



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{20}, \quad m, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = k \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Полога:

$$abc = \sqrt{2mnk} \cdot \sqrt{2^{50} \cdot 7^{84}} = \sqrt{2mnk} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

Наименьшее значение  $abc$  будет достигаться тогда и только тогда, когда  $\sqrt{2mnk}$  минимально. Заметим, что

$$\sqrt{2mnk} \in \mathbb{Z} \text{ и } \sqrt{2mnk} \neq 1 \text{ (в этом случае, см}$$

$2mnk=1$ , но  $mnk=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ). Тогда  $mnk=2$ :

$$\sqrt{2mnk} = 2. \text{ Если } n=1, m=1, k=2, \text{ то } mnk=2 \text{ и}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{32} \text{ - минимальное значение}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{32}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.  $\text{НОД}(a; b) = 1$  — по условию

Пусть  $\begin{cases} a \equiv -b \\ (a+b)^2 - 8ab \equiv 0 \end{cases} \pmod{m}$ . Тогда  $8ab \equiv 0 \pmod{m}$ .

$$\begin{cases} a \equiv -b \\ 8ab \equiv 0 \end{cases} \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} 8a^2 \equiv 0 \\ 8b^2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{m}$$

Поскольку числа  $a$  и  $b$  взаимно просты, то и  $a^2$ ,  $b^2$  взаимно просты. Тогда  $8 \equiv 0 \pmod{m}$ , а значит  $m = 8$  — наибольшее значение  $m$ .

Пример:  $a = 5$  и  $b = 3$  :  $\begin{cases} 8 \equiv 0 \\ -56 \equiv 0 \end{cases} \pmod{8}$ .

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

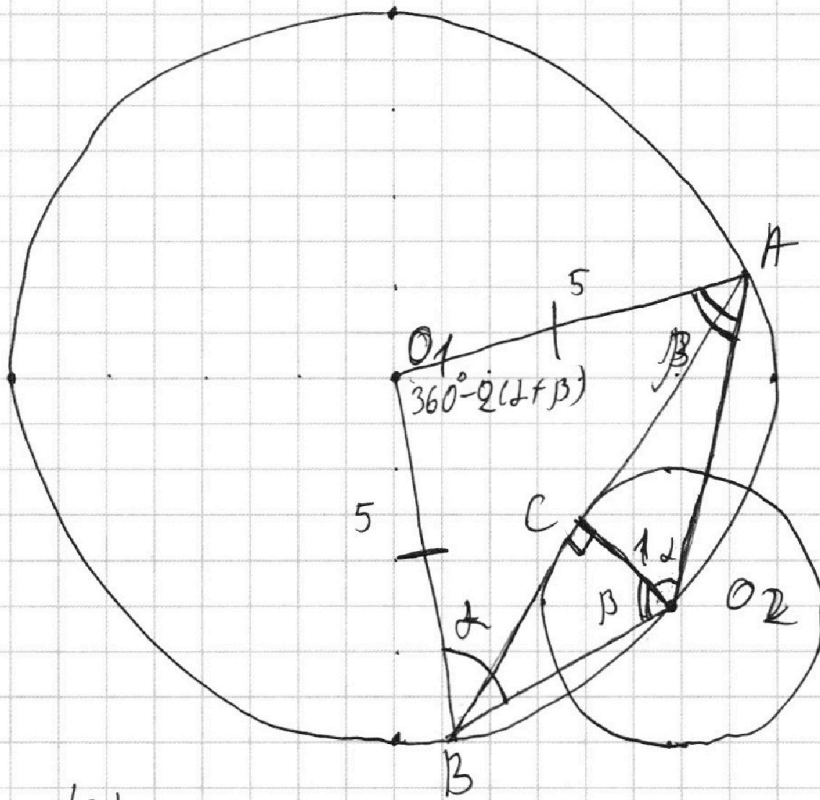
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$\frac{AC}{CB} = 7$   
 $r=1, R=5$   
 $AB=?$   
 $O_2C \perp AB$   
 $O_2C = 1 = r$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{ts2}{t\beta} = 7$$

$$\sin 2 \cos \beta = 7 \sin \beta \cos 2$$

По теореме синусов:  $AB = 10(\sin 2 \cos \beta + \sin \beta \cos 2) =$

$$= 80 \sin \beta \cos 2 ; \quad \boxed{AB = 80 \sin \beta \cos 2}$$

$$\angle O_1 B O_2 = 2 + \beta - 90^\circ + 90^\circ + \beta = 2, \quad \angle O_1 A O_2 = \beta$$

$$O_1 O_2 = O_1 A = O_2 B = 5 \Rightarrow \triangle O_1 A O_2 \text{ и } \triangle O_1 B O_2 -$$

равнобедренные с углами  $2$  и  $\beta$  при основаниях соответственно. Тогда  $O_2 A = 10 \cos \beta, O_2 B = 10 \cos 2$ .

Заметим, что  $BC \sin 2 = B$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Заметим, что~~  $\frac{\sin \beta}{BC} = \cos \alpha$

Заметим, что  $\frac{\sin \beta}{BC} = \cos \beta$ .

Получим:

~~$AB = 80 BC \cos \alpha \cos \beta$~~

~~Так как  $\cos \alpha = \frac{1}{0,2A} = \frac{1}{10 \cos \beta}$ , то~~

~~$AB = 8 \cos \beta$~~

~~$80 \sin \beta \cos \alpha = \frac{80 BC}{0,2A \cdot 0,2B} = \frac{80 BC}{100 \cos \alpha \cos \beta} = AB$~~

~~$\frac{80}{100 \cos \alpha \cos \beta} - 1 = 7 \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} =$~~

~~$= (0,2A \cdot 0,2B) \Leftrightarrow 0,2A \cdot 0,2B = \frac{25}{2}$~~

~~$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 0,2A \cdot 0,2B = 10$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \text{ Замена: } \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b \geq 0 \end{cases}$$

Положим:

$$a = b \Rightarrow \begin{cases} a = b & (1) \\ a = -b & (2) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} -5x + 3 = 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$$

(2):  $a = -b$ . Так как  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ , то

$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$ . Но эти два квадратных уравнения равны  $\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$  и при этом при  $x = \frac{2}{7}$   $2x^2 - 5x + 3 \neq 0$ . Значит уравнение  $a = -b$  не имеет ни одного корня.

Ответ:  $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

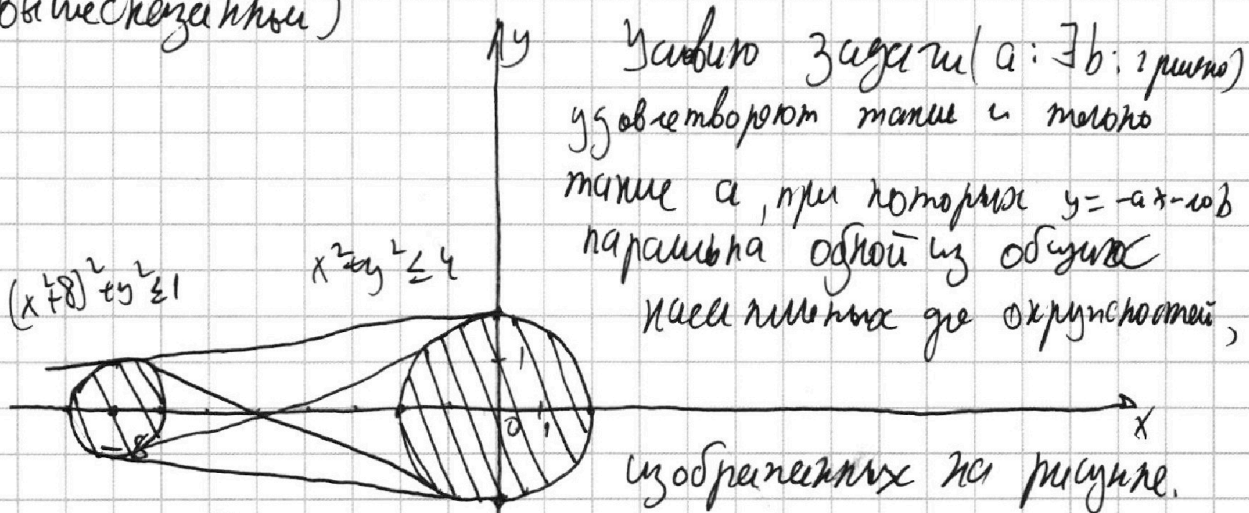
6. 
$$\begin{cases} y = -ax - 10b; & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0; & (2) \end{cases} \quad a: \exists b: 2 \text{ решения}$$

(1) - прямая

(1) - множество из окружности с центром в точке  $(-8; 0)$  радиуса 1 и окружности

(2) - множество, состоящее из круга с окружностью с центром  $(-8; 0)$  радиуса 1 и круга с окружностью с центром  $(0; 0)$  радиуса 2 (рассматриваю

случаи, когда  $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$ , а  $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$  и  $(x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0$  и  $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$  убеждаюсь в  
вышесказанном)



Здесь изображены две внешние и две внутренние касательные к окружностям.

лист 1.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$l: y = kx + b$  - общая касательная к окружностям

Пусть:

$$x^2 + (kx + b)^2 = 4$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 4$$

$(k^2 + 1)x^2 + 2bkx + b^2 - 4 = 0$ ; единственные решения

$$D_1 = b^2 k^2 - (k^2 + 1)(b^2 - 4) = b^2 k^2 - b^2 k^2 + 4k^2 - b^2 + 4 = 4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$(x+8)^2 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 1$ ; единственные решения

$$x^2 + 16x + 64 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 1 = 0$$

$$(1+k^2)x^2 + 2(bk+8)x + 63+b^2 = 0$$

$$D_1 = (bk+8)^2 - (63+b^2)(1+k^2) =$$

$$= b^2 k^2 + 16bk + 64 - 63 - 63k^2 - b^2 - b^2 k^2 =$$

$$= -63k^2 - b^2 + 16bk + 1 = 0$$

$$63k^2 + b^2 - 16bk - 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4k^2 - b^2 + 4 = 0 \\ 63k^2 + b^2 - 16bk - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 256k^2 - 64bk + 3b^2 = 0 \quad | : b^2$$

$$256\left(\frac{k}{b}\right)^2 - 64\left(\frac{k}{b}\right) + 3 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{k}{b} = \frac{1}{16} \\ \frac{k}{b} = \frac{3}{16} \end{array} \right.$$

Мет. 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 16k:$$

$$4k^2 - (16k)^2 + 4 = 0$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} - \text{уменьшой}$$

по формулам касательной  
к окружностям

$$b = \frac{16}{3}k$$

$$4k^2 - \frac{256}{9}k^2 + 4 = 0$$

$$36k^2 - 256k^2 + 36 = 0$$

$$220k^2 = 36$$

$$k = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}, a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Мет. 3

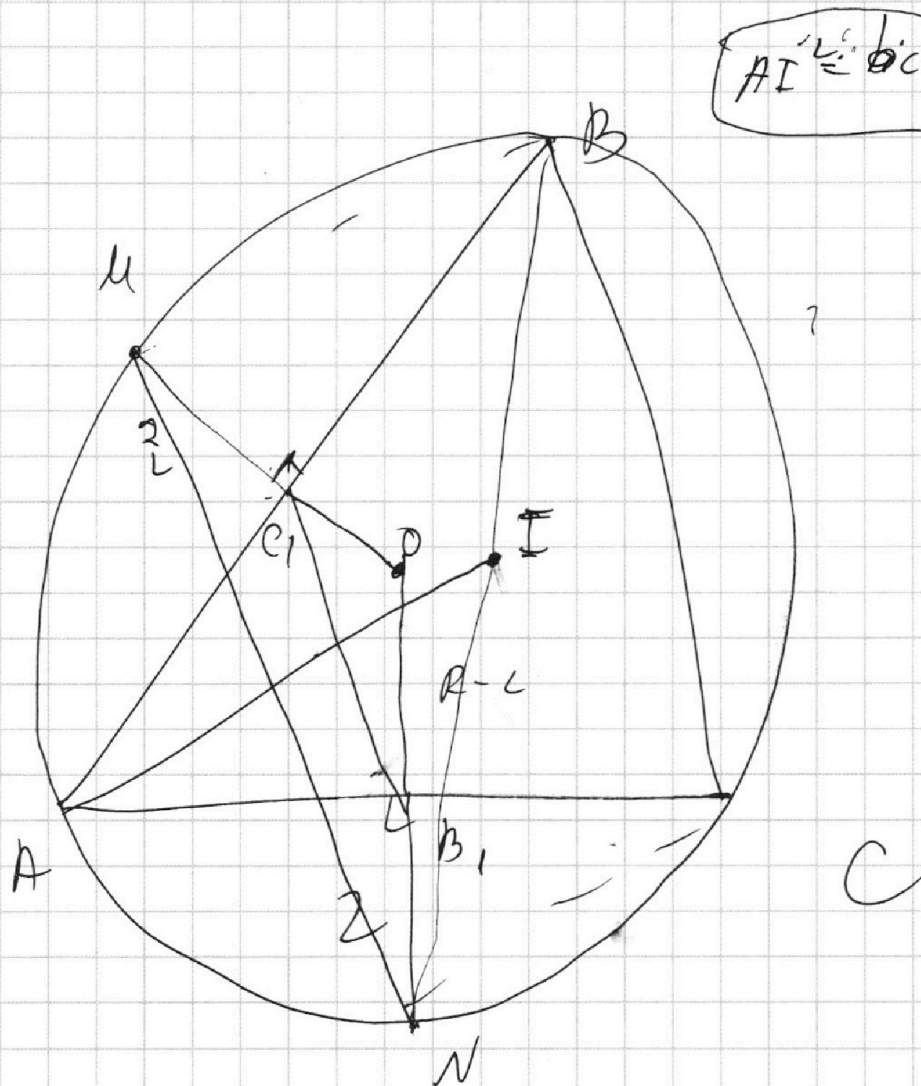
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \beta = \frac{R-L}{R}$$

$$\cos \gamma = \frac{R-\frac{9}{2}}{R} = \frac{2R-9}{2R}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{R^2 - (R-L)^2}}{R} = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{4R^2 - 4R^2 + 36R - 81}}{2R} = \frac{\sqrt{36R - 81}}{2R}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha = -\cos(\beta + \gamma) = \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma =$$

$$= \frac{\sqrt{(36R-81)(R-1)}}{R^2} - \frac{(R-1)(2R-9)}{2R^2}$$

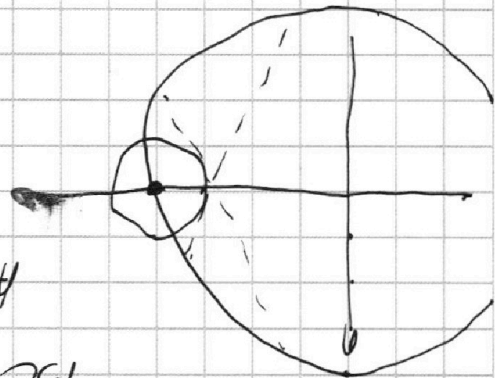
$$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \quad \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos^2 \beta = \frac{200}{8}$$

$$8 = \frac{100 \cos^2 \beta}{1}$$

$$1 - \frac{100 \cos^2 \beta}{1} = 7$$

$$\frac{100 \cos^2 \beta}{1} = \frac{R^2}{R^2}$$



$$R^2 = \frac{100 \cos^2 \beta}{R^2} = \frac{0.24 \cdot 0.2 \beta}{R^2}$$

$$\sin \beta \cos \alpha = ?$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sum_{i=1}^n a_i = \int_a^b f(x) dx + R$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x-1)$$

$$R = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$\frac{5}{\sin \beta} = \frac{AO_2}{\sin \alpha \beta}$$

$$\frac{\sin \beta}{BC} = \cos \beta$$

$$\frac{AD}{BC} = \cos^2 \alpha$$

$$\frac{AB}{BC} = \cos^2 \alpha$$

$$\frac{AD}{64} = \frac{10}{64}$$

$$\frac{AB}{64} = \frac{10}{64}$$

$$80 \cdot BC \cos^2 \beta$$

$$80 \cdot BC \cos^2 \alpha = AB$$

$$\frac{1325}{4480}$$

$$\frac{64}{48}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7

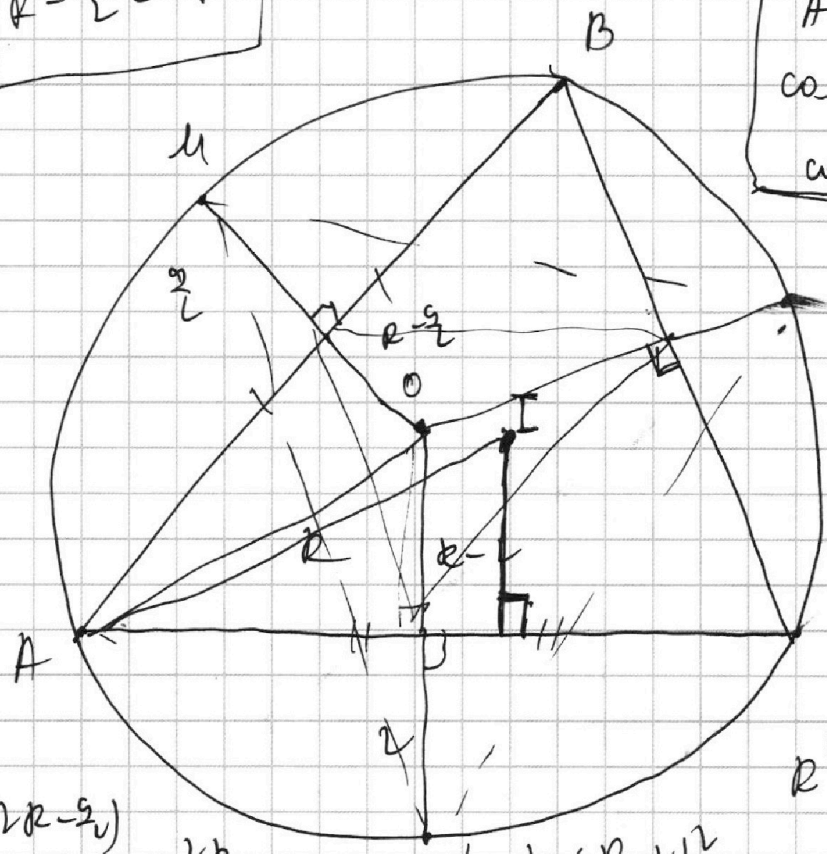
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R - \frac{a}{2} = R$$

$$\begin{aligned}
 AB &= 9(2R - \frac{a}{2}) \\
 AC &= 4(R-1) \\
 \cos \beta &= \frac{R-L}{R} \\
 \cos \delta &= \frac{R-\frac{a}{2}}{R}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \sin \delta &= \frac{9(2R - \frac{a}{2})}{2R} \\
 R^2 - (R-L)^2 &= \\
 (R-L+R)(R-L-R) &= \\
 2(2R-L) &= \\
 14+17 &= \\
 34+17 &=
 \end{aligned}$$

$$\frac{9(2R - \frac{a}{2})}{\sin \delta} = 2R$$

$$\frac{9(2R - \frac{a}{2})}{2R}$$

$$R-L = R \cos \beta \quad 4(R-1) \quad R-L-L$$

$$\cos \beta = \frac{R-L}{R}$$

$$\begin{aligned}
 (R-L)R &= \\
 2R-L &= \\
 \frac{4(R-1)}{\sin \beta} &= 2R \\
 \frac{2(R-1)}{R} &=
 \end{aligned}$$

$$\frac{AC}{2} = \sqrt{R^2 - (R-L \cos \beta)^2}$$

$$AB = 2 \cdot \frac{a}{2} (2R - \frac{a}{2}) = 9(2R - \frac{a}{2})$$

$$\frac{AC}{2} = 2\sqrt{R-L}$$

$$AC = 2R(R-L)$$

$$AC = 4\sqrt{R-L} \quad AC = 4(R-1)$$

(51)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$R^2 - R^2 \in 4R - 4$$

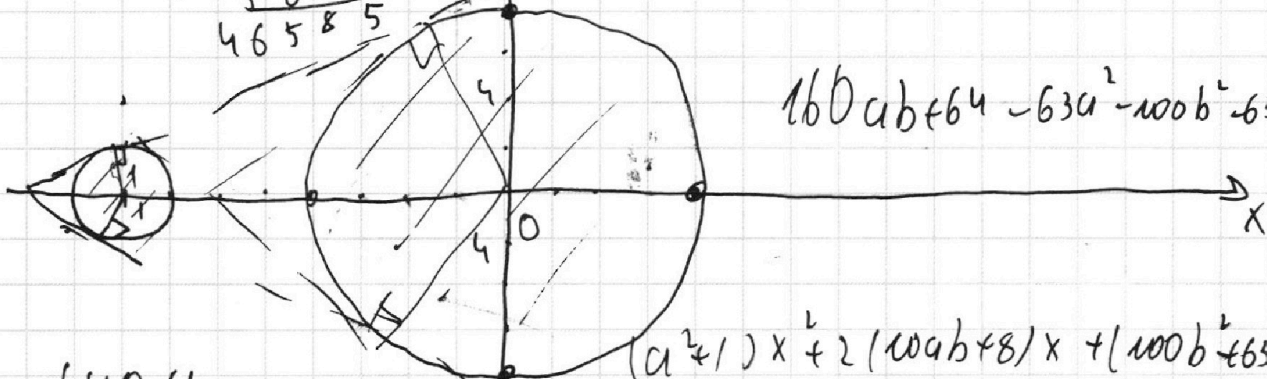
Кисель

$$x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$a = ?$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 160$$

$$64^2 = \begin{array}{r} 41 \\ 40960 \\ + 5625 \\ \hline 46585 \end{array}$$



$$160ab + 64 - 63a^2 - 100b^2 - 63a^2$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2(10ab + 8)x + (100b^2 + 63) = 0$$

$$100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 = 0$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 415 \\ \hline 2125 \end{array}$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$$

$$63a^2 + 100b^2 - 160ab = 1$$

$$640 \cdot 64$$

$$\sqrt{46585} = 21$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 415 \\ \hline 2485 \end{array} = -ax - 10b$$

$$x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D_1 = 100a^2b^2 - (a^2 + 1)(100b^2 - 4)$$

$$\frac{12 \cdot 3}{3^2 \cdot 4}$$

$$6^2 \cdot 2 = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 - 100b^2 + 4$$

$$x^2 \quad 64a^2 + 75b^2 - 160ab = 0$$

$$4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$D = 5625 + 160 \cdot 64 \cdot 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\boxed{h_9} = 4 \cdot 49 - 5 \cdot 49 \quad 49 \cdot 2 \cdot 824 - 92 \cdot 49 + 7 \cdot 952$$

$$49 \cdot 2 \cdot 824 - 4 \cdot 49 + 7 \cdot 952 = 79$$

$$h^3(r-4) + 64(r+1)$$

$$\boxed{r=2}$$

$$r^4 - 4r^3 + 64r^2 + 64r = 4r - 4r^3 + 64r^2 + 64r$$

$$4r^3 - 4r = 64r^2 + 64r$$

$$4r^3 - 4r = 64(r^2 + r)$$

$$\boxed{r=4}$$

$$r=1$$

$$r = \frac{4}{4r - r^2} = \frac{r^2}{4r(r-1)}$$

$$\frac{r}{4(r-1)} = \frac{r}{4(r-1)}$$

$$\frac{r}{4(r-1)} = \frac{r}{4(r-1)}$$

$$\frac{r}{4(r-1)} = \frac{r}{4(r-1)}$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{4(r-1)}$$

$$9(2r+4,5) = 2r \sin \alpha$$

$$80 \cos 2 \cos \beta - 1 = 7$$

$$\cos 2 \cos \beta = 1$$

$$\cos 2 \cos \beta = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{\beta = 8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

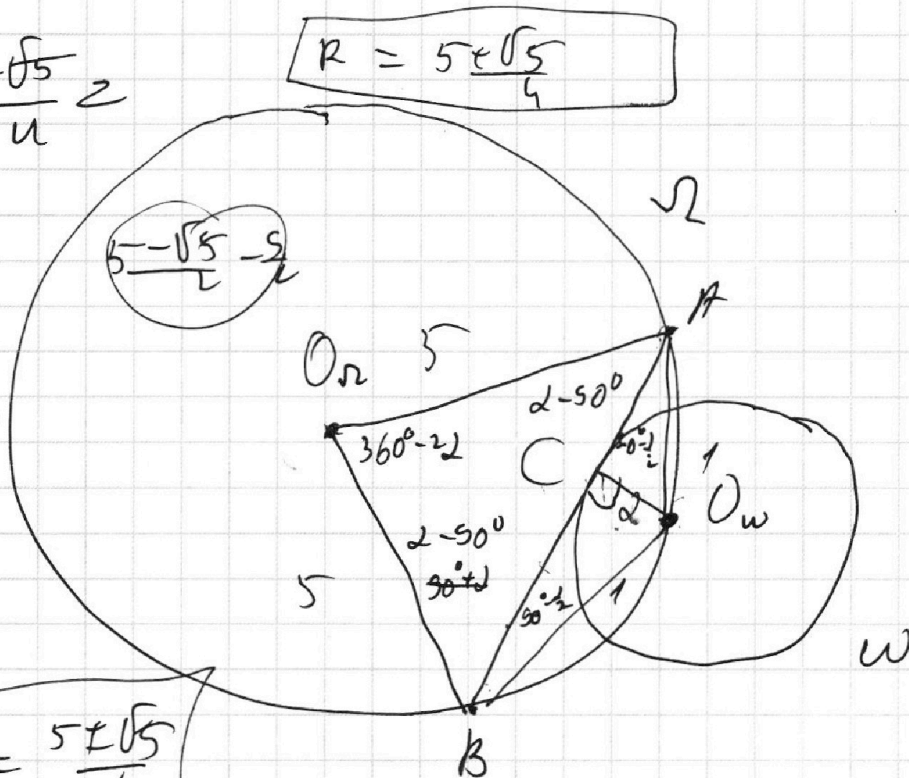
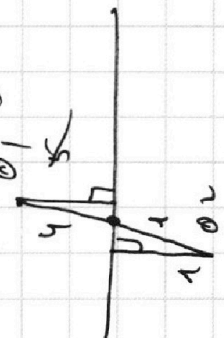


3.

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{4} \approx 0.61$$

$$R = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

AB = 80 \sin \angle COB



$$R = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

$R_w = 1$   
 $R_\Omega = 5$

$$AB = 9 \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{5} - 9}{2} \\ \frac{\sqrt{5} - 4}{2} \end{cases}$$

$$\frac{AC}{CB} = 7 \quad | \quad AB - ?$$

90°

$$\frac{5R^2 - 10R + 5}{R^2} = 1$$

$$\frac{5}{\sin(\alpha - 50^\circ)}$$

$$AB^2 = 4R^2 - 10R + 5 = 0$$

$\Delta_1 = 25 - 20 = 5$

4.  $\sqrt{\frac{2x^2 - 5x + 3}{a}}$

$$-\sqrt{\frac{2x^2 + 2x + 1}{b}} = -7x + 2$$

$$R = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

$a - b =$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$\frac{81(2R - \frac{9}{2})^2}{4R^2} +$$

$$\frac{R - \frac{9}{2}}{R^2} = 1$$

$$\frac{4(R - 1)^2}{b^2} + \frac{(R - 1)^2}{R^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.  $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$   
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$   
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc \rightarrow m/m$   
 $34 + 17 = 51$

$k, l, n \in \mathbb{N}$

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$        $20 + 14 + 17$   
 $bc = l \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$        $34 + 17 = 51$   
 $ac = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$        $37 + 17 + 10 = 54$

~~$k=1$~~   
 ~~$l=1$~~   $\Rightarrow$   ~~$klh=x$~~   $\Rightarrow$   
 ~~$n=1$~~   $\rightarrow$  ~~min~~

$(abc)^2 = kln \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$abc = 7^{32} \sqrt{kln} \cdot 2^{25} \sqrt{2}$   
 $abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2kln}$

$\sqrt{2kln} \in \mathbb{N}$        $k=1$   
 $3, 7$        $l=1$  |  $9a$   
 $5, 3$        $n=L$   
 $kln=2$   $\Rightarrow$   $2^{26} \cdot 7^{32}$

2.  $\text{НОД}(a, b) = 1$

$\left. \begin{array}{l} a \cdot b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8ab : m \\ a \cdot b : m \\ 8ab \equiv 0 \pmod{m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8a^2 : m \\ 8b^2 : m \end{array}$

$\boxed{m_{\max} = 8}$        $\frac{8}{25+9-50} = \frac{8}{8} = 1$        $a \equiv -b \pmod{m}$        $6 \cdot 8 \cdot 7 - 8$   
 $56$        $8b^2 : m$        $56 \cdot$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

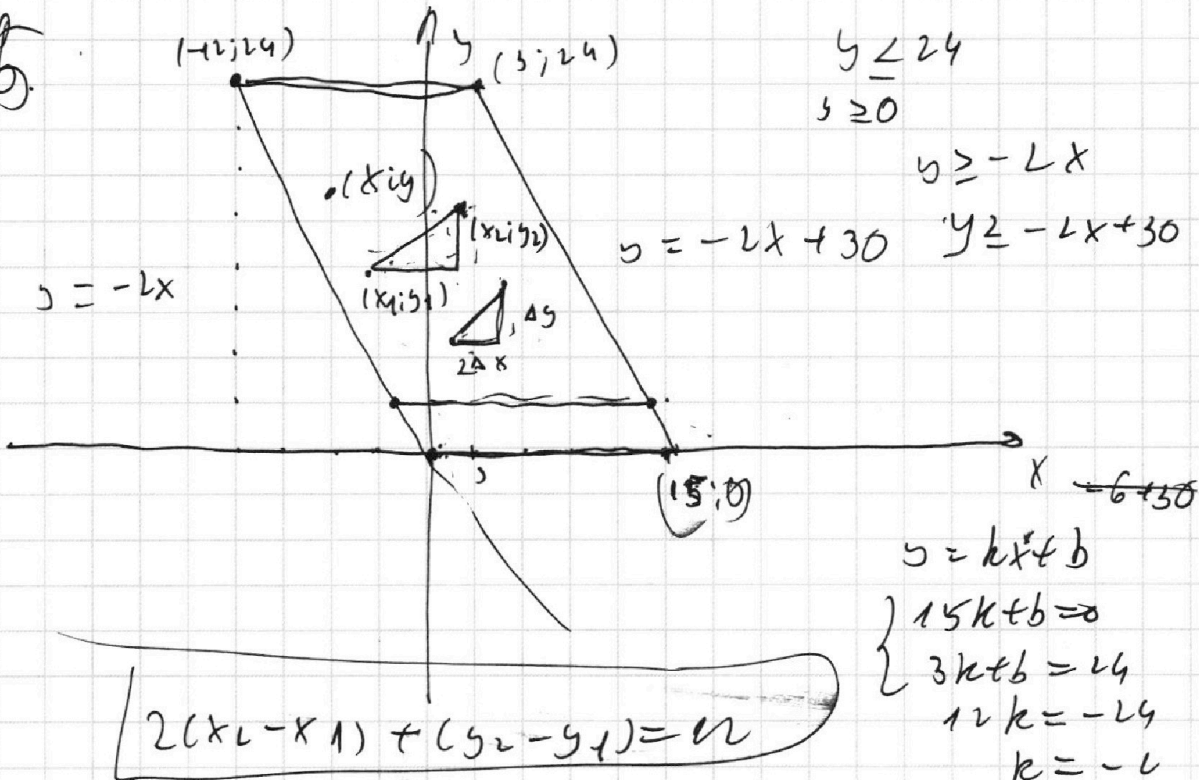
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5



x/4

$(0; 0), (0; 1), \dots, (0; 15)$   $y_1 \geq -2x_1$   
 $(1; 0), \dots, (1; 14)$   $30 - y_2 \geq 2x_2$

$(2; -1), (2; 0), \dots, (2; 14)$

$(3; -1), \dots, (3; 13)$

$y_1 \in [0; 24]$   
 $y_2 \geq -2x_1$   
 $2x_1 \leq 30 - y_1$

$-y \leq 2x$   
 $y \leq -2x + 30$

$1 = -2x + 30$

$2x = 29$

$2 = -2x + 30$

$1 = -x + 15$

$x = 14$

$3 = -2x + 30$

$x = \frac{27}{2} = 13,5$

$y_1 \in [0; 24]$   
 $y_2 \geq -2x_2$   
 $2x_2 \leq 30 - y_2$

$x_2 = x_1$   
 $2\Delta x + 2\Delta y = 12$

$y \in [0; 24]$   
 $y \geq -2x$   
 $y \leq -2x + 30$   
 $x \geq 0$

$2x_2 \geq (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) =$   
 $2x_2 - 2x_1 - (y_2 - y_1) \leq 30 + (y_2 - y_1)$   
 $\geq 30$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



R-2 <math>R \cos \beta</math>

$$R-2 = R \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{R-2}{R}$$

$$2\sqrt{\frac{R-1}{R}}$$

$$\sin \beta = \frac{4\sqrt{R-1}}{2R} = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$$

$$\frac{R-2}{R}$$

$$\frac{\sqrt{R-1}}{R}$$

$$\cos \beta = \frac{R-2}{R}$$

$$\frac{\sqrt{R-1}}{R}$$

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{AC}{CB} = 7$$

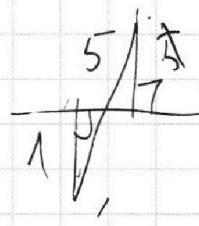
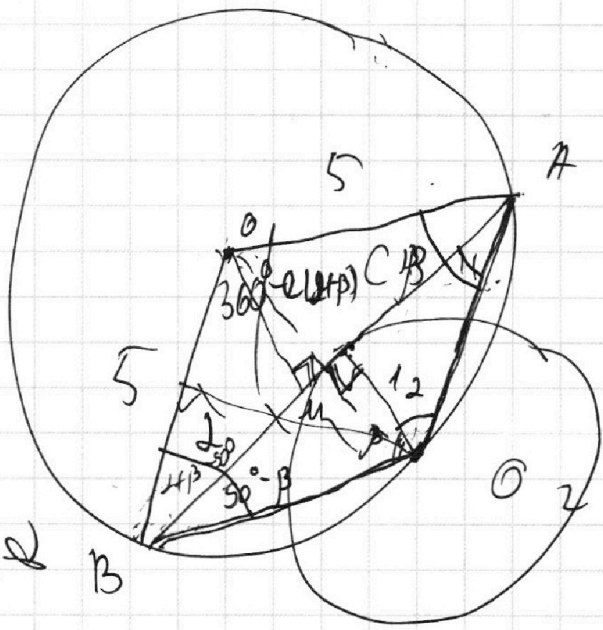
$$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = 7$$

$$\frac{AC}{O_1M} =$$

$$AB = 10 \cos \beta$$

$$AB = 80 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\frac{BC}{O_2B} \cdot O_2A$$



2,5 часа

$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$r = 1$$

$$R = 5$$

$$\frac{R-1 + \sqrt{R^2 - 4R-4}}{R^2} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -7x + 1$

Замечаем:  $\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b \end{cases}$

Получим

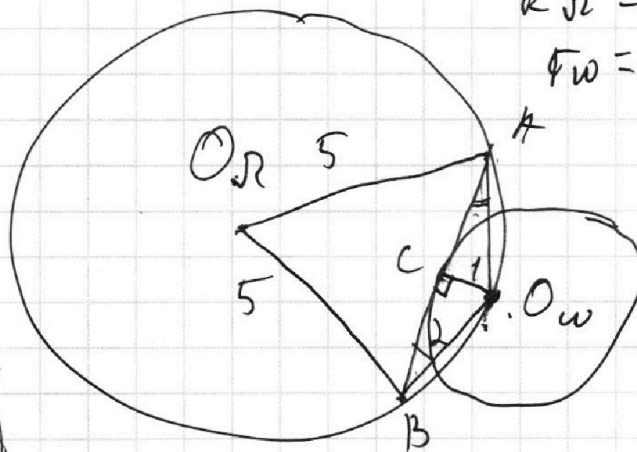
$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3 = 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$



$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3$   
 $\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + 3$   
 $-\frac{62}{49} + 3 \neq 0$

3.



$R_R = 5 = R$   
 $r_w = r = 1$

$\frac{AC}{CB} = 7$

$\frac{AC}{CB} = \frac{ctg A}{ctg B}$

$ctg A + ctg B = AB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

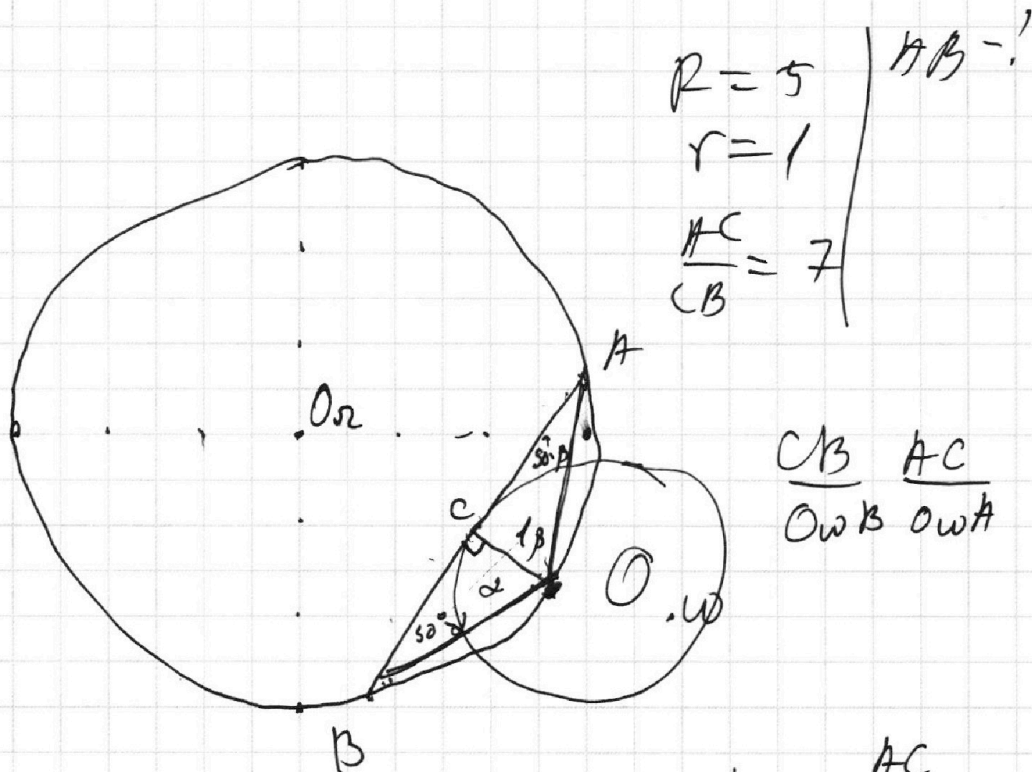
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.



$\frac{CB}{O\omega B} = \frac{AC}{O\omega A}$

$\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$        $\tan \beta = \frac{AC}{1}$

~~$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta}$~~   
 $\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha}$

~~$\tan \alpha$~~        $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = 7$

$\frac{AB}{10 \sin(\alpha+\beta)}$

~~$\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \beta \sin \alpha}$~~  = 7

$10(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$

$\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} = 7$

$\frac{O\omega B}{\cos \beta} = 10$

$80 \sin \alpha \cos \beta$

BC =

$O\omega B = 10 \cos \beta$

$7 \sin \alpha \cos \beta = \sin \beta \cos \alpha$

$O\omega A = 10 \cos \alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.

AB - ?

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{7}$$

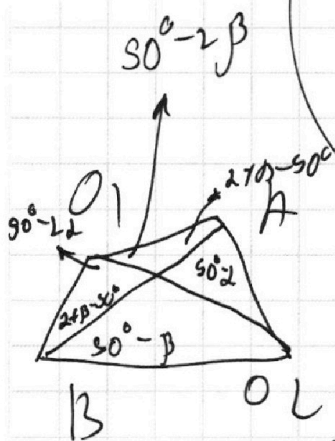
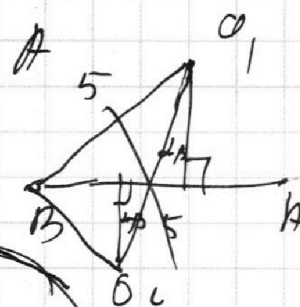
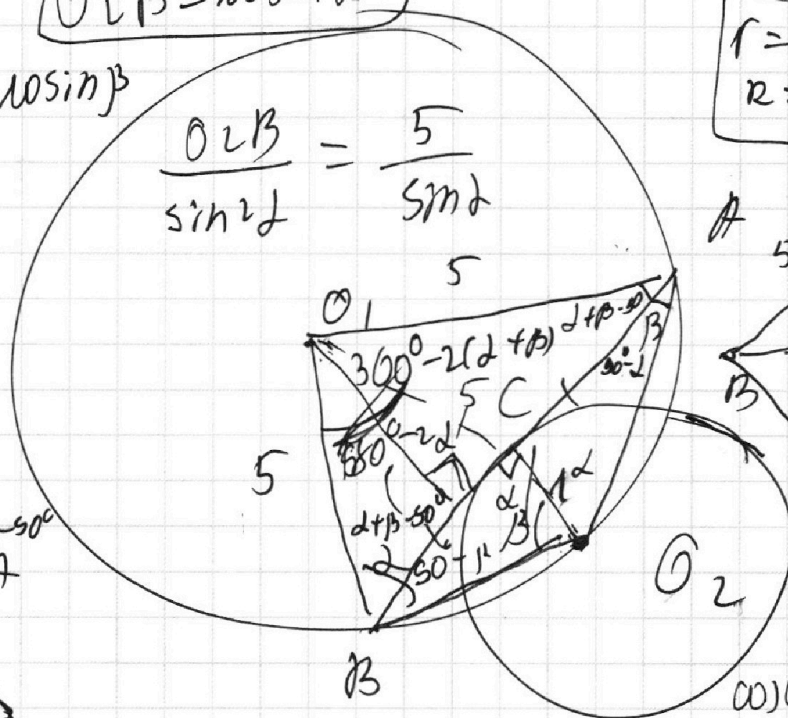
$$r = 1$$

$$R = 5$$

$$O_2 B = 10 \sin \alpha$$

$$O_2 A = 10 \sin \beta$$

$$\frac{O_2 B}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin \alpha}$$



$$\frac{O_2 B \cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{AC}{CB} = 7$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = 7$$

$$AB = 10 (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

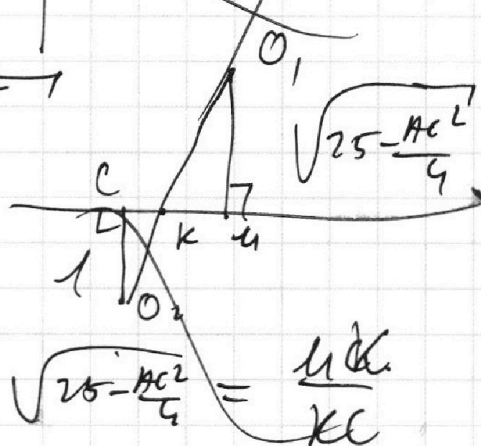
$$AB = 80 \sin \beta \cos \alpha$$

$$100 \sin^2 \alpha - 1 + 100 \sin^2 \beta - 1 = AB^2 - 5 - \frac{AC^2}{4}$$

$$100 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 = AB^2$$

$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$\frac{AM}{MC} = 1$$



$$\sqrt{25 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{MK}{KC}$$

$$\sqrt{25 - \frac{AC^2}{4}} = 1 = \frac{MC}{KC}$$

$$100 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 = 80 \sin \beta \cos \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

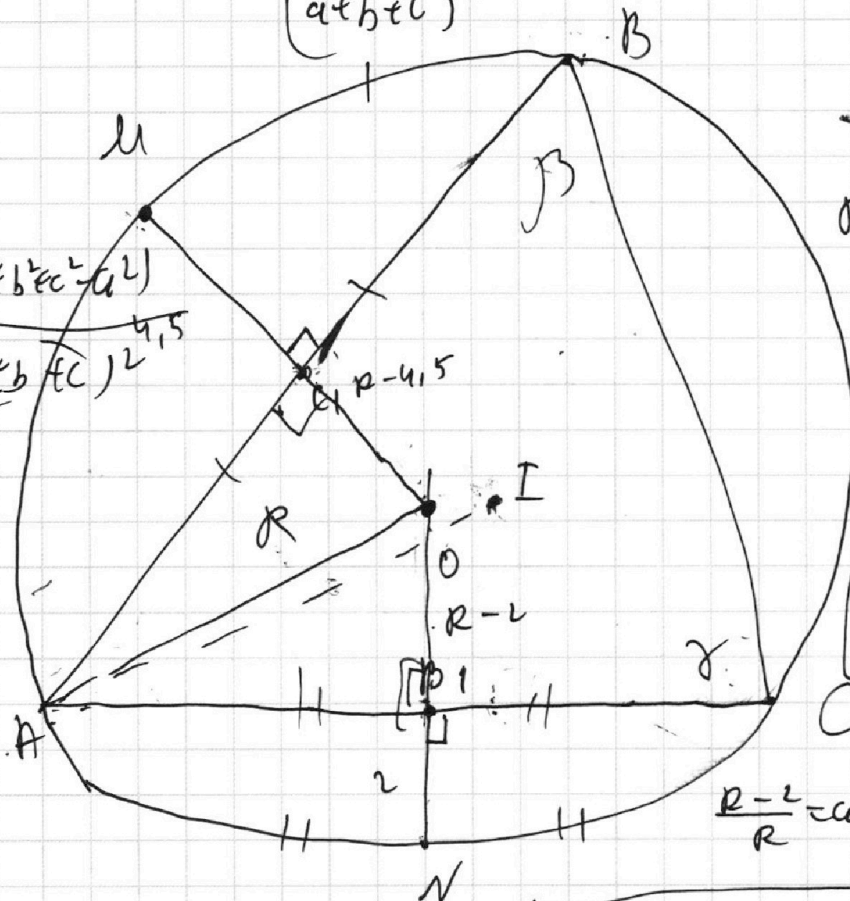
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.

$$\frac{b^2c^2 + b^2a^2 + 2bc(b^2 + c^2 - a^2)}{(a+b+c)^2}$$

$$\frac{2b^2c^2 + 2bc(bc + b^2c^2 - a^2)}{(a+b+c)^2 \cdot 4.5}$$



$AI - ?$

$$R - 4.5 = R \cos \alpha$$

$$R - 2 = R \cos \beta$$

$$2AB \cdot AC \cos \alpha$$

$$1 - \frac{4.5}{R} = \cos \alpha$$

$$1 - \frac{2}{R} = \cos \beta$$

$$\frac{R-2}{R} = \cos \beta$$

$$AB = 9(2R + 4.5)$$

$$AC = 4(2R + 2)$$

$$R^2 - (R - 4.5)^2$$

$$(R - R + 4.5)(R + R - 4.5)$$

$$4.5(2R + 4.5)$$

$$2(2R + 2)$$

$$AI^2 = ab = 4Rr$$

$$\vec{OI} = \frac{a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}{2R}$$

$$\vec{AI} = \frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{2R}$$

$$\frac{\sqrt{4R - R^2}}{2} = \frac{4R - R^2}{4} = \sin \beta$$

$$AI = bc \sin \alpha$$

$$4 - R^2 \sin^2 \alpha = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + (ax + 10b)^2 = 4 \quad \text{— имеет единственное решение}$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0 \quad \Delta \geq 0$$

$$D_1 = 100a^2b^2 - (a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 +$$

$$+ 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \quad \frac{55}{6} = \frac{0}{98} \frac{55}{5} \frac{11}{10}$$

$$\boxed{a^2 - 25b^2 + 1 = 0}; (*) = \frac{10}{81} = \frac{10}{99} \quad \frac{1}{56}$$

$$(x + 8)^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1 \quad \text{— имеет решение}$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2(10ab + 8)x + 100b^2 + 63 = 0$$

$$D_1 = 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 =$$

$$= -63a^2 - 100b^2 + 160ab + 1 = 0$$

$$\boxed{63a^2 + 100b^2 - 160ab - 1 = 0}; (**)$$

Или можно, чтобы (\*) и (\*\*) выполнялись  
одновременно:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \\ 63\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 160\left(\frac{a}{b}\right) - 100 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - 25b^2 + 1 = 0 \\ 63a^2 - 160ab + 100b^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Получа:

$$64a^2 - 160ab + 75b^2 = 0$$

$$64\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 160\left(\frac{a}{b}\right) + 75 = 0$$

$$D_1 = 6400 - 4800 = 1600 = 40^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{80 + 40}{64} = \frac{120}{64} = \frac{60}{32} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} \\ \frac{a}{b} = \frac{40}{64} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \end{array} \right.$$

лист 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper:

$$\frac{48}{256} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{64+16}{256} = \frac{80}{256} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{64-16}{256} = \frac{48}{256} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{32+16}{256} = \frac{48}{256} = \frac{3}{16}$$

$$8 \cdot 100 = 800$$

$$8 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2 = 256$$

$$1005 - 256 = 749$$

$$749 - 10 \cdot 8 = 749 - 80 = 669$$

$$1005 - 256 = 749$$

$$749 - 10 \cdot 8 = 669$$

$$256k^2 + 36k^2 - 64bk = 1$$

$$256(\frac{9}{64})^2 + 36(\frac{9}{64}) + 3 = 0$$

$$67k^2 - 16bk + 3 = 0$$

$$4k^2 - 256k^2 + 4 = 0$$

$$256k^2 - 4 = 0$$

$$252 \cdot \frac{4}{163} = \frac{1008}{163}$$

$$252 - \frac{1008}{163} = \frac{40536 - 1008}{163} = \frac{39528}{163}$$

Мем 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.  $\sin \beta = \frac{4(R-1)}{2R}$

$\sin \beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{2R}$

$\frac{4(R-1)}{4R^2} + \frac{(R-1)^2}{R^2} = \frac{R-1 + (R-1)^2}{R^2} = 1$

$\sin \beta = 0$

$\triangle ABC - \text{нп}$   
 $\angle B = 50^\circ$

$\frac{\sqrt{R-1}}{R}$

$R - 1 + \frac{(R-1)^2}{R^2} = 1$   
 $R^2 - 4R + 4 + R - 1 = R^2$

$\frac{AC}{CB} = 7$

$R - 1 + \frac{(R-1)^2}{R^2} = 1$

~~so~~

~~cos x =~~

$\cos \beta = -1$

$-3R + 5 = 0$   
 $3R = 5$   
 $R = 1$

$-3R + 5 = 0$

$R = 1$

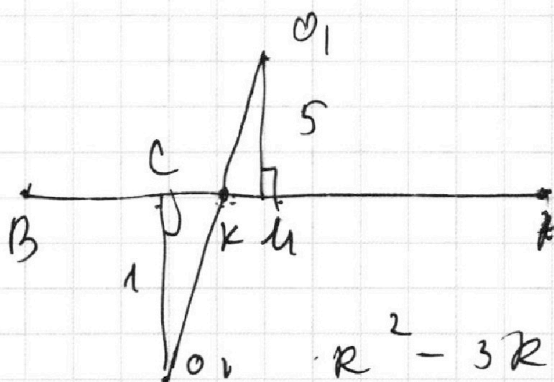
$\sin \beta \cos \alpha = \frac{BC}{OB} \cdot \cos \alpha = \frac{BC}{OB} \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{1-L}{1}$

$OB = 10 \cos \alpha$

$\frac{5}{\sin \beta} = \frac{OB}{\cos \alpha}$

$OB = 10 \cos \alpha$



$R^2 - 4R + 4 + R - 1 = R^2$

$R^2 - 3R = R^2$

$\frac{BC \cos \beta}{10 \cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$

$\sum_{i=1}^n a_i$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

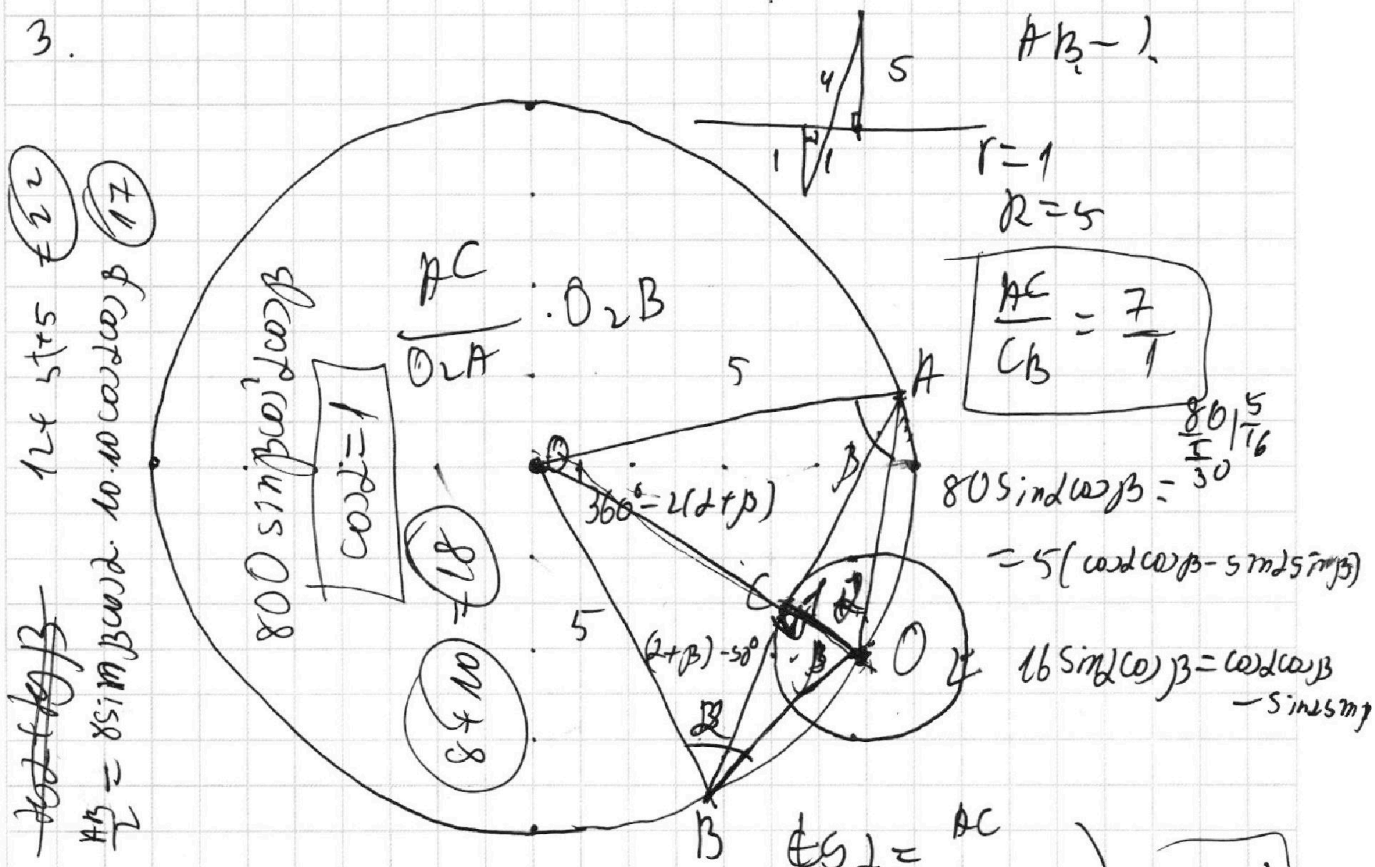
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



~~12 + 5 + 5 = 22~~  
~~17~~  
 $AB = 8 \sin \beta \cos \alpha = 10 \cos \alpha \cos \beta$   
 $\frac{AB}{2} = 5 \cos \alpha \cos \beta$

$$\frac{\sin 2 \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = 7$$

$$\frac{\cos \alpha}{\tan \beta} = 7$$

$$\frac{a}{b} = 7 \implies a = 7b$$

$$\frac{5}{\sin(2+\beta)} = \frac{AB}{\sin(2+\beta)}$$

$$AB = 10(\sin 2 \cos \beta + \sin \beta \cos 2)$$

$$5 = \frac{AB}{\sin(2+\beta)}$$

$$80(\sin \beta \cos \beta)$$

$$BC \cos \beta = \sin \beta$$

$$\frac{\sin \cos \beta}{7} = \sin \beta \cos \alpha$$

$$\frac{AB}{2} = 50 \sin(2+\beta) \cos 2 \cos \beta$$

$$AB = 100 \sin(2+\beta) \cos 2 \cos \beta$$

$$800 \sin 2 \cos \beta \cos 2 \cos \beta$$

$$\frac{AC}{7} \cos \omega_\beta$$