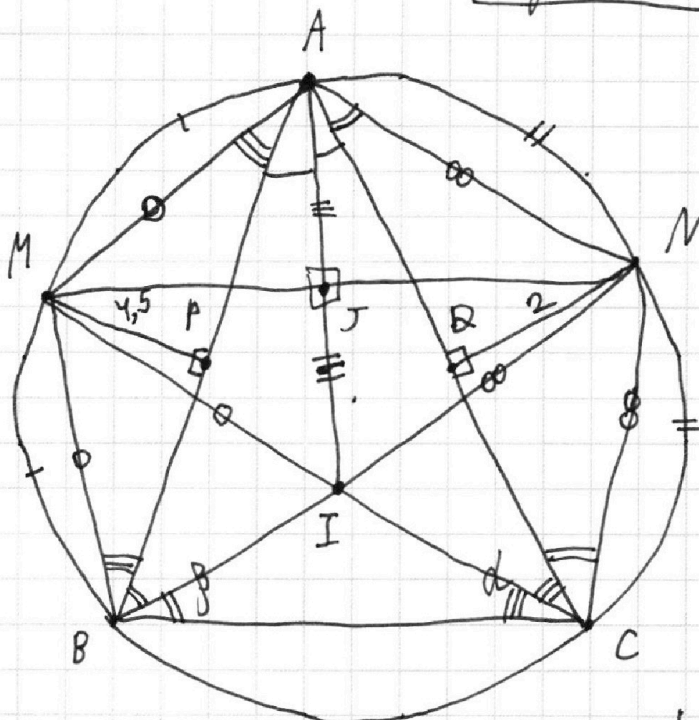
Ответ: $-\frac{3\sqrt{55}}{55}, -\frac{\sqrt{7}}{21}, \frac{\sqrt{7}}{21}, \frac{3\sqrt{55}}{55}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №7



Пусть $MP \perp AB$ и $NQ \perp AC$, при этом $P \in AB$ и $Q \in AC$.

По условию:

$MP = 4,5$ и $NQ = 2$.

По теореме, обратной *
теореме о трезубке:

CM — биссектриса $\angle ACB$, а

BN — биссектриса $\angle ABC$.

По свойству вписанной
окружности: I — центр
окружности, вписанной
в $\triangle ABC$, где $I = BN \cap CM$.

По лемме о трезубке:

~~$MA = MB = MI$~~ и

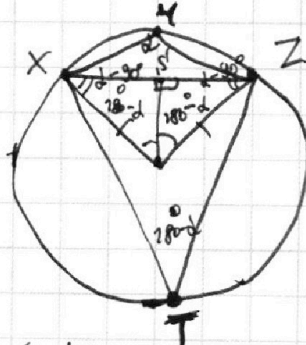
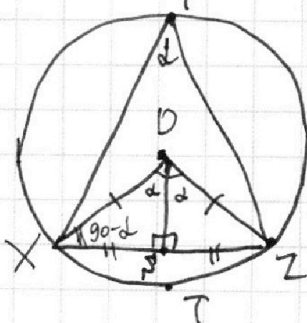
$NA = NC = NI$.

* так как дуги MB и MA равны, то
дуги $\cap MB = \cap MA$ ($\cap$ — дуга), то
 $MB = MA$. Аналогично $AN = NC$.

По признаку дельтоида

($AM = MI$ и $AN = NI$):

$AMIN$ — дельтоид $\Rightarrow$ (по свойству дельтоида) $AJ \perp MN$ и
($J = AI \cap MN$) $AJ = JI = \frac{AI}{2} \Rightarrow AI = 2AJ$



Заметим, что (см. слева)
 $XZ \perp YZ$ и при $\alpha \in$
 $\in (0^\circ; 90^\circ)$, и при $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$
и при $\alpha = 90^\circ$ (тогда XZ —
диаметр).

Значит:

$$OS = R \sin |90^\circ - \alpha|$$

$$R \cos \alpha \mid R \sin (90^\circ - \alpha).$$

Далее решаем,

получим $AJ \Rightarrow$ и ответ.

$$\frac{\sin |90^\circ - \alpha|}{4,5} = \frac{\sin (90^\circ - \beta)}{2} = \frac{\sin |90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}|}{AJ}$$

предполагая, что:

1) $\alpha < 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$

2) $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ и $\frac{\alpha + \beta}{2} > 90^\circ$

3) $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ и ...



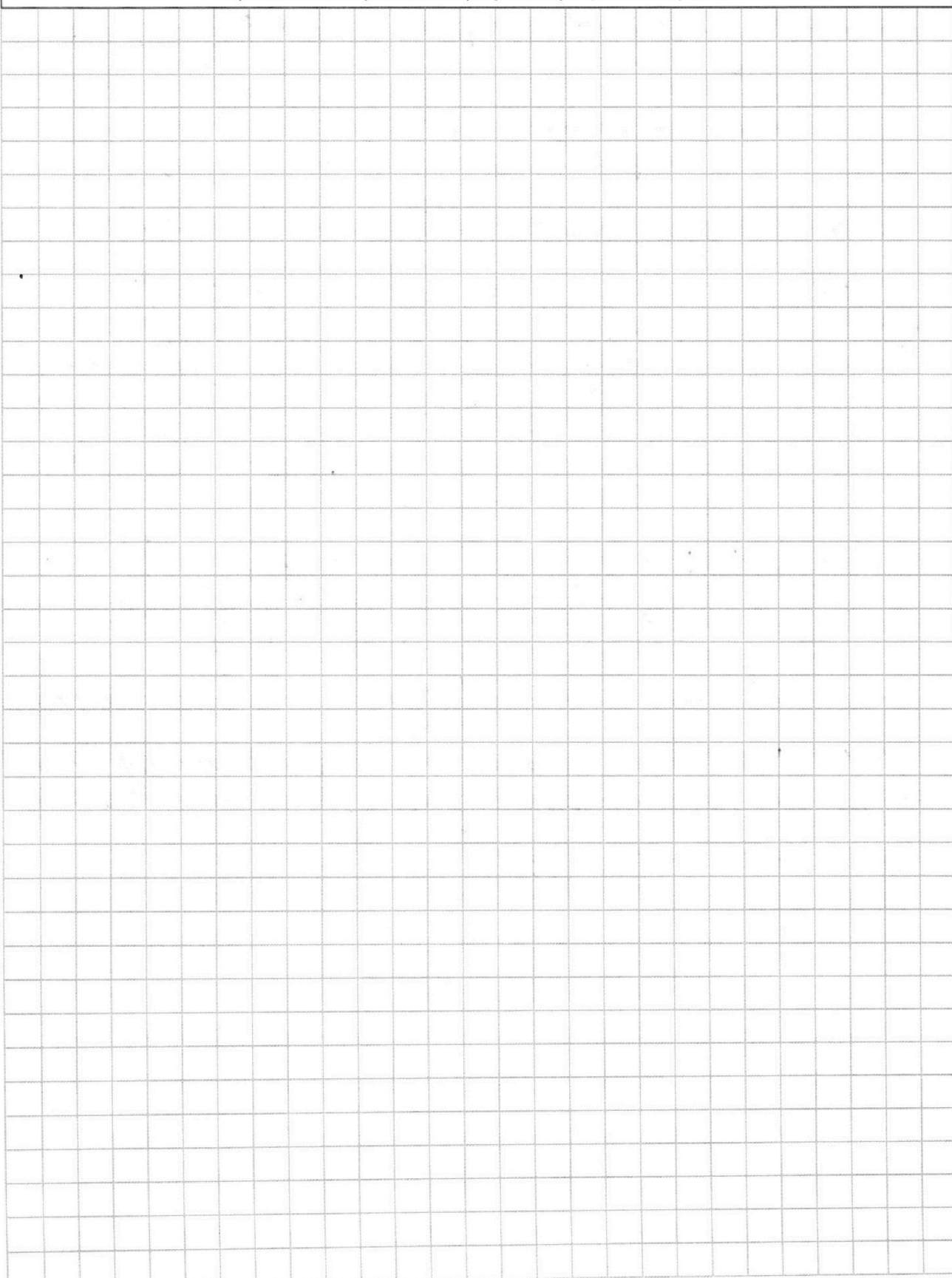
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

