МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Пусть $a = 2^{\alpha_a} \cdot 7^{\beta_a} \cdot A$, где α_a и β_a — неотрицательные целые числа, а $A \not\vdots\, 2$ и $A \not\vdots\, 7$; $b = 2^{\alpha_b} \cdot 7^{\beta_b} \cdot B$, где α_b и β_b — неотрицательные целые числа, а $B \not\vdots\, 2$ и $B \not\vdots\, 7$; $c = 2^{\alpha_c} \cdot 7^{\beta_c} \cdot C$, где α_c и β_c — неотрицательные целые числа, а $C \not\vdots\, 2$ и $C \not\vdots\, 7$. Также A, B и C — натуральные числа. Иначе говоря: α_a, α_b и α_c — максимальные степени двойки, на которые делятся a, b и c соответственно; β_a, β_b, β_c — максимальные степени семёрки, на которые делятся a, b и c соответственно.

Тогда
$$ab = 2^{\alpha_a+\alpha_b} \cdot 7^{\beta_a+\beta_b} \cdot AB, \text{ где } AB \not\vdots\, 2 \text{ и } AB \not\vdots\, 7;$$
$$bc = 2^{\alpha_b+\alpha_c} \cdot 7^{\beta_b+\beta_c} \cdot BC, \text{ где } BC \not\vdots\, 2 \text{ и } BC \not\vdots\, 7;$$
$$ac = 2^{\alpha_a+\alpha_c} \cdot 7^{\beta_a+\beta_c} \cdot AC, \text{ где } A\cdot C \not\vdots\, 2 \text{ и } A\cdot C \not\vdots\, 7.$$

По условию:
$$\begin{cases} ab \,\vdots\, (2^{14}\cdot 7^{10}) \Leftrightarrow [\alpha_a+\alpha_b \geqslant 14 \text{ и } \beta_a+\beta_b \geqslant 10] \\ bc \,\vdots\, (2^{17}\cdot 7^{17}) \Leftrightarrow [\alpha_b+\alpha_c \geqslant 17 \text{ и } \beta_b+\beta_c \geqslant 17] \\ ac \,\vdots\, (2^{30}\cdot 7^{37}) \Leftrightarrow [\alpha_a+\alpha_c \geqslant \cancel{30}\ 20 \text{ и } \beta_a+\beta_c \geqslant 37] \end{cases}$$

Таким образом:
$$\begin{cases} (\alpha_a+\alpha_b)+(\alpha_b+\alpha_c)+(\alpha_a+\alpha_c) \geqslant 14+17+30 = 51 \\ (\beta_a+\beta_b)+(\beta_b+\beta_c)+(\beta_a+\beta_c) \geqslant 10+17+37 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c) \geqslant 51 \\ 2(\beta_a+\beta_b+\beta_c) \geqslant 64 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_a+\alpha_b+\alpha_c \geqslant 25{,}5. \text{ Но } (\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c) \in \mathbb{Z}\ (*) \\ \beta_a+\beta_b+\beta_c \geqslant 32. \text{ Но } \beta_a+\beta_c \geqslant 37 \text{ и } \beta_b \geqslant 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta_a+\beta_b+\beta_c \geqslant 37 \end{cases}$$

$*$ если $\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c \leqslant 25 < 25{,}5$, то противоречие. Значит $\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c \geqslant 26$

$$abc = 2^{\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c} \cdot 7^{\beta_a+\beta_b+\beta_c} \cdot ABC \geqslant \boxed{2^{26}\cdot 7^{37}}$$

~~Пример: $a = 2^{11}\cdot 7^{17}$; $b = 2^{9}$; $c = 2^{16}\cdot 7^{20}$~~

~~Пример (на $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$): $a = 2^{6}\cdot 7^{17}$; $b = 2^{8}$; $c = 2^{12}\cdot 7^{20}$. Тогда:~~

~~$ab = 2^{15}\cdot 7^{17}$, а $(2^{15}\cdot 7^{17}) \,\vdots\, (2^{14}\cdot 7^{10})$~~

~~$bc = 2^{17}\cdot 7^{20}$, а $(2^{17}\cdot 7^{20}) \,\vdots\, (2^{17}\cdot 7^{17})$~~

~~$ac = 2^{17}\cdot 7^{20}$, а $(2^{17}\cdot 7^{20}) \,\vdots$~~

~~abc~~

Пример на $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$: $a = 2^{9}\cdot 7^{17}$; $b = 2^{6}$; $c = 2^{11}\cdot 7^{20}$. Тогда:

1) $ab = (2^{15}\cdot 7^{17})$, то есть $\vdots\, (2^{14}\cdot 7^{10})$
2) $bc = (2^{17}\cdot 7^{20})$, то есть $\vdots\, (2^{17}\cdot 7^{17})$
3) $ac = (2^{20}\cdot 7^{37})$, то есть $\vdots\, (2^{20}\cdot 7^{37})$
4) $abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2

По условию: НОД $(a;b)=1$, иначе НОД $(a;b)=d\geq 2 \Rightarrow (d\in \mathbb{N})$ $a=k_a d$ $(k_a\in\mathbb{N};\ k_a<a$, т.к. $d\geq 2)$ и $b=k_b d$ $(k_b\in\mathbb{N};\ k_b<b$, т.к. $d\geq 2)$ $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\cancel{d}\cdot k_a}{\cancel{d}\cdot k_b}=\frac{k_a(\neq a)}{k_b(\neq b)}$. Противоречие.

Пусть мы нашли нужное m. Тогда $(a+b)\vdots m$ и $(a^2-6ab+b^2)\vdots m$. Заметим, что $a^2-6ab+b^2=(a+b)^2-8ab$. Так как $(a+b)\vdots m$, то $(a+b)^2\vdots m$. Но $((a+b)^2-8ab)\vdots m \Rightarrow$ $\Rightarrow 8ab \vdots m$. Сразу отметим, что m – ~~целое число~~ натуральное число, большее 1 (т.к. „сократить на 1" – бессмысленное понятие, правильно „не сократить"). Предположим, что $\exists\, p$ – простое число: $a\vdots p$ и $m\vdots p$. Так как $(a+b)\vdots m\vdots p$, то $(a+b)\vdots p$. Но $a\vdots p \Rightarrow b\vdots p \Rightarrow$ НОД$(a;b)\vdots p$. Но $p\geq 2$. Противоречие. Значит если $m\vdots p$, где p – простое число, то $a \not\vdots\, p$ и (аналогично) $b\not\vdots\, p$. Таким образом, НОД $(ab, m)=1$, так как НОД$(a,m)=1$ и НОД$(b,m)=1$. Использовали, что натуральное число, которое ≥ 2, имеет х.б. 1 простой делитель.

Так как $8ab\vdots m$, а НОД $(ab, m)=1$, то $8\vdots m$. Таким образом, $m\leq \boxed{8}$

Пример на $m=8$: $a=3$ и $b=53$. Тогда (поскольку 3 и 53 – различные простые числа) НОД$(a,b)=$ НОД$(3,53)=1$, то есть дробь $\frac{a}{b}=\frac{3}{53}$ несократима $(a=3\in\mathbb{N};\ b=53\in\mathbb{N})$.

Дробь на доске равна $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{3+53}{3^2-6\cdot 3\cdot 53+53^2}=\frac{56}{9-\overset{954}{6\cdot 159}+(2500+300+9)}=\frac{56}{2818-954}=\frac{56}{1864}=\frac{7\cdot 8}{233\cdot 8}=\frac{7}{7\cdot 33+2}$.

Как видим, $233\not\vdots\, 7$ (т.к. $2\in(1;6)$, т.е. $\neq 0$) $\Rightarrow$ дробь можно сократить максимум на 8.

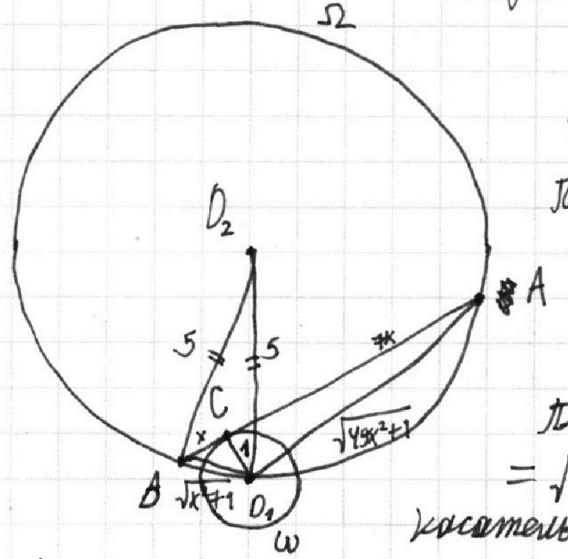
$\boxed{\text{Ответ: } 8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

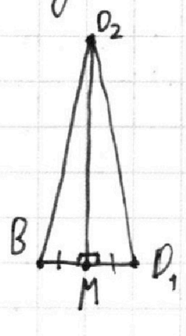
Задача №3



Пусть $BC = x$. По условию: $\frac{AC}{CB} = 7$, откуда $AC = 7x$.
Пусть O_1 – центр ω; O_2 – центр Ω.
AB касается ω $\Rightarrow$ (по свойству касательной к окружности) $O_1C \perp AB \Rightarrow \Delta ACO_1$ и ΔBCO_1 – прямоугольные треугольники. По теореме Пифагора: $BO_1 = \sqrt{BC^2+CO_1^2} =$ (т.к. $CO_1 = R_\omega = 1$ по свойству касательной к окружности) $= \sqrt{x^2+1}$ и

$AO_1 = \sqrt{AC^2+CO_1^2} = \sqrt{49x^2+1}$.

Рассмотрим ΔBO_2O_1: он равнобедренный (т.к. $BO_2 = O_1O_2 = R_\Omega = 5$; по признаку равнобедренного Δ-а), у него $BO_1 = \sqrt{x^2+1}$. Пусть M – середина BO_1, то есть $BM = O_1M = \frac{BO_1}{2} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. По свойству



равнобедренного Δ-а: O_2M – высота ΔBO_2O_1, т.е. $O_2M \perp BO_1$, т.е. $O_2M \perp BM$, т.е. ΔBO_2M прямоугольный. Значит $BM = BO_2 \cdot \sin\angle BO_2M \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} =$ (по свойству равнобедренного Δ-а: O_2M – биссектриса ΔBO_2O_1, т.е. $\angle BO_2M = \angle MO_2O_1 = \frac{\angle BO_2O_1}{2}$) $5 \cdot \sin\frac{\angle BO_2O_1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} =$ (по свойству вписанного угла: $\angle BAO_1 = \frac{\angle BO_2O_1}{2}$) $10 \cdot \sin\angle BAO_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} =$ ($\angle CAO_1 = \angle BAO_1$, т.к. $C \in AB$) $10\sin\angle CAO_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 10\frac{CO_1}{AO_1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1} = 10 \Leftrightarrow$ ($x^2+1 \geq 1 > 0$ и $49x^2+1 \geq 1 > 0$) $(x^2+1)(49x^2+1) =$
$= 100 \Leftrightarrow 49(x^2)^2 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow (49(x^2)^2 + 99x^2) - (49x^2 + 99) =$
$= 0 \Leftrightarrow (49x^2+99)(x^2-1) = 0$. Так как $49x^2+99 \geq 99 > 0$, то $x^2-1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x>0)\ x = 1 \Leftrightarrow BC = 1 \Rightarrow AB = BC + AC = x + 7x = 8x = \boxed{8}$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Leftrightarrow \sqrt{(2x^2+2x+1)+(2-7x)}-$$
$$-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Leftrightarrow \left(a=\sqrt{2x^2+2x+1};\ b=2-7x\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b}-a=b \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b}=a+b.$$

Отметим, что по ОДЗ: $a^2+b\geq 0$ и $\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0$. А из последнего равенства получаем:

$$\begin{cases} a+b\geq 0 \\ a^2+b=a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow b^2+2ab-b=0 \Leftrightarrow b(b+2a-1)=0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \Leftrightarrow 2-7x=0 \Leftrightarrow x=3{,}5 \text{ (см. далее)} \\ b+2a-1=0 \Leftrightarrow 2a=1-b \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1}=1-(2-7x)=7x-1, \end{array}\right.$$

откуда получаем: $\begin{cases} 7x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{7} \\ 4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1 \Leftrightarrow 8x^2+ \\ +8x+4=49x^2-14x+1 \Leftrightarrow 41x^2-22x-3= \end{cases}$

$$=0 \Rightarrow D'=\left(\frac{22}{2}\right)^2-41\cdot(-3)=121+123=244\ (>0) \Rightarrow x=\frac{-\frac{(-22)}{2}\pm\sqrt{244}}{41}=$$
$$=\frac{11\pm 2\sqrt{61}}{41} \text{ (см. далее)}$$

Итак, получили 3 корня: $x_1=3{,}5;\ x_2=\frac{11-2\sqrt{61}}{41};\ x_3=\frac{11+2\sqrt{61}}{41}$.
Отметим, что $2x^2+2x+1=2\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+0{,}5\right)=$
$=2\left((x+0{,}5)^2+(0{,}5-0{,}25)\right)=2(x+0{,}5)^2+0{,}5\geq 0{,}5>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a$ всегда имеет смысл. Осталось проверить, что $a^2+b\geq 0$ и $a+b\geq 0$.

При ~~$x_1=3{,}5$~~ $x=3{,}5$: $a=\sqrt{2(3{,}5+0{,}5)^2+0{,}5}=\sqrt{32{,}05}$ и $b=2-7\cdot 3{,}5=$
$=-22{,}5$. Тогда $a+b=\sqrt{32{,}05}-22{,}5<\sqrt{36}-22{,}5=6-22{,}5=-16{,}5<0$ (!)

~~При~~ $\cancel{x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}:\ b=2-7\cdot\frac{11-2\sqrt{61}}{41}=\frac{82-77+14\sqrt{61}}{41}=\frac{5+14\sqrt{61}}{41}}$ ~~и~~

$\cancel{a=\sqrt{2\left(\frac{11-2\sqrt{61}}{41}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2\cdot\left(\frac{22-4\sqrt{61}+41}{82}\right)^2+\frac{1}{2}}=}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$= \cancel{\sqrt{\frac{2}{82^2}(63-4\sqrt{61})^2+\frac{1}{2}}} =$

значит $x_1 = 3{,}5$ – НЕ решение.

Заметим, что $2x^2-5x+3=(2x^2-3x)-(2x-3)=(2x-3)(x-1)$

При $x=\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$: $(2x-3)(x-1)=\left(\frac{22\pm4\sqrt{61}}{41}-3\right)\left(\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}-1\right)=$

$=\frac{-101\pm4\sqrt{61}}{41}\cdot\frac{-30\pm2\sqrt{61}}{41}=\frac{8\cdot61\pm(-30\cdot4-101\cdot2)\sqrt{61}+3030}{41^2}=$

$=\frac{3518\mp322\sqrt{61}}{41^2}$. Заметим, что $3518>322\sqrt{61}$ (т.к. $322\cdot\sqrt{61}<322\cdot\sqrt{100}$ $(61<100)=3220<3518$) $>-322\sqrt{61}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-5x+3\geqslant0$ при $x=\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$, т.е. $a^2+b\geqslant0$.

Осталось проверить, что $a+b\geqslant0$ $\Leftrightarrow$ ~~при $x=\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$~~.

~~$b=2-7\cdot\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$~~ $\Leftrightarrow a\geqslant-b\Leftrightarrow\sqrt{2x^2+2x+1}\geqslant7x-2\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7x<2\Leftrightarrow x<\frac{2}{7} \\ \begin{cases} 7x\geqslant2\Leftrightarrow x\geqslant\frac{2}{7} \\ 2x^2+2x+1\geqslant49x^2-28x+4\Leftrightarrow 47x^2-30x+3\leqslant0. \end{cases}\end{array}\right.$ Корни

многочлена $x_{1,2}=\frac{-\left(\frac{-30}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2-47\cdot3}}{47}=\frac{15\pm\sqrt{225-141}}{47}=$

$=\frac{15\pm\sqrt{84}}{47}=\frac{15\pm2\sqrt{21}}{47}\Rightarrow x\in\left[\frac{15-2\sqrt{21}}{47};\frac{15+2\sqrt{21}}{47}\right]$ (метод интервалов)

$+\quad-\quad+$, $\frac{15-2\sqrt{21}}{47}$, $\frac{15+2\sqrt{21}}{47}$

~~$\frac{15-2\sqrt{21}}{47}\ ?\ \frac{2}{7}\Leftrightarrow 15-2\sqrt{21}\ ?\ 94$ (меньше)~~ ~~(метод интервалов)~~

~~$\frac{15+2\sqrt{21}}{47}\ ?\ \frac{2}{7}\Leftrightarrow 15+2\sqrt{21}\ ?\ 94$ (меньше, т.к. $2\sqrt{21}<2\sqrt{25}$ $(21<25)=10<79$)~~

~~Таким образом, $x\leqslant\frac{15+2\sqrt{21}}{47}<2\leqslant$~~

$\frac{15-2\sqrt{21}}{47}\ ?\ \frac{2}{7}\Leftrightarrow 105-14\sqrt{21}\ ?\ 94\Leftrightarrow 11\ ?\ 14\sqrt{21}$ (меньше, т.к. $14\sqrt{21}>14$ $(21>1)$)

$\frac{15+2\sqrt{21}}{47}\ ?\ \frac{2}{7}\Leftrightarrow 105+14\sqrt{21}\ ?\ 94$ (больше) $\Rightarrow x\in\left[\frac{2}{7};\frac{15+2\sqrt{21}}{47}\right]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Итак, $x \le \frac{15+2\sqrt{21}}{47}$

Пусть $x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ — корень. Тогда:

$$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} \le \frac{15+2\sqrt{21}}{47} \Leftrightarrow \cancel{517}^{\,0} - \cancel{94}^{\,47}\sqrt{61} \le \cancel{(410+205)}^{\,\cancel{615}\ \cancel{98}\ 49} + \cancel{82}^{\,41}\sqrt{21} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 47\sqrt{61} + 49 + 41\sqrt{21} \text{ (выполняется)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41} \text{ — корень.}$$

Пусть $x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ — корень. Аналогично $47\sqrt{61} \le 49 + 41\sqrt{21}$. ~~Но $49+41\sqrt{21} > 49+41\cdot\sqrt{16}$ $(21>16)$ = $= 49+41\cdot 4 = 213$. А $47\sqrt{61}$~~

~~$\Leftrightarrow 47^2\cdot 61 \le 49^2 + 41^2\cdot 21 + 2\cdot 49\cdot 41\cdot\sqrt{21} \Leftrightarrow$~~

~~$\sqrt{21} \ge 4{,}5$, т.к. $21 \ge 20{,}25 \Rightarrow 49+41\sqrt{21} \ge 49+41\cdot 4{,}5 =$ $= 233{,}5$.~~ Но $47\sqrt{61} > 47\cdot 7{,}5$ (т.к. $61 > 56{,}25$) $=$
$= 329 + 23{,}5 = 353{,}5$. А $49 + 41\sqrt{21} \le 49 + 41\cdot 5$ (т.к. $21 < 25$) $=$
$= 49 + 205 = 254$. И $254 < 353{,}5$. Значит $47\sqrt{61} >$
$> 49 + 41\sqrt{21}$ (!) $\Rightarrow x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ — НЕ корень.

Таким образом, единственный корень уравнения — это $x_2 = \boxed{\frac{11-2\sqrt{61}}{41}}$

Ответ: $\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

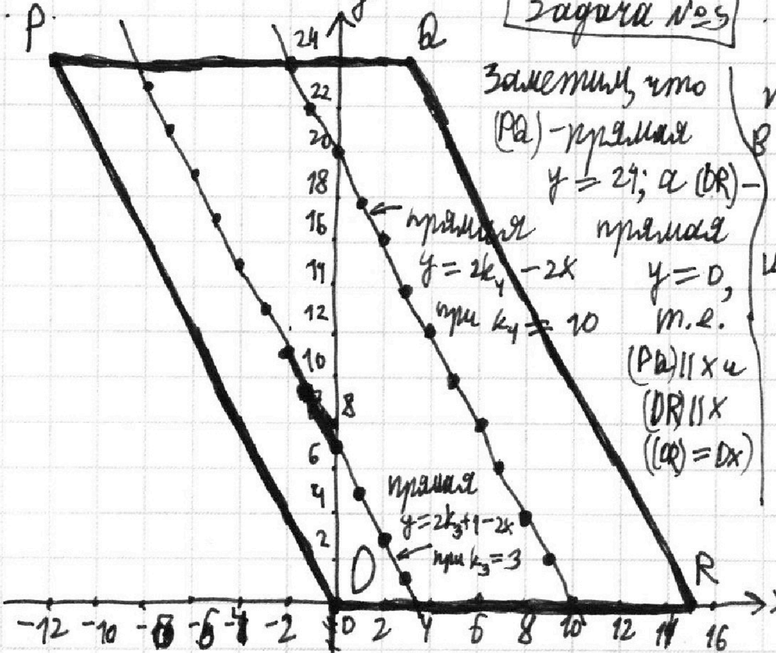
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [x] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{\text{Задача №5}}$



Заметим, что (PQ) - прямая $y=24$; а (OR) - прямая $y=0$, т.е. $(PQ)\parallel x$ и $(OR)\parallel x$ $((OR)=Ox)$

Нужно посчитать кол-во пар точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ таких, что x_1, x_2, y_1, y_2 - целые числа, и $(2x_2+y_2)-(2x_1+y_1)=12$

Что представляет из себя множество точек $(x;y)$, где $2x+y=z$, где z - целое число? Это прямая $y=z-2x$. А что из себя представляют прямые (PO) и (QR): Порассуждаем для (PO): пусть это прямая $y=k_1x+b_1$. Тогда:

$$\begin{cases} \underbrace{k_1\cdot 0+b_1=0}_{\text{(точка O)}} \Leftrightarrow b_1=0 \\ k_1\cdot(-12)+b_1=24 \; \text{(точка P)} \end{cases} \Rightarrow -\cancel{12}^{1}k_1=\cancel{24}^{2} \Leftrightarrow k_1=-2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (PO)$ - это прямая $y=-2x$ (здесь $z=0$).

Аналогично (QR) - это прямая $y=k_2x+b_2$:

$$\begin{cases} \underbrace{k_2\cdot 15+b_2=0}_{\text{(точка R)}} \Leftrightarrow b_2=-15k_2 \\ \underbrace{k_2\cdot 3+b_2=24}_{\text{(точка Q)}} \Leftrightarrow b_2=24-3k_2 \end{cases} \Rightarrow 24-3k_2=\cancel{15}^{12}k_2 \Leftrightarrow k_2=-2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_2=30 \Rightarrow (QR)$ - это прямая $y=30-2x$ (здесь $z=30$)

Пусть ~~$2x_2+y_2$~~ точка $(x_2; y_2)$ лежит на прямой $y=z_2-2x$, а точка $(x_1; y_1)$ лежит на прямой $y=z_1-2x$. Здесь z_1 и z_2 - целые числа, при этом $z_1\in[0;30]$ и $z_2\in[0;30]$. Тогда $z_2-z_1=12 \Leftrightarrow z_2=z_1+12 \Rightarrow z_1+12\in[0;30] \Leftrightarrow z_1\in[-12;18] \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1\in[0;18]$ $(\Rightarrow z_2\in[12;30])$. Заметим, что [при $\forall z$: прямая $y=z-2x$ параллельна PO и QR], т.к. коэффициенты при x в $y=z-2x$, $y=-2x$ и $y=30-2x$ одни и те же. Таким образом, если $z=2k_3+1$ ($k_3\in\mathbb{Z}$ и $k_3\in[0;14]$), то в параллелограмме лежат точки с целыми ~~координатами~~

~~$(0;1)$, $(1;3)$ $(k;1)$; $((k-1);3)$; $((k-2);5)$; ... ; $((k-i);1+2i)$ $(i\in\mathbb{Z}$ и $i\in[0;14])$; ... ; $((k-14)$;~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~координатами $((x-i); (1+2i))$, где $i \in \mathbb{Z}$ и $i \in [0;11]$. Действительно, если $1+2i \in [0;24]$, то $i \in [-0,5; 11,5] \Rightarrow i \in [0;11]$, ведь $i \in \mathbb{Z}$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$ и $x-i$~~

координатами $(x; 2k_3+1-2x)$, ~~где~~ Поскольку $L_z \parallel PO$ и $L_z \parallel RQ$ (L_z задаётся уравнением $y = z-2x$), то проверку на абсциссу x делать не нужно: нужно сделать проверку на ординату: $(2k_3+1-2x) \in [0;24] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x-2k_3-1) \in [-24;0] \Leftrightarrow 2x \in [2k_3-23; 2k_3+1] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in [\underbrace{k_3-11,5}_{(k_3-12;\,k_3-11)}; \underbrace{k_3+0,5}_{(k_3;\,k_3+1)}] \Rightarrow x \in [\underbrace{k_3-11}_{\mathbb{Z}}; \underbrace{k_3}_{\mathbb{Z}}]$.

Получаем на L_z 12 ~~раз~~ точек, разрешённых по условию. (и кстати, не лежащих на границе)

~~Если $z = 2k_4 - 2x$~~ * $2k_3+1 \in [0;30] \Leftrightarrow k_3 \in [-0,5; 14,5] \Rightarrow$
$\Rightarrow k_3 \in [0;14]$

Если $z = 2k_4 - 2x$ ($k_4 \in \mathbb{Z}$; $2k_4 \in [0;30] \Leftrightarrow k_4 \in [0;15]$), то в параллелограмме (возможно, на границе) лежат точки с целыми координатами $(x; 2k_4-2x)$. Аналогично $(2k_4-2x) \in [0;24] \Leftrightarrow 2x-2k_4 \in [-24;0] \Leftrightarrow x \in [k_4-12; 0]$.
Получаем на L_z 13 точек, разрешённых по условию.

Итак, получаем, что на каждой из 16 ~~на~~ прямых $y=-2x$; $y=2-2x$; ...; $y=30-2x$ ~~лежат~~ по отдельности лежит ровно 13 ~~подходящих~~ разрешённых точек, а на каждой из 15 прямых $y=1-2x$; $3-2x$; ...; $y=29-2x$ по отдельности лежит ровно 12 разрешённых точек. Заметим, что из $z_2-z_1=12$ следует, что (т.к. $z_1 \in \mathbb{Z}$ и $z_2 \in \mathbb{Z}$) z_1 и z_2 одной чётности (или оба чётные, или оба нечётные). Нам подходят пары z_1, z_2 I вида $(2j; 2j+12)$, где $j \in [0;9]$ (т.к. $z_1 \in [0;18]$), II вида $(2m+1; 2m+13)$, где $m \in [0;8]$ (т.к. $z_1 \in [0;18]$, то $2m+1 \in [0;18] \Leftrightarrow m \in [-0,5; 8,5] \Rightarrow m \in [0;8]$).
Пар I вида 10; пар II вида 9. По структуре пар, в каждой из пар z_1 и z_2 I вида есть ровно $13^2=169$ нужных пар A и B, а в каждой из пар z_1 и z_2 II вида — ровно $12^2=144 \Rightarrow$ всего нужных пар A и B $169 \cdot 16 + 144 \cdot 15 =$ ~~$(170-1) \cdot 16 + 72 \cdot 30 =$~~
$= 338 \cdot 8 + 72 \cdot 30 = 2704 + 2160 = \boxed{4864}$

$\boxed{\text{Ответ: } 4864}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

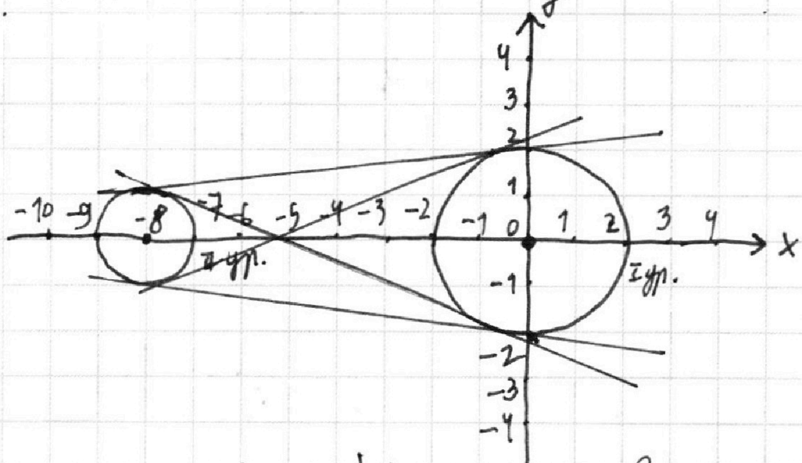
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \ (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \ (2) \end{cases}$$

Из (1): $y = ax + 10b$

Из (2): $\cancel{(x+8)^2 + y^2 \geq 1}$
$\cancel{x^2+y^2 \geq 4}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1^2 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1^2 \\ x^2 + y^2 \geq 2^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим графики уравнений $\overbrace{(x+8)^2 + y^2 = 1^2}^{(\text{I ур.})}$ (окружность радиусом 1 в центре $(-8;0)$) и $\underbrace{x^2+y^2 = 2^2}_{(\text{II ур.})}$ (окружность радиусом 2 в центре $(0;0)$):



Система 2 задаёт множество точек, лежащих или в окружности I уравнения (или на границе), или в окружности II уравнения (или на границе).

Заметим, что $\forall$ прямая ~~в координатной плоскости~~ пересекает круг (сейчас имеется ввиду ~~круг~~ круг, а не окружность, то есть круг — это окружность + все точки внутри неё) или в 0 точках, или в 1 точке, или в ∞ множестве точек. Тогда посмотрим, сколько всего решений в зависимости от того, как пересекает прямая $y = ax + 10b$ (1) 2 круга (см. выше окружности, которые их задают). Как видим из табл. справа, ~~нас~~ подходящий случай только при касании обоих кругов, то есть обеих окружностей. Таким образом, нужно найти уравнения всех ~~касательных~~ прямых, касающихся обеих окружностей.

кол-во т.п.с II \ кол-во т.п.с I	0	1	∞
0	0	1	∞
1	1	2	∞
∞	∞	∞	∞

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Пусть~~ Таким образом, нам нужно найти такие a и b, чтобы ~~ур~~ каждая из ~~уравнений~~ систем уравнений

I сист. ур. $\begin{cases}(x+8)^2+y^2=1^2\\ y=ax+10b\end{cases}$ и II сист. ур. $\begin{cases}x^2+y^2=2^2\\ y=ax+10b\end{cases}$ имела ровно 1 решение.

Подставим y из нижнего уравнения в верхнее (и в I системе, и во II системе). ~~Получим систему~~ уравнений:

$\cancel{(x+8)^2+(ax+10b)^2=1^2}$
$\cancel{x^2+(ax+10b)}$

I) $(x+8)^2+(ax+10b)^2=1 \Leftrightarrow (x^2+16x+\overset{63}{\cancel{64}})+(a^2x^2+20abx+100b^2)=0 \Leftrightarrow x^2(a^2+1)+x(20ab+16)+(100b^2+63)=0$

$D_I'=\left(\frac{20ab+16}{2}\right)^2-(a^2+1)(100b^2+63)=4(5ab+4)^2-(100a^2b^2+63a^2+100b^2+63)=\cancel{100a^2b^2}+160ab+\overset{1}{\cancel{64}}-\cancel{100a^2b^2}-63a^2-100b^2-\cancel{63}=160ab-63a^2-100b^2+1$

II) $x^2+(ax+10b)^2=4 \Leftrightarrow x^2+(a^2x^2+20abx+100b^2)=4 \Leftrightarrow x^2(a^2+1)+20abx+(100b^2-4)=0$

$D_{II}'=\left(\frac{20ab}{2}\right)^2-(a^2+1)(100b^2-4)=\cancel{100a^2b^2}-(\cancel{100a^2b^2}+100b^2-4a^2-4)=4a^2-100b^2+4$

Заметим, что для $\forall x\in(-\infty,+\infty)$: $\exists$ единственный y: $y=ax+10b$. ~~Если $y_1=y_2$, то $ax_1+10b=ax_2+10b$~~ Значит:

$\begin{cases}D_I'=0 \Leftrightarrow 160ab-63a^2-100b^2+1=0\\ D_{II}'=0 \Leftrightarrow 4a^2-100b^2+4=0\end{cases} \Rightarrow (160ab-63a^2-\cancel{100b^2}+1)-(4a^2-\cancel{100b^2}+4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 160ab-67a^2-3=0 \Leftrightarrow b=\frac{67a^2+3}{160a}$. Подставим b в нижнее уравнение: $4a^2-100\cdot\left(\frac{67a^2+3}{160a}\right)^2+4=0 \Leftrightarrow 4a^2-\frac{67^2a^4+402a^2+9}{256a^2}\cdot 100+4=0 \Leftrightarrow 1024a^4-(4489a^4+402a^2-9)+1024=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1024-4489)t^2 \; (t=a^2)-402t+1015=0 \Leftrightarrow 3465t^2+402t-1015=0 \Rightarrow D=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Leftrightarrow 1024a^4 - (\overset{4489}{\overset{4440}{3600+840}+49})a^4 - \cancel{402a^2} - 9 + \overset{622a^2}{\cancel{1024a^2}} = 0 \Leftrightarrow$

$-3465 \quad (\text{т.к. } 67^2 = (60+7)^2)$

$\Leftrightarrow (1024 - 4489)a^4 + 622a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0$ (пусть $t = a^2 \Rightarrow 3465t^2 - 622t + 9 = 0$) $\Rightarrow D' = \left(\frac{-622}{2}\right)^2 - 9 \cdot 3465 = 311^2 - 31185 =$

$= (\text{т.к. } 311^2 = (300+11)^2)\ (\overset{58815}{\cancel{90000}} + 6600 + 121) - \cancel{31185} =$

$= 58815 + 6600 + 121 = 65536 = 4 \cdot 16384 = 4 \cdot 4 \cdot 4096 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1024 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 32^2 = 8^2 \cdot 32^2 = 256^2 (>0) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{-\left(\frac{-622}{2}\right) \pm 256}{3465} = \dfrac{311 \pm 256}{3465} = \left\{\dfrac{55}{3465}; \dfrac{567}{3465}\right\} =$

$= \left\{\dfrac{1}{63}; \dfrac{9}{55}\right\} \Rightarrow$ ~~$(t=a^2)$~~ $a \in$ ~~$\{-\sqrt{\ }$~~ $=$

$= \left\{\dfrac{1}{3^2} \cdot \dfrac{7}{7^2}; 3^2 \cdot \dfrac{55}{55^2}\right\} \Leftrightarrow a^2 \in \left\{7 \cdot \left(\dfrac{1}{21}\right)^2; 55 \cdot \left(\dfrac{3}{55}\right)^2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \boxed{\left\{-\dfrac{\sqrt{7}}{21}; -\dfrac{3\sqrt{55}}{55}; \dfrac{3\sqrt{55}}{55}; \dfrac{\sqrt{7}}{21}\right\}}$ $\left(\dfrac{1}{3\sqrt{7}} < \dfrac{3}{\sqrt{55}}, \text{ т.к.}\right.$

$\sqrt{55} < 9\sqrt{7}$, т.к. $\sqrt{55} < \sqrt{64}$ $(\underset{\text{т.к.}}{55 < 64}) = 8 < 9 < 9\sqrt{7}$ $(\text{т.к. } 7 > 1))$

Тогда (как видим, никакое $a \neq 0$) ищем в каждом случае b по формуле, выведенной ранее, здесь это делать не будем.

Ответ: $-\dfrac{3\sqrt{55}}{55}; -\dfrac{\sqrt{7}}{21}; \dfrac{\sqrt{7}}{21}; \dfrac{3\sqrt{55}}{55}$

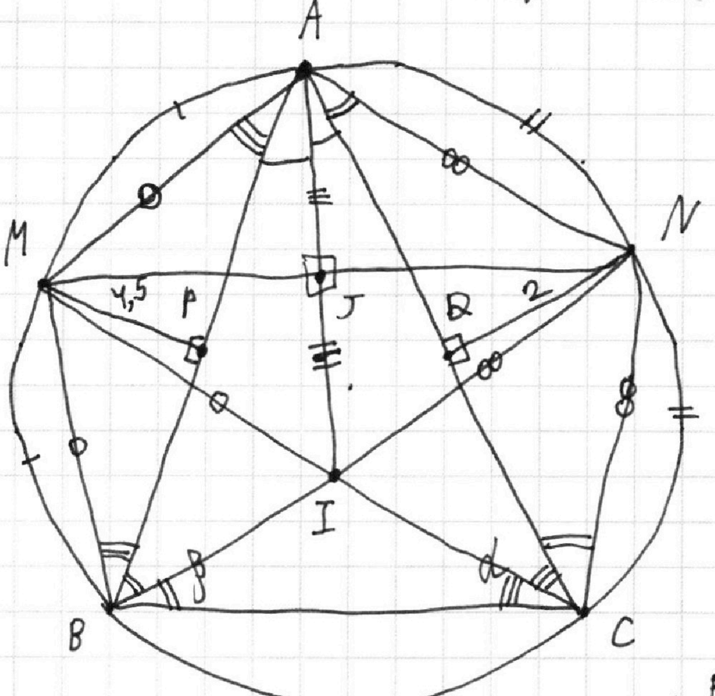
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

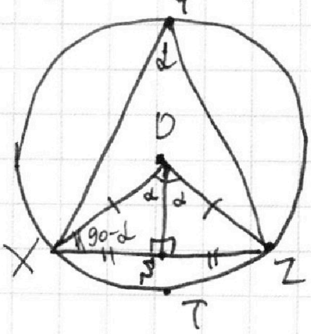
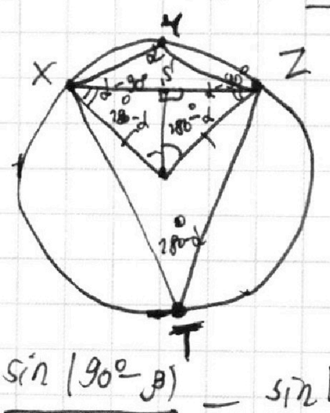
$\boxed{\text{Задача №7}}$



Пусть $MP \perp AB$ и $NQ \perp AC$, при этом $P \in AB$ и $Q \in AC$.
По условию:
$MP = 4,5$ и $NQ = 2$.
По теореме, обратной ~~тео~~ лемме о трезубце*:
CM – биссектриса $\angle ACB$, а BN – биссектриса $\angle ABC$.
По свойству вписанной окружности: I – центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, где $I = BN \cap CM$.
По лемме о трезубце:
~~BM~~ $MA = MB = MI$ и $NA = NC = NI$.

* так как ~~дуги MB и MA равны, то~~ ~~отре~~ $\cap MB = \cap MA$ ($\cap$ – дуга), то $MB = MA$. Аналогично $AN = NC$}

По признаку дельтоида ($AM = MI$ и $AN = NI$):
$AMIN$ – дельтоид $\Rightarrow$ (по свойству дельтоида) $AI \perp MN$ и ($J = AI \cap MN$) $AJ = JI = \frac{AI}{2} \Rightarrow AI = 2AJ$

Заметим, что (см. слева) $OS = R\sin(90^\circ - \alpha)$ ~~$XZ = 2R\sin\alpha$ и при $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ)$, и при $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ и при $\alpha = 90^\circ$ (тогда XZ – диам.)~~

Значит:
$OS = \cancel{R\sin(90^\circ\ \alpha)}\ \cancel{R\cos|\alpha|}\ R\sin(90^\circ - \alpha)$.

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{4,5} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{2} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{AJ}.$$

Далее решаем, предполагая, что:
1) $\alpha < 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$
2) $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ и $\frac{\alpha+\beta}{2} > 90^\circ$
3) $\alpha < 90^\circ$, $\beta > 90^\circ$ и ...

Получим $AJ \Rightarrow$ и ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!