



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad ab = m \cdot 2^{14} \cdot 7^{20}, \quad m, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac = k \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Полога:

$$abc = \sqrt{2mnk} \cdot \sqrt{2^{50} \cdot 7^{84}} = \sqrt{2mnk} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

Наименьшее значение abc будет достигаться тогда и только тогда, когда $\sqrt{2mnk}$ минимально. Заметим, что

$$\sqrt{2mnk} \in \mathbb{Z} \text{ и } \sqrt{2mnk} \neq 1 \text{ (в этом случае, см}$$

$2mnk=1$, но $mnk=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$). Тогда $mnk=2$:

$$\sqrt{2mnk} = 2. \text{ Если } n=1, m=1, k=2, \text{ то } mnk=2 \text{ и}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{32} \text{ - минимальное значение}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{32}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. $\text{НОД}(a; b) = 1$ — по условию

Пусть $\begin{cases} a \equiv -b \\ (a+b)^2 - 8ab \equiv 0 \end{cases} \pmod{m}$. Тогда $8ab \equiv 0 \pmod{m}$.

$$\begin{cases} a \equiv -b \\ 8ab \equiv 0 \end{cases} \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} 8a^2 \equiv 0 \\ 8b^2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{m}$$

Поскольку числа a и b взаимно просты, то и a^2 и b^2 взаимно просты. Тогда $8 \equiv 0 \pmod{m}$, а значит $m = 8$ — наибольшее значение m .

Пример: $a = 5$ и $b = 3$: $\begin{cases} 8 \equiv 0 \\ -56 \equiv 0 \end{cases} \pmod{8}$.

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

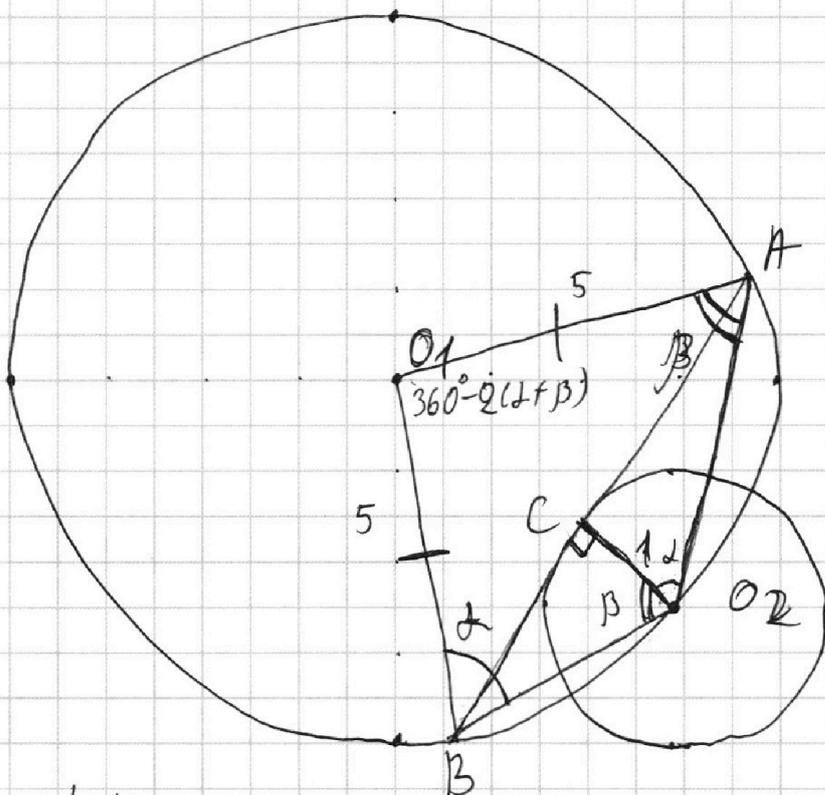
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$r = 1, R = 5$$

$$AB = ?$$

$$O_2C \perp AB$$

$$O_2C = 1 = r$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{tg \alpha}{tg \beta} = 7$$

$$\sin 2\omega \beta = 7 \sin \beta \cos 2$$

По теореме синусов: $AB = 10(\sin 2\omega \beta + \sin \beta \cos 2) =$

$$= 80 \sin \beta \cos 2 ; \quad \boxed{AB = 80 \sin \beta \cos 2}$$

$$\angle O_1BO_2 = 2 + \beta - 90^\circ + 90^\circ + \beta = 2, \quad \angle O_1AO_2 = \beta$$

$$O_1O_2 = O_1A = O_2B = 5 \Rightarrow \triangle O_1AO_2 \text{ и } \triangle O_1BO_2 -$$

равнобедренные с углами 2 и β при основаниях соответственно. Тогда $O_2A = 10 \cos \beta, O_2B = 10 \cos 2.$

Заметим, что $BC \sin 2 = B'$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Заметим, что $\frac{\sin \beta}{BC} = \cos \alpha$~~
Заметим, что $\frac{\sin \beta}{BC} = \cos \beta$.

Получим:

~~$AB = 80 BC \cos \alpha \cos \beta$~~

~~Так как $\cos \alpha = \frac{1}{0,2A} = \frac{1}{10 \cos \beta}$, то~~

~~$AB = 8 \cos \beta$~~

~~$80 \sin \beta \cos \alpha = \frac{80 BC}{0,2A \cdot 0,2B} = \frac{80 BC}{100 \cos \alpha \cos \beta} = AB$~~

~~$\frac{80}{100 \cos \alpha \cos \beta} - 1 = 7 \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} =$~~

~~$= (0,2A \cdot 0,2B)^{-1} \Leftrightarrow 0,2A \cdot 0,2B = \frac{25}{2}$~~

~~$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 0,2A \cdot 0,2B = 10$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \text{ Замена: } \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b \geq 0 \end{cases}$$

Положим:

$$a = b \Rightarrow \begin{cases} a = b & (1) \\ a = -b & (2) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} -5x + 3 = 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$$

(2): $a = -b$. Так как $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то

$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$. Но эти два квадратных уравнения равны $\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ и при этом при $x = \frac{2}{7}$ $2x^2 - 5x + 3 \neq 0$. Значит уравнение $a = -b$ не принимает ни одного корня.

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

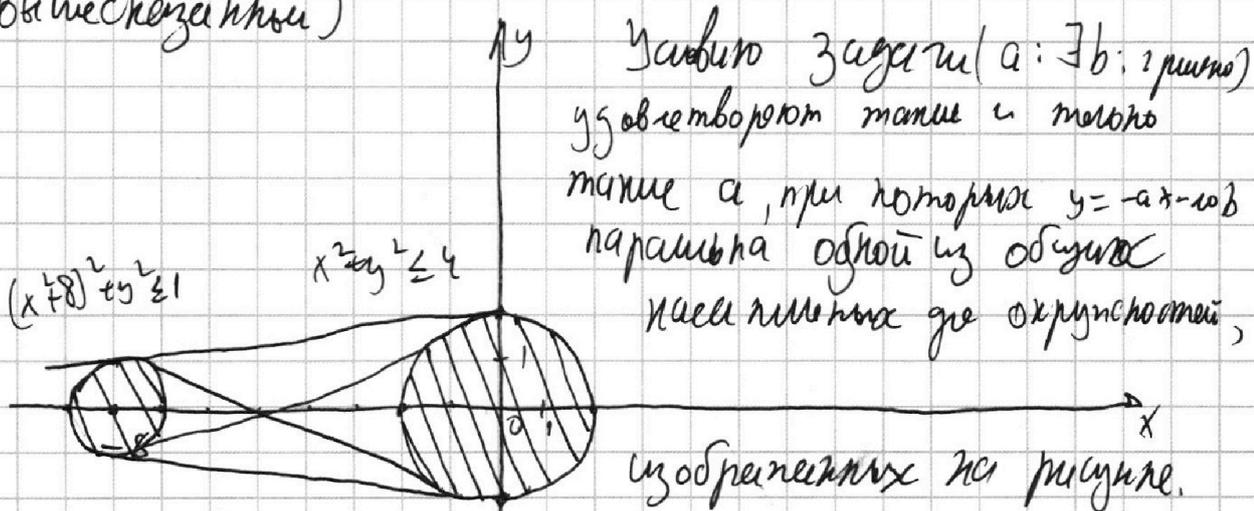
6.
$$\begin{cases} y = -ax - 10b; & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0; & (2) \end{cases} \quad a: \exists b: 2 \text{ решения}$$

(1) - прямая

(1) - множество из окружности с центром в точке $(-8; 0)$ радиуса 1 и окружности

(2) - множество, состоящее из круга с окружностью с центром $(-8; 0)$ радиуса 1 и круга с окружностью с центром $(0; 0)$ радиуса 2 (рассматриваю

случаи, когда $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$, а $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$ и $(x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0$ и $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ убеждаюсь в
вышесказанном)



Здесь изображены две
внешние и две внутренние
касательные к окружностям.

лист 1.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$l: y = kx + b$ - общая касательная к окружностям

Пусть:

$$x^2 + (kx + b)^2 = 4$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 4$$

$(k^2 + 1)x^2 + 2bkx + b^2 - 4 = 0$; единственные решения

$$D_1 = b^2 k^2 - (k^2 + 1)(b^2 - 4) = b^2 k^2 - b^2 k^2 + 4k^2 - b^2 + 4 = 4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$$4k^2 - b^2 + 4 = 0$$

$(x+8)^2 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 1$; единственные решения

$$x^2 + 16x + 64 + k^2 x^2 + 2bkx + b^2 = 1 = 0$$

$$(1+k^2)x^2 + 2(bk+8)x + 63+b^2 = 0$$

$$D_1 = (bk+8)^2 - (63+b^2)(1+k^2) =$$

$$= b^2 k^2 + 16bk + 64 - 63 - 63k^2 - b^2 - b^2 k^2 =$$

$$= -63k^2 - b^2 + 16bk + 1 = 0$$

$$63k^2 + b^2 - 16bk - 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 4k^2 - b^2 + 4 = 0 \\ 63k^2 + b^2 - 16bk - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 256k^2 - 64bk + 3b^2 = 0 \quad | : b^2$$

$$256\left(\frac{k}{b}\right)^2 - 64\left(\frac{k}{b}\right) + 3 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{k}{b} = \frac{1}{16} \\ \frac{k}{b} = \frac{3}{16} \end{array} \right.$$

Мет. 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 16k:$$

$$4k^2 - (16k)^2 + 4 = 0$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{63}} - \text{уменьшой}$$

по формулам касательной
к окружностям

$$b = \frac{16}{3}k$$

$$4k^2 - \frac{256}{9}k^2 + 4 = 0$$

$$36k^2 - 256k^2 + 36 = 0$$

$$220k^2 = 36$$

$$k = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Ответ: $a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}, a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$

лет. 3

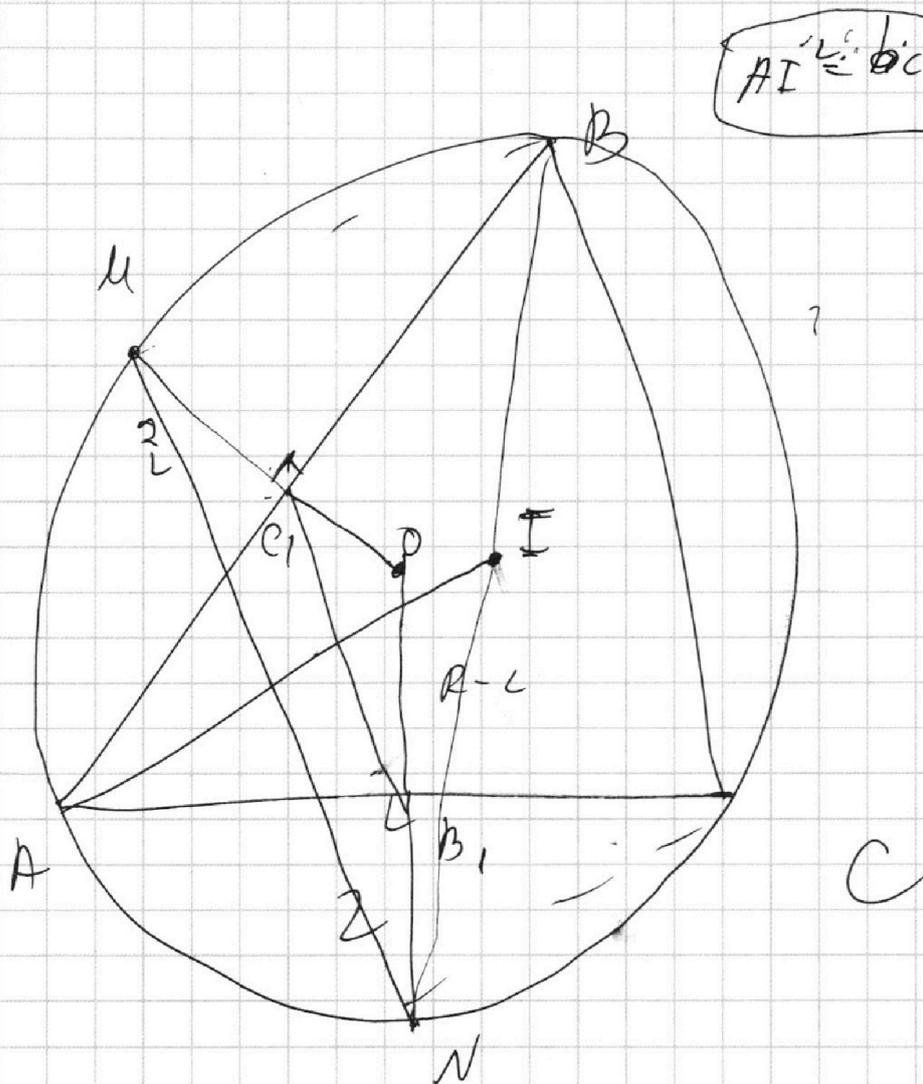
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \beta = \frac{R-L}{R}$$
$$\cos \gamma = \frac{R-\frac{9}{2}}{R} = \frac{2R-9}{2R}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{R^2 - (R-L)^2}}{R} = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{4R^2 - 4R + 36R - 81}}{2R} = \frac{\sqrt{36R - 81}}{2R}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha = -\cos(\beta + \gamma) = \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma =$$

$$= \frac{\sqrt{(36R-81)(R-1)}}{R^2} - \frac{(R-1)(2R-9)}{2R^2}$$

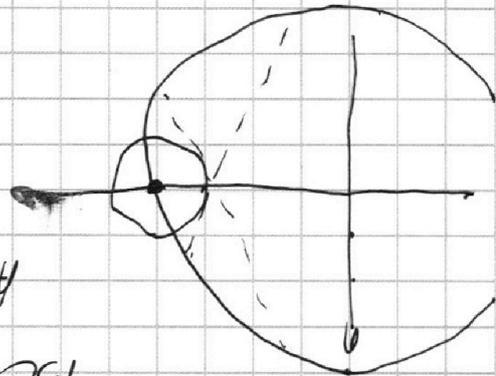
$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$8 = \frac{100 \cos^2 \beta}{1}$$

$$1 - \frac{100 \cos^2 \beta}{1} = 7$$

$$\frac{R^2}{1} = \frac{100 \cos^2 \beta}{1}$$



$$R^2 = \frac{100 \cos^2 \beta}{1} = R^2$$

$$\sin \beta \cos \alpha = ?$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

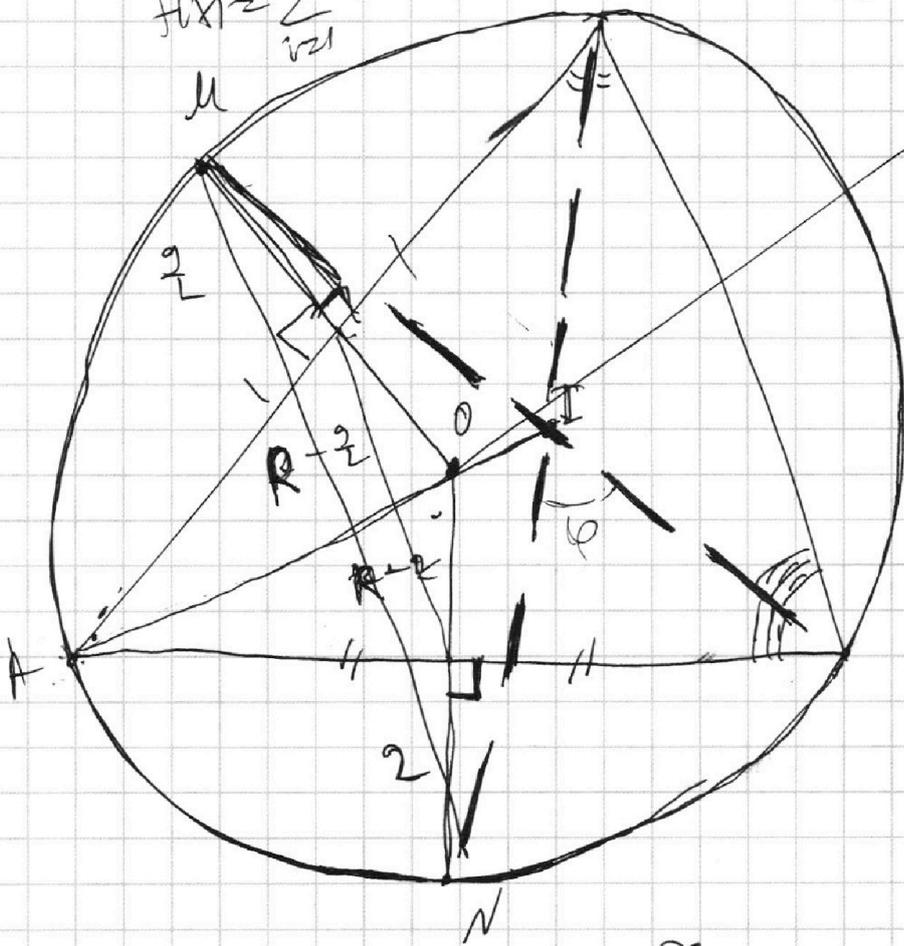


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sum_{i=1}^n a_i = \int_a^b f(x) dx + R$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x-1)$$

$$R = \int_{x=1}^x f(x) dx$$



$$\frac{5}{\sin \beta} = \frac{AO_2}{\sin \alpha \beta}$$

$$\frac{\sin \beta}{BC} = \cos \beta$$

$$\frac{1320}{448} = \frac{10}{16}$$

$$80 \cdot BC \cos^2 \beta = AB$$

$$\frac{160}{64} = \frac{10}{16}$$

$$\frac{AB}{BC} = \cos^2 \beta$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

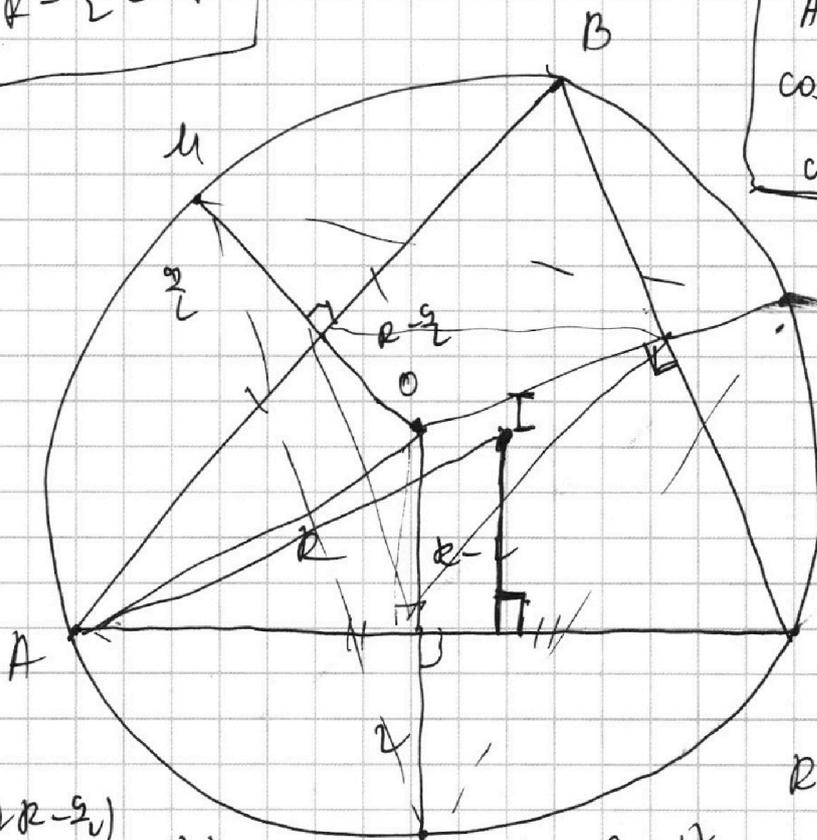
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R - \frac{a}{2} = R$$

$$\begin{aligned} AB &= 9(2R - \frac{a}{2}) \\ AC &= 4(R-1) \\ \cos \beta &= \frac{R-L}{R} \\ \cos \delta &= \frac{R-\frac{a}{2}}{R} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{9(2R - \frac{a}{2})}{2R} \\ R^2 - (R-L)^2 &= (R-L+L)(R-L-L) \\ &= 2(R-L)(R-L-L) \\ &= 2(2R-L)(R-L-L) \\ &= 14R + 17 \end{aligned}$$

$$\frac{9(2R - \frac{a}{2})}{\sin \delta} = 2R$$

$$\frac{9(2R - \frac{a}{2})}{2R}$$

$$R-L = R \cos \beta = 4(R-1) \quad R-L-L$$

$$\cos \beta = \frac{R-L}{R}$$

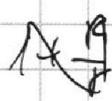
$$\frac{AC}{2} = \sqrt{R^2 - (R-L \cos \beta)^2} = \frac{R - \frac{a}{2}}{R} \cdot \frac{4(R-1)}{\sin \beta} = 2R$$

$$AB = 2 \cdot \frac{9}{2} (2R - \frac{a}{2}) = 9(2R - \frac{a}{2})$$

$$\frac{AC}{2} = 2\sqrt{R-L}$$

$$AC = 2R(R-L)$$

$$AC = 4\sqrt{R-L} \quad AC = 4(R-1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$R^2 - R^2 \in 4R - 4$$

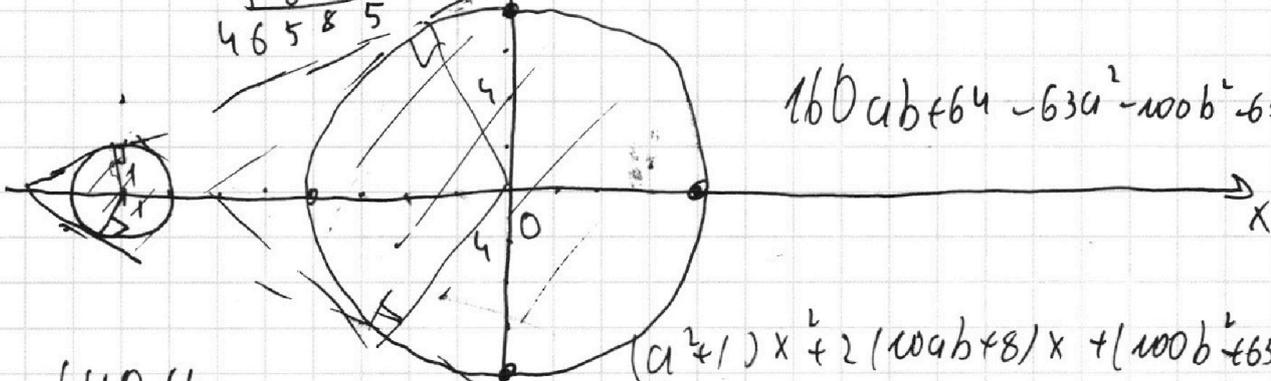
Кисель

$$x^2 + 16x + 64 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$$

$$a = ?$$

$$160ab - 63a^2 - 100b^2 + 160$$

$$64^2 = \begin{array}{r} 41 \\ 40960 \\ + 5625 \\ \hline 46585 \end{array}$$



$$160ab + 64 - 63a^2 - 100b^2 - 63a^2$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2(10ab + 8)x + (100b^2 + 63) = 0$$

$$100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 = 0$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 415 \\ \hline 2125 \end{array}$$

$$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$$

$$63a^2 + 100b^2 - 160ab = 1$$

$$640 \cdot 64$$

$$\sqrt{46585} = 215$$

$$\begin{array}{r} 215 \\ 465 \\ \hline 2485 \end{array}$$

$$x^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D_1 = 100a^2b^2 - (a^2 + 1)(100b^2 - 4)$$

$$\frac{12 \cdot 3}{3^2 \cdot 4}$$

$$6^2 \cdot 2 = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 - 100b^2 + 4$$

$$x^2 \quad 64a^2 + 75b^2 - 160ab = 0$$

$$4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$D = 5625 + 160 \cdot 64 \cdot 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\boxed{h_9} = 4 \cdot 39 - 5 \cdot 49$$

$$154 \cdot 2 + 64 \cdot 26 - 128 \cdot 4 \cdot 64$$

$$92 \cdot 49$$

$$16 \cdot 32 + 64 \cdot 4 - 128 \cdot 2 \cdot 64$$

$$64 \cdot 2$$

$$p^3(r-4) + 64(r+1)$$

$$\boxed{r=2}$$

BC

$$p^4 - 4p^3 + 64p^2 + 128p + 64$$

$$4p^3 - p^4 = 64p^2 + 128p + 64$$

$$4p^3 - p^4 = 64(p^2 + 2p + 1)$$

$$4p$$

$$49$$

$$\boxed{r=4}$$

$$p=1$$

$$4p^2 - p^4 = 4p - p^2$$

$$\frac{4p^2 - p^4}{4p^2 - p^4} = \frac{4p - p^2}{4p^2 - p^4}$$

BC

BC

BC

$$80 \cos 2 \cos \beta - 1 = 7$$

$$10 \cos 2 \cos \beta = 1$$

$$\cos 2 \cos \beta = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{\beta = \frac{\pi}{8}}$$

$$\frac{2}{2-p^2} =$$

$$\frac{2}{4(r+1)} = \frac{2r}{4(r+1)}$$

$$\frac{2r}{4(r+1)} = \frac{2r}{4(r+1)}$$

$$9(2r+4,5) = 2r \sin x$$

$$\sin \beta =$$

$$-256$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

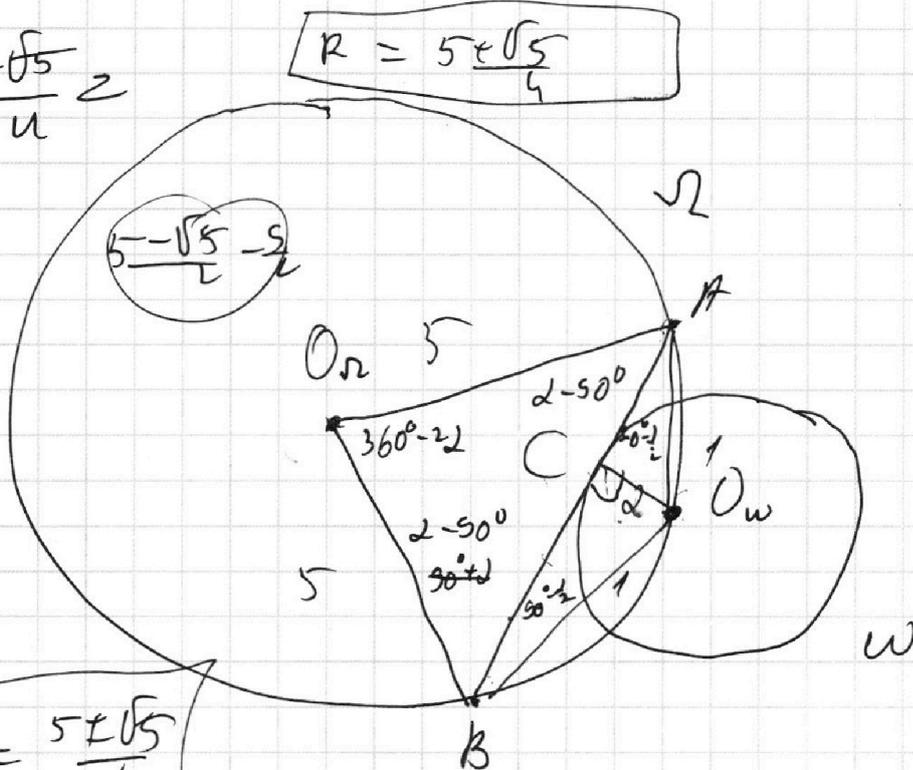
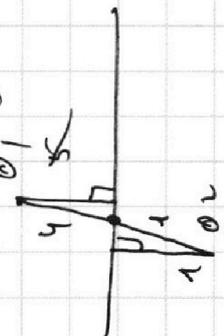


3.

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{4} z$$

$$R = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

$$AB = 80 \sin \angle COB$$



$$R = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

$$R_w = 1$$

$$R_\Omega = 5$$

$$AB = 9 \left\{ \begin{array}{l} \frac{5 + \sqrt{5} - 9}{2} \\ \sqrt{5} - 4 \end{array} \right.$$

$$\frac{AC}{CB} = 7 \quad | \quad AB - ?$$

90°

$$\frac{5R^2 - 10R + 5}{R^2} = 1$$

$$\frac{5}{\sin(2-50^\circ)} = AB$$

$$4R^2 - 10R + 5 = 0$$

$$D_1 = 25 - 20 = 5$$

$$4. \quad \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 3}}{a}$$

$$-\frac{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}{b} = -7x + 2$$

$$R = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} a - b = \\ \frac{81(2R - \frac{9}{2})^2}{4R^2} + \end{array} \right\}$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$R - \frac{9}{2} = \frac{4R^2 - 8R + 9 + R^2 - 2R + 1}{R^2} = 1$$

$$\frac{4(R - \frac{9}{2})^2}{b^2} + \frac{(R - \frac{9}{2})^2}{R^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$
 $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc \rightarrow m/m$
 $34 + 17 = 51$

$k, l, n \in \mathbb{N}$

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$ $20 + 14 + 17$
 $bc = l \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$ $34 + 17 = 51$
 $ac = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$ $37 + 17 + 10 = 54$

~~$k=1$~~
 ~~$l=1$~~ \Rightarrow ~~$klh=x$~~ \Rightarrow
 ~~$n=1$~~ \rightarrow ~~min~~

$(abc)^2 = kln \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

$abc = 7^{32} \sqrt{kln} \cdot 2^{25} \sqrt{2}$
 $abc = 2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2kln}$

$\sqrt{2kln} \in \mathbb{N}$ $k=1$
 $3, 7$ $l=1$ | $9a$
 $5, 3$ $n=L$
 $kln=2$ \Rightarrow $2^{26} \cdot 7^{32}$

2. $\text{НОД}(a, b) = 1$

$\left. \begin{array}{l} a \cdot b : m \\ (a+b)^2 - 8ab : m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8ab : m \\ a \cdot b : m \\ 8ab \equiv 0 \pmod{m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8a^2 : m \\ 8b^2 : m \end{array}$

$m_{\max} = 8$

$\frac{8}{25+9-50} = \frac{8}{8} = 1$ $a \equiv -b \pmod{m}$ $6 \cdot 8 \cdot 7 - 8$
 $= \frac{8}{56}$ $8b^2 : m$ $56 \mid$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

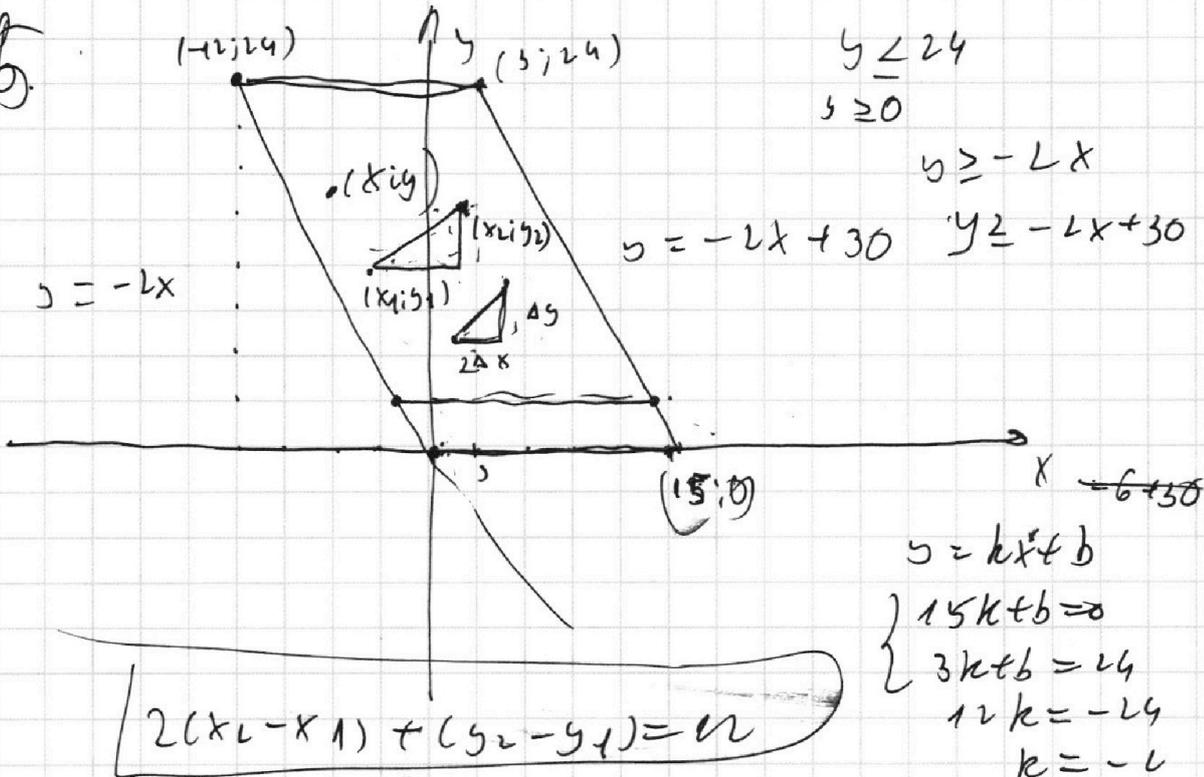
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5



$$y \leq 24$$

$$y \geq 0$$

$$y \geq -2x$$

$$y = -2x + 30$$

$$y \geq -2x + 30$$

$$z = kx + b$$

$$\begin{cases} 15k + b = 0 \\ 3k + b = 24 \end{cases}$$

$$12k = -24$$

$$k = -2$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

x/4

- (0; 0) (0; 1) : ... (0; 15)
 - (1; 0) : ... (1; 14)
 - (2; -1), (2; 0) : ... (2; 14)
 - (3; -1), ... (3; 13)
- $$\begin{cases} y_1 \in [0; 14] \\ y_2 \geq -2x_1 \\ 2x_1 \leq 30 - y_1 \end{cases}$$

$$1 = -2x + 30$$

$$2x = 29$$

$$2 = -2x + 30$$

$$1 = -x + 15$$

$$x = 14$$

$$3 = -2x + 30$$

$$x = \frac{27}{2} = 13,5$$

$$\begin{cases} y_1 \in [0; 14] \\ y_2 \geq -2x_1 \\ 2x_1 \leq 30 - y_2 \end{cases}$$

$$x_2 = x_1$$

$$2\Delta x + 2\Delta y = 12$$

$$\begin{cases} y \in [0; 14] \\ y \geq -2x \\ y \leq -2x + 30 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$2x_2 \geq (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 =$$

$$2x_2 - 2x_1 - 2(x_2 - x_1) \leq 30 + (y_2 - y_1)$$

$$\geq 30$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

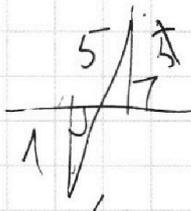
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\boxed{2\sqrt{\frac{R-1}{R}}}$$



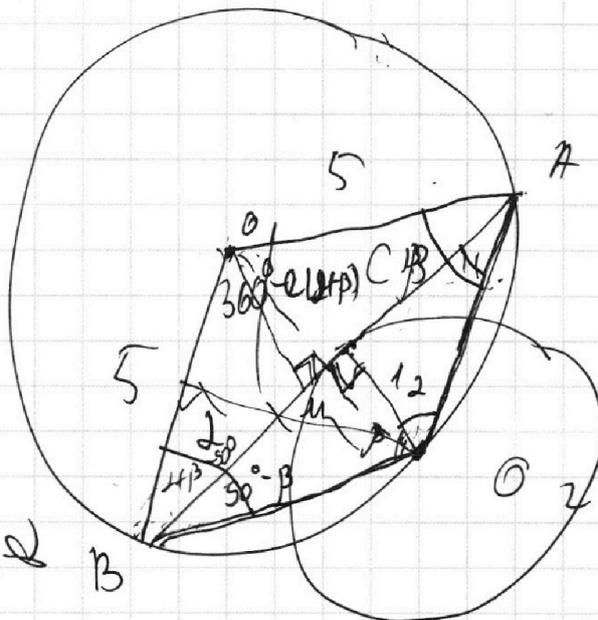
2,5 часа

R-2 $R \cos \beta$

$$R-2 = R \cos \beta$$

$$\boxed{\cos \beta = \frac{R-2}{R}}$$

$$\sin \beta = \frac{4\sqrt{R-1}}{2R} = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$$



$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$r = 1$$

$$R = 5$$

$$\frac{4(R-1) + R^2 - 4R^2}{R^2} = 1$$

$$\frac{R-2}{R}$$

$$\frac{2\sqrt{R-1}}{R}$$

~~cos beta =~~

$$\cos \beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$$

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}$$

$$\frac{\log 2}{\sin \beta} = \frac{AC}{CB} = 7$$

$$\frac{\sin 2 \cos \beta}{\sin \beta \cos 2} = 7$$

$$\frac{AC}{0,11} =$$

$$AB = 10 \cos \beta$$

$$AB = 80 \sin \beta \cos 2$$

$$\frac{BC}{0,2B} \cdot 0,2A$$

$$\boxed{\cos \beta = \frac{R-2}{R}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4. $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -7x + 1$

Замечаем: $\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a \\ \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b \end{cases}$

Получим

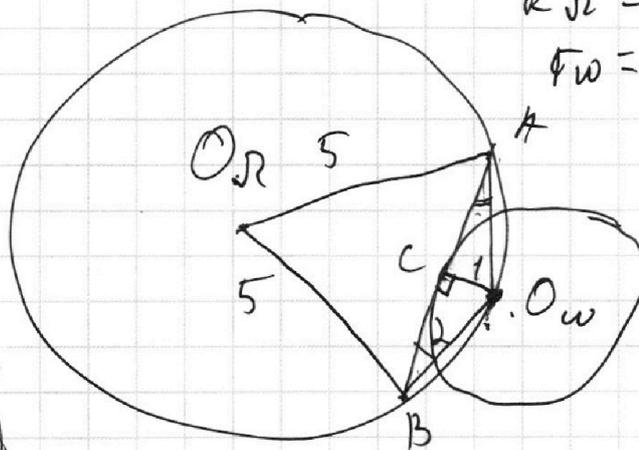
$a - b = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3 = 2x + 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$



$\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3$
 $\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + 3$
 $-\frac{62}{49} + 3 \neq 0$

3.



$R_R = 5 = R$
 $r_w = r = 1$

$\frac{AC}{CB} = 7$

$\frac{AC}{CB} = \frac{ctg A}{ctg B}$

$ctg A + ctg B = AB$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

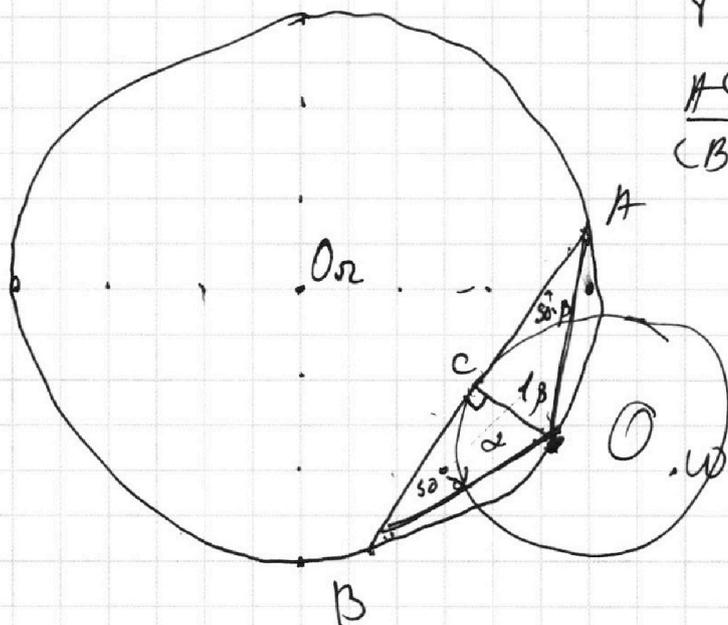
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.



$$\begin{aligned} R &= 5 \\ r &= 1 \\ \frac{AC}{CB} &= 7 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} AB - !$$

$$\frac{CB}{O\omega B} = \frac{AC}{O\omega A}$$

$$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = 10 \quad \text{tg } \beta = \frac{AC}{1}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} = 7$$

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = 7$$

$$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = 10$$

$$10 \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \beta \sin \alpha} = 7$$

$$10(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} = 7$$

$$\frac{O\omega B}{\cos \beta} = 10$$

$$80 \sin \alpha \cos \beta$$

$$BC =$$

$$O\omega B = 10 \cos \beta$$

$$7 \sin \alpha \cos \beta = \sin \beta \cos \alpha$$

$$O\omega A = 10 \cos \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.

AB - ?

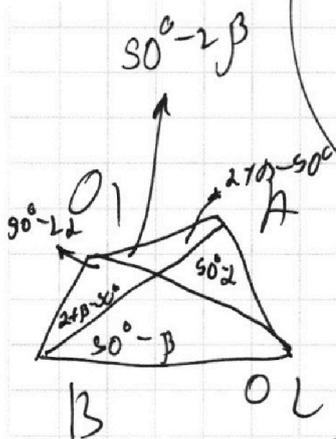
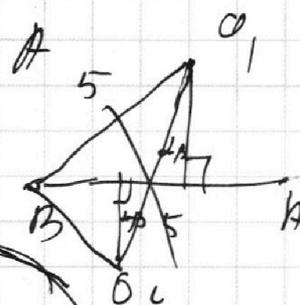
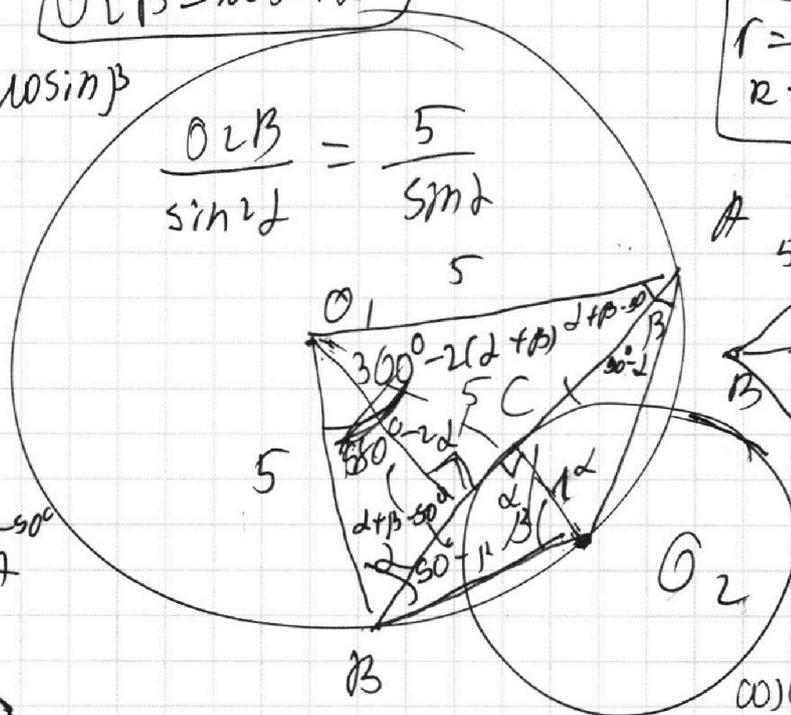
$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{7}$$

$$\begin{matrix} r=1 \\ R=5 \end{matrix}$$

$$O_2 B = 10 \sin \alpha$$

$$O_2 A = 10 \sin \beta$$

$$\frac{O_2 B}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin \alpha}$$



$$\frac{O_2 B \cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{AC}{CB} = 7$$

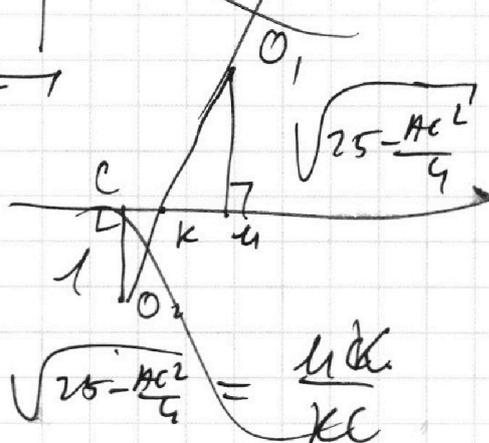
$$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = 7$$

$$AB = 10 (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$AB = 80 \sin \beta \cos \alpha$$

$$100 \sin^2 \alpha - 1 + 100 \sin^2 \beta - 1 = AB^2 - 25 - \frac{AC^2}{4}$$

$$100 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 = AB^2$$



$$\frac{AC}{CB} = 7$$

$$\frac{AK}{KC} = 1$$

$$\sqrt{25 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{AK}{KC}$$

$$\sqrt{25 - \frac{AC^2}{4}} = 1 = \frac{AK}{KC}$$

$$100 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - 2 = 80 \sin \beta \cos \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

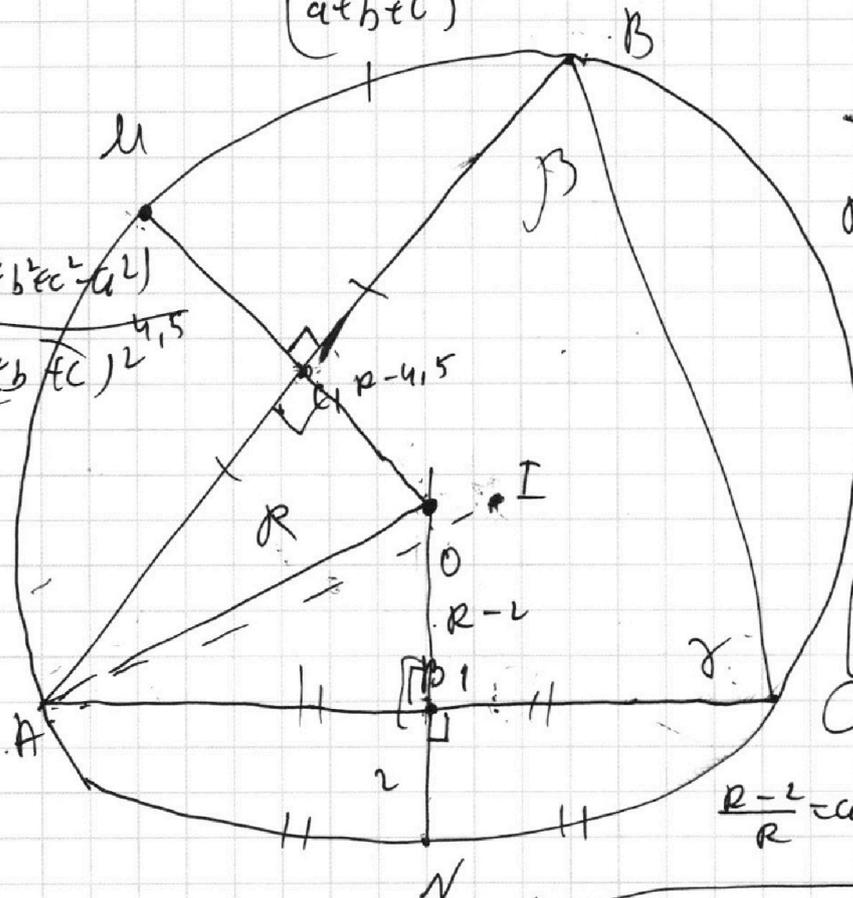
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.

$$\frac{b^2c^2 + b^2a^2 + 2bc(b^2+c^2-a^2)}{(a+b+c)^2}$$

$$2b^2c^2$$

$$\frac{2bc(bc + b^2c^2 - a^2)}{(a+b+c)^2 \cdot 4.5}$$



$\angle I - ?$

$$R - 4.5 = R \cos \alpha$$

$$R - L = R \cos \beta$$

$$2AB \cdot AC \cos \alpha$$

$$1 - \frac{4.5}{R} = \cos \alpha$$

$$1 - \frac{L}{R} = \cos \beta$$

$$\frac{R-L}{R} = \cos \beta$$

$$AB = 9(2R + 4.5)$$

$$AC = 4(2R + 2)$$

$$R^2 - (R - 4.5)^2$$

$$(R - R + 4.5)(R + R - 4.5)$$

$$4.5(2R + 4.5)$$

$$2(2R + 2)$$

$$AI^2 = ab = 4Rr$$

$$\vec{OI} = \frac{a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}{2R}$$

$$\vec{AI} = \frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{2R}$$

$$AI = bc \sin R$$

$$4 - R^2 \sin R = 4$$

$$\frac{\sqrt{4R - R^2}}{2} = \frac{4R - R^2}{4}$$

$$\sin \beta = \frac{4R - R^2}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>				

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + (ax + 10b)^2 = 4$ - имеет единственное решение

$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$ $\Delta = 400a^2b^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 400a^2b^2 - 400a^2b^2 + 4a^2 + 400b^2 - 4 = 4a^2 + 400b^2 - 4 = 0$

$\Delta_1 = 100a^2b^2 - (a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 + 4a^2 + 400b^2 - 4 = 0$

$4a^2 + 400b^2 - 4 = 0$

$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$; (*)

$(x + 8)^2 + a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 1$ - имеет решение

$(a^2 + 1)x^2 + 2(10ab + 8)x + 100b^2 + 63 = 0$

$\Delta_1 = 100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63 =$

$= -63a^2 - 100b^2 + 160ab + 1 = 0$

$63a^2 + 100b^2 - 160ab - 1 = 0$; (**)

Можно, чтобы (*) и (**) выполнялись одновременно:

$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$

$a^2 - 25b^2 + 1 = 0$

$63(\frac{a}{b})^2 - 160(\frac{a}{b}) - 1 = 0$

$63a^2 - 160ab + 100b^2 - 1 = 0$

Получаем:

$64a^2 - 160ab + 75b^2 = 0$

$64(\frac{a}{b})^2 - 160(\frac{a}{b}) + 75 = 0$

$\Delta_1 = 6400 - 4800 = 1600 = 40^2$

$\frac{a}{b} = \frac{80 + 40}{64} = \frac{120}{64} = \frac{60}{32} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

$\frac{a}{b} = \frac{40}{64} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

лист 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{48}{256} = \frac{3}{16}$$

$$\frac{64+16}{256} = \frac{80}{256}$$

$$\frac{64-16}{256} = \frac{48}{256}$$

$$\frac{32+16}{256} = \frac{48}{256}$$

$$8 \cdot 100$$

$$\frac{8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1005} = 5$$

$$\frac{1005}{11 \cdot 8} = 11 \frac{5}{8}$$

$$\frac{64}{256} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{16 \cdot 5}{16 \cdot 16} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{768}{256} = 3$$

$$\frac{32+16}{256} = \frac{48}{256}$$

$$256k^2 + 36^2 - 64bk = 1$$

$$256(\frac{k}{2})^2 + 36(\frac{k}{2}) + 3 = 0$$

$$D_1 = 2024$$

$$67k^2 - 16bk + 3 = 0$$

$$b = 16k$$

$$256k^2 + 4 = 0$$

$$252k^2 = 4$$

$$k^2 = \frac{4}{252} = \frac{1}{63}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

Мем 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3. $\sin \beta = \frac{4(R-1)}{2R}$

$\sin \beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{2R}$

$\frac{4(R-1)}{4R^2} + \frac{(R-1)^2}{R^2} = \frac{R-1 + (R-1)^2}{R^2} = 1$

$\sin \beta = 0$

$\triangle ABC - \text{нп}$
 $\angle B = 50^\circ$

$\frac{\sqrt{R-1}}{R}$

$R - 1 + \frac{(R-1)^2}{R^2} = 1$
 $R^2 - 4R + 4 + R - 1 = R^2$

$\frac{AC}{CB} = 7$

$R - 1 + \frac{(R-1)^2}{R^2} = 1$

$\cos \beta = -1$

$-3R + 5 = 0$
 $3R = 5$
 $R = 1$

$-3R + 5 = 0$

$R = 1$

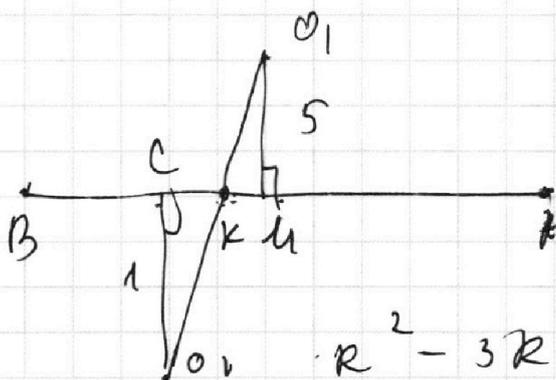
$\sin \beta \cos \beta = \frac{BC}{OB} \cdot \cos \beta = \frac{BC}{OB} \cdot \sin \beta$

$\cos \beta = \frac{1-L}{1}$

$OB = 10 \cos \beta$

$\frac{5}{\sin \beta} = \frac{OB}{\cos \beta}$

$OB = 10 \cos \beta$



$R^2 - 4R + 4 + R - 1 = R^2$

$\frac{BC \cos \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$

$\sum_{i=1}^n a_i$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

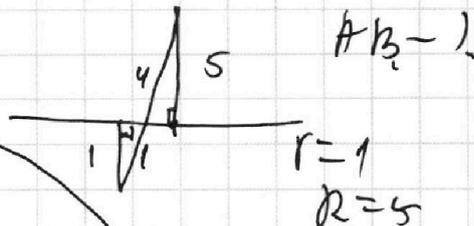
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

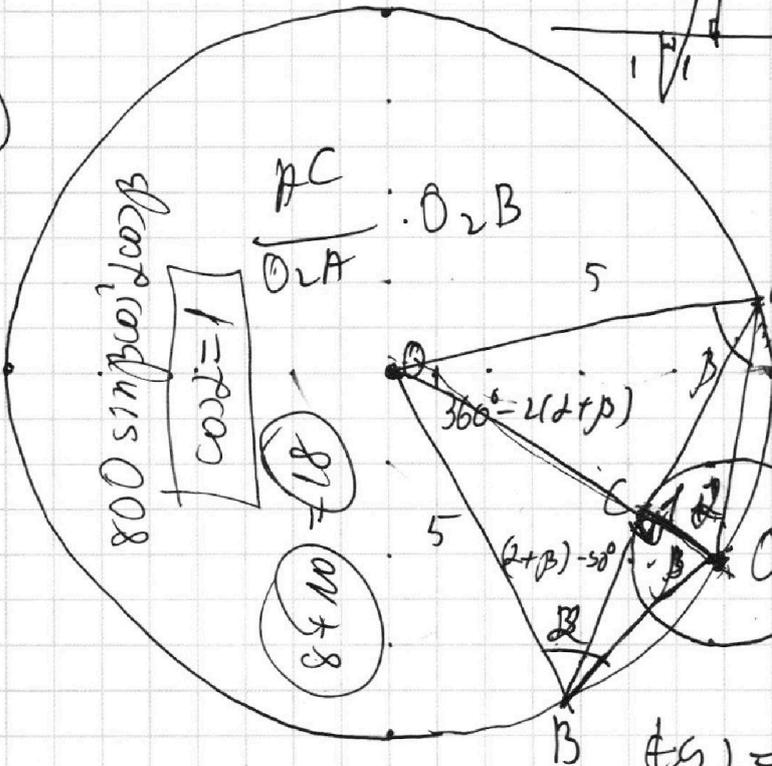


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.



$AB=1$



$$\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$$

$$80 \sin \alpha \cos \beta = \frac{80 \cdot 5}{50} = 8$$

$$= 5(\cos \alpha \cos \beta - 5 \sin \alpha \sin \beta)$$

$$16 \sin \alpha \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta - 5 \sin \alpha \sin \beta$$

$t \sin \alpha = AC$
 $t \cos \beta = BC$
 $\frac{a}{b} = 7$
 $a = 7b$

$\frac{t \sin \alpha}{t \cos \beta} = 7$

$$BC \cos \alpha = \sin \beta$$

$$BC \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{AC}{7} \cos \alpha \cos \beta$$

$$\frac{\sin 2 \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = 7$$

$$\frac{5}{\sin(2+\beta)} = \frac{AB}{\sin(2+\beta)}$$

$$AB = 10(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$80(\sin \beta \cos \beta)$$

$$5 = \frac{AB}{\sin(2+\beta)}$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = 7$$

$$AB = 50 \sin(2+\beta) \cos \alpha \cos \beta$$

$$AB = 100 \sin(2+\beta) \cos \alpha \cos \beta$$

$$800 \sin^2 \cos \beta \cos \alpha \cos \beta$$

$12 \times 5 + 5 = 22$
 $AB = 10 \cos \alpha \cos \beta$
 $AB = 80 \sin \beta \cos \alpha$
 $\frac{AB}{10} = 8 \sin \beta \cos \alpha$

*