



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad 1) ab = K \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}, K \in \mathbb{N}$$

$$2) bc = \ell \cdot 2^{17} \cdot 7^{44}, \ell \in \mathbb{N}$$

$$3) ac = p \cdot 2^{20} \cdot 7^{34}, p \in \mathbb{N}$$

! $\frac{1) \cdot 2)}{3)} \Rightarrow b^2 = \frac{K\ell}{p} \cdot \frac{2^{17}}{7^{10}} \neq K\ell \neq 7^{10}$

• $\frac{2) \cdot 3)}{1)} \quad c^2 = \frac{p\ell}{K} \cdot 2^{23} \cdot 7^{44}$ С числа с
степень 7 ~~не~~ 17

• $\frac{1) \cdot 3)}{2)} \quad a^2 = \frac{Kp}{\ell} \cdot 2^{17} \cdot 7^{30} \Rightarrow K \vdash 7^6$

• 1) · 2) · 3) $(abc)^2 = Kp\ell \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

~~Запись~~: $Kp\ell \vdash 7^{10} \rightarrow Kp\ell \vdash 7^{10}$, также

Крпль должно быть кратно двум, чтобы степень
двоих стала четной

$$Kp\ell = 2^{2x+1} \cdot 7^{10}, \text{ где}$$

$$Kp\ell \geq 2 \cdot 7^{10} \quad x \in \mathbb{N}$$

$$(abc)^2 \geq 2^{52} \cdot 7^{44} \quad abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

~~При~~ Пример когда $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$$a = 2^5 \quad b = 2^{12} \cdot 7^{21} \quad c = 2^9 \cdot 7^{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\text{N}^{\circ} 2. \frac{a}{b}$ - несократимая дробь $a \in N, b \in N$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} \quad m = ? \quad m \neq \max, \cancel{2, 3, 4, 5, 6, 7}$$

Дробь $\frac{x}{y}$ можно сократить в том случае,
если ИОД $(x, y) \neq 1$. ~~если~~ ИОД $(a, b) = 1$

т.е. числа a и b взаимно просты.

Найдём ИОД $(a+b, a^2-6ab+b^2)$, Заметим

что $a+b$ и $a^2-6ab+b^2$ можно сократить на

число x , ИОД $(x, y) = \text{ИОД}(x, y-x)$

ИОД $(x, y) = \text{ИОД}(x, y-kx)$, где $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{ИОД}(a+b, a^2-6ab+b^2) &= \text{ИОД}(a+b, a^2-6ab+b^2 - \\ &(a+b) \cdot (a+b)) = \text{ИОД}(a+b, -8ab) = \text{ИОД}(a+b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8ab) &= \text{ИОД}(a+b, 8ab - 8b(a+b)) = \text{ИОД}(a+b, -8b^2) = \\ &= \text{ИОД}(a+b, 8b^2) \quad \text{Заметим, что} \end{aligned}$$

$\text{ИОД}(a+b; b) = 1 \rightarrow b^2$ взаимно просто с $a+b$

$$\rightarrow \text{ИОД}(a+b, 8b^2) \leq 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Оценка ИОД $(a+b, ab^2) \leq 8$

$$\text{ИОД} \sqrt{(a+b, a^2 - 6ab + b^2)} \leq 8 \Rightarrow \sqrt{m} \leq 8$$

Пример: приведём пример, когда $m = 8$

$$a = 1 \quad b = 7$$

$$\frac{1+7}{1-42+49} = \frac{8}{8}$$

Ответ: $m_{\max} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

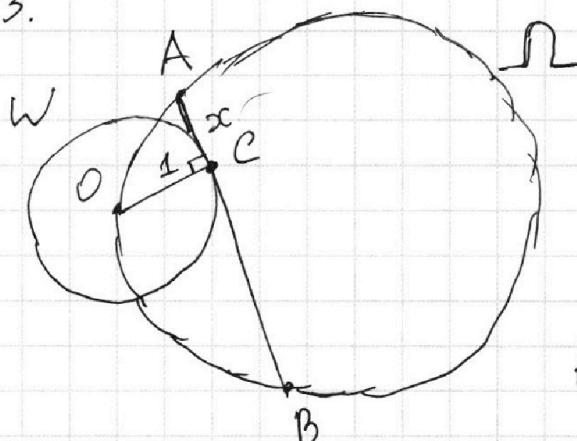
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N^o3.



$$\frac{AC}{CB} = \frac{x}{7x} = \frac{1}{7}$$

$$AC = x, \text{ тогда}$$

$$CB = 7x,$$

$$AB = 8x$$

$$R_W = 1, R_R = 5$$

Пусть D - центр окружности W.

AB - касательная к окружности W \rightarrow

$$OC \perp AB; \quad AO^2 = AC^2 + OC^2 \quad (\text{Th. Пифагора})$$

$$AO = \sqrt{1+x^2}, \text{ Аналогично } DB = \sqrt{DC^2 + CB^2}$$

$$OB = \sqrt{1+49x^2} \quad | \quad \triangle AOB \quad (\text{Th sin}):$$

$$\sin \angle ABO = \frac{AO}{\sqrt{1+49x^2}}; \quad \frac{AO}{\sin \angle ABO} = 2 \cdot R_R$$

$$\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+49x^2} = 2R_R = 10$$

$$(1+x^2)(1+49x^2) = 100$$

$$x^2 = 1 \quad x = 1 \rightarrow AB = 8x = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

Решите уравнение.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Заметим, что $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ и
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

Возведём в квадрат и позабудем, что
правая часть ≥ 0

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 = (2 - 7x)^2 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - 7x = (2 - 7x)^2 + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \\ 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(2 - 7x)(2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1) = 0$$

$$x = \frac{2}{7}; \quad 2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 = 0$$

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Возведём в квадрат

~~$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1$$~~

~~$$2x^2 - 5x + 3 = 1$$~~

~~$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$~~

$$\begin{aligned} x &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \\ x &\in \{2, \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0 \quad D = 22^2 + 12 \cdot 41 = 976$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} \quad x_1 = \frac{22 + \sqrt{976}}{82} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x_2 = \frac{22 - \sqrt{976}}{82} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x \in \left\{ \frac{2}{4}, \cancel{\frac{22 + \sqrt{976}}{41}}, \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}, \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \right\}$$

Заметим, что все проделанные образование
могли только добавить в первоначальное уравнение
лишние корни. Проверим все полученные корни.

$\frac{2}{4}$ подходит +

$$\frac{25}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < \frac{27}{41}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 4 - 14x + 7x - 1 =$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

корень $\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{2}$ и он неподходит

$$x > \frac{1}{2}$$

~~2x~~ эти корни подойти
могут при

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Корень $\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$ подходит, так как
он отрицательный и
противоречит с ~~это~~ преобразованием нет.

$$x \in \left\{ \frac{2}{7}; \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \right\}$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}; x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим
неравенство.

$$f(x) \cdot g(x) \leq 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \end{cases}$$

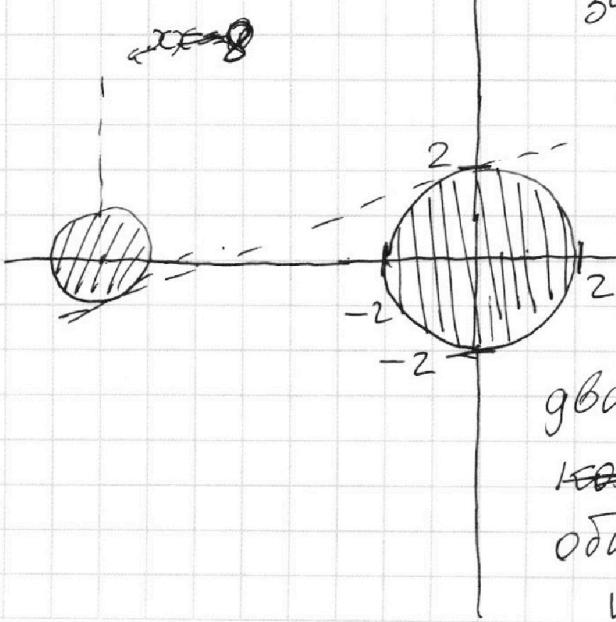
плоскость
внутри окружности с центром в $(-8; 0)$ и радиусом 1
плоскость, которая не включает в себя окружность с центром в $(0; 0)$ и радиусом 2

плоскость
внутри окружности с центром в $(-8; 0)$ и радиусом 1

плоскость, которая не включает
плоскость внутри окружности с центром в $(-8; 0)$ и радиусом 1

Инеравенство образует
заштрихованную область
в координатах $x; y$

$ax + 10b = y$ — это
уравнение прямой



Чтобы система имела
два решения, надо чтобы
прямая эта прямая была
общей касательной
к двум окружностям.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

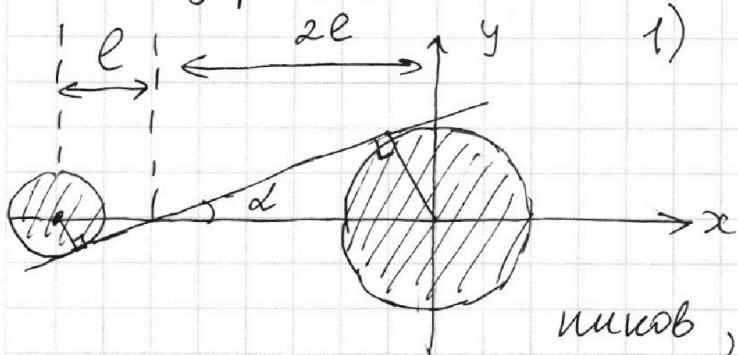
МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

общая касательная может быть двух типов:

внутренняя и внешняя.



1) Внешняя

Внутренняя касательная

изза подобия треугольников, точка пересечения

внутренней касательной с осью абсцисс будет делить отрезок соединяющий центры окружностей

на 1 \neq 2 $3\ell = 8$ $\ell = \frac{8}{3}$

$$\begin{array}{c} \angle \alpha \\ \triangle \end{array} \quad \sin \alpha = \frac{1}{\ell} = \frac{3}{8}; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{\sqrt{55}}{8}$$
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Заметим, что внешняя касательная

заметим, что другая внутренняя касательная
симметрична этой относительно отрезка, соединяющего
центры окружностей \rightarrow симметрична относительно оси x .

$$\rightarrow a = \pm \tan \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

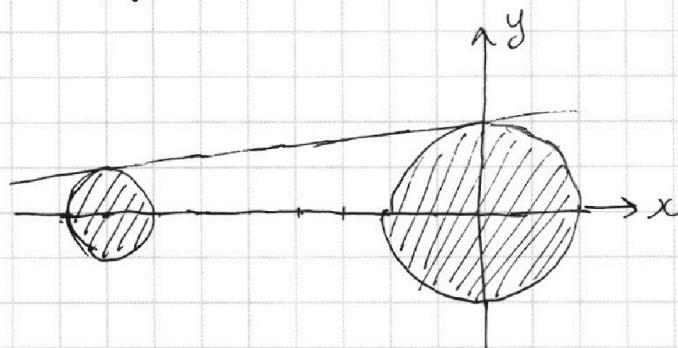
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

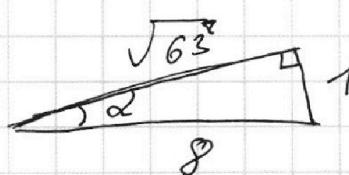
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2) Внешняя касательная



Посмотрим на
пересечение касательной
с осью абсцисс



$$\sin \alpha = \frac{1}{8} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{63}}{8} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\alpha = \pm \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Ответ: } \alpha \in \left\{ \pm \frac{3}{\sqrt{55}}, \pm \frac{1}{\sqrt{63}} \right\}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

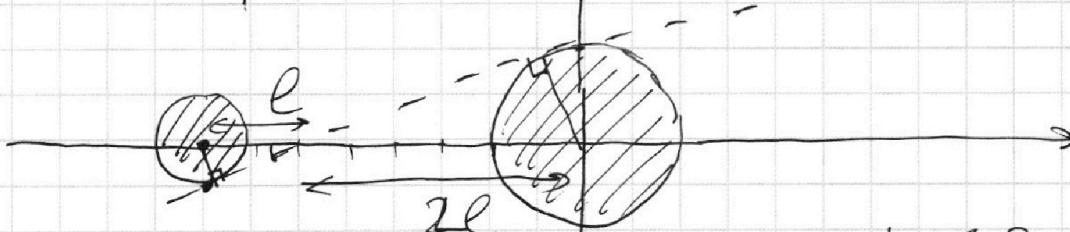
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

2 решение

f

↑

$$y = ax + 10b$$



~~$$ax + b = x^2 - y^2$$~~

~~$$ax + b$$~~

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{2}$$

$$L = 2l$$

оз.

$$3l = 8 \quad \cos \alpha = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}$$

$$l = \frac{8}{3}$$

$$\tan^2 \alpha = 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{64}{9} - 1$$

$$a \in \left[-\infty; \sqrt{\frac{55}{3}} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{55}}{3}, +\infty \right]$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{55}{9} = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{55}}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2 - 7x) \left(2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2 - 7x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 1 = 0 \end{cases} \quad x = \frac{2}{7}$$

$$7x - 1 = 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$\begin{array}{l} b^2 = 25 \\ b = 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} k = 7 \\ k = 4 \end{array}$$

$$22 \cdot 22$$

$$\begin{array}{r} x^{22} \\ \underline{\times 22} \\ 44 \\ \underline{\times 22} \\ 44 \\ \hline 984 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^{46} \\ \underline{\times 12} \\ 82 \\ \underline{\times 46} \\ 41 \\ \hline 982 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ + 992 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \\ \underline{- 8} \\ 17 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 244 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$c = 2 \cdot 4$$

$$484 + 492 = 976$$

$$c = 14 - 38$$

$$976$$

~~976~~

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$c^2$$

$$\begin{array}{l} b = 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c = 4 \\ k = 7 \\ k = 4 \end{array}$$

~~4~~



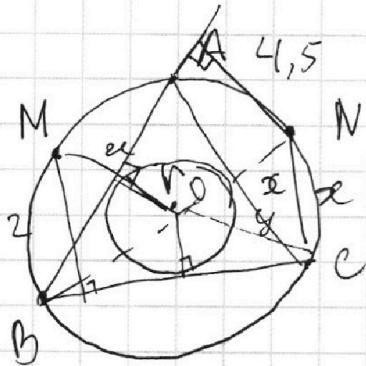
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

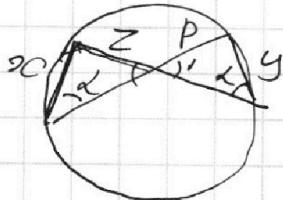
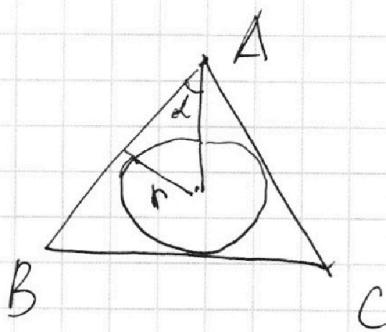
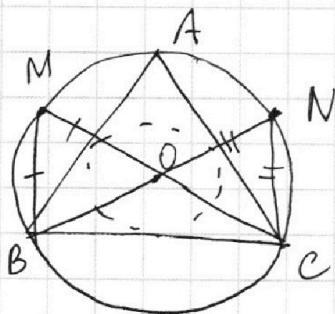


$$\frac{r}{4,5} = \frac{\sin \alpha}{\sin 4,5}$$

$$\frac{r}{2} = \frac{\sin 2x}{\sin 2x}$$

$$BO \cdot x =$$

$$MO \cdot x$$



$$\frac{x}{u} = \frac{z}{p} \quad px = yz$$

$\frac{r}{\sin \alpha}$

$$\frac{r}{4,5} = \frac{r}{\sin \beta}$$

$$x \cdot BM = y$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0;0) \quad P(-12; 24)$$

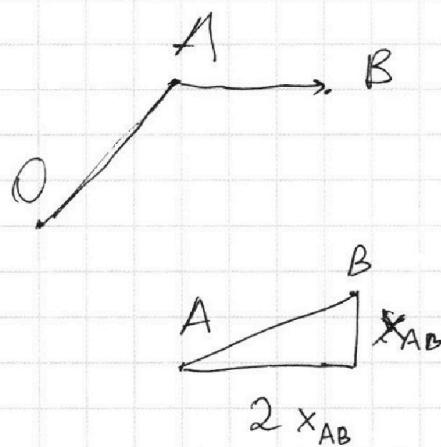
$$Q(3; 24) \quad R(15; 0)$$

$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

с целыми координатами

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1$$





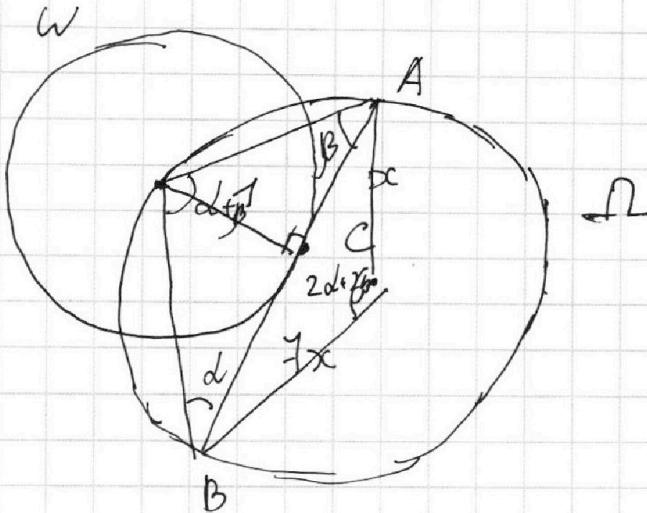
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC/CB = 7$$

$$\frac{8x}{\sin(\alpha+\beta)} = 10$$

~~$1+49x^2$~~

$$\frac{1+49x^2}{\sin^2 \beta} = 100$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1+7x^2}$$

$$\frac{1+x^2}{\sin^2 \alpha} = 100$$

$$(1+49x^2)(1+x^2)^2 = 100$$

$$1 + 50x^2 + 49x^4 = 100$$

~~50~~
~~49x²~~

$x=1$

$AB = 8$

4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} > 0 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0 = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2 - 7x + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 4 - 28x + 49x^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1} +$$

$$2x^2 + 2x + 1$$

$$2 - 7x = (2-7x)^2 + 2(2-7x)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $a, b, c \quad ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$

$$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{14}$$

$$bc = p \cdot 2^{14} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$ac = \ell \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$(abc)^2 = kpl \cdot 2^{51} \cdot 7^{64} \quad Kpl = ?$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{32} \quad k=2 \quad p=1 \quad l=1$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{10}$$

$$b^2 = 2^{12}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$b^2 = \frac{kp}{l} \cdot \frac{2^{11}}{7^{10}}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$c^2 =$$

2. $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

m

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2)$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\text{НОД}(a+b, 8ab) \quad b^2 \nmid a+b$$

$$\text{НОД}\left(b^2, a+b\right) = 1$$

$$\text{НОД}(a+b, -8b^2) =$$

$$\text{НОД}(a+b, 8b^2) = 8$$

$$\frac{8}{1-42+49} = 1$$

$$a+b \quad 8b^2$$

$$\frac{a+b}{b^2}$$

$$\frac{8b^2}{a+b}$$



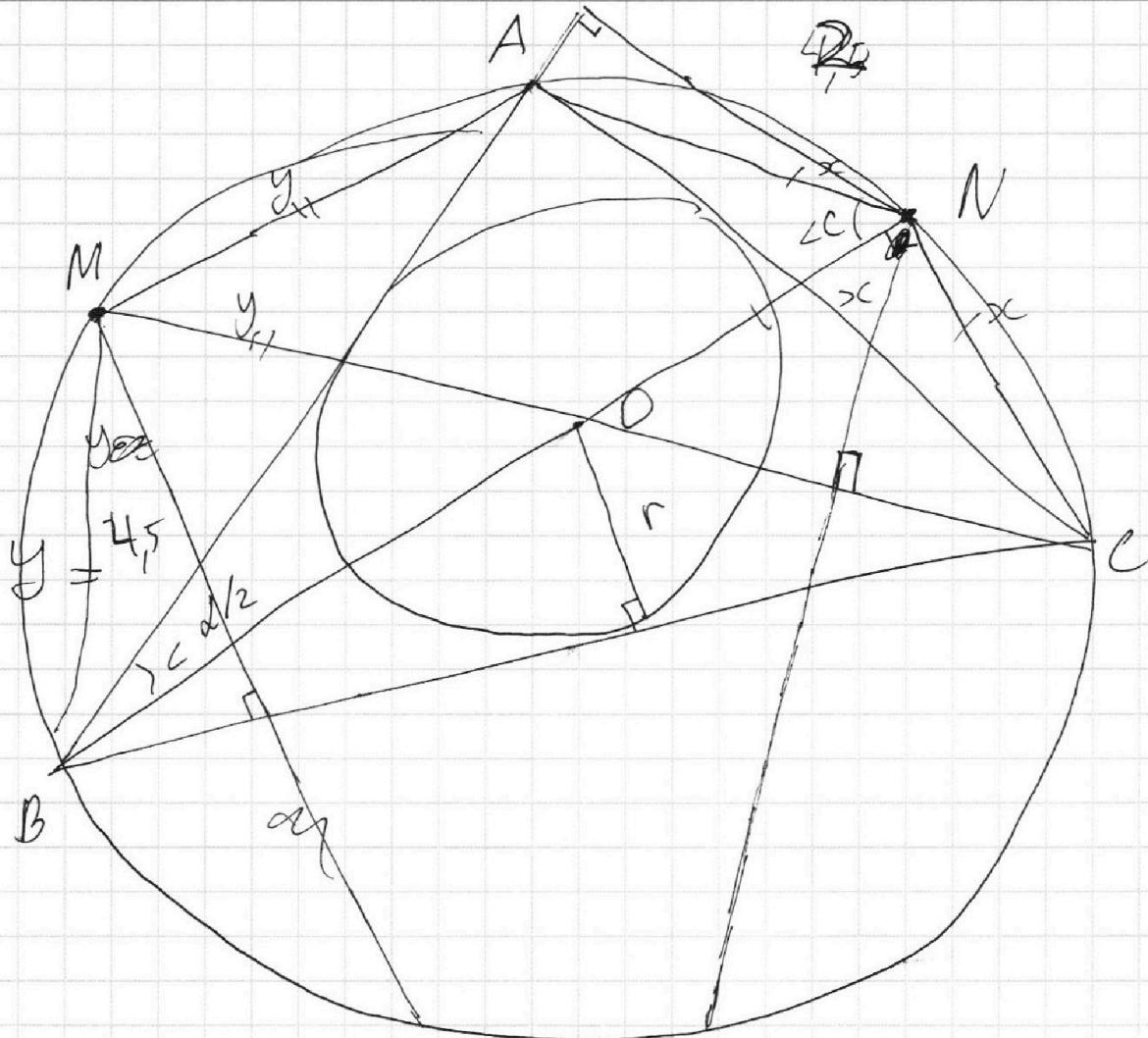
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BN = \frac{r}{\sin \beta}$$

~~$$CM = \frac{r}{\sin \gamma}$$~~

$$\frac{r}{\sin \delta} - ?$$

$$BN = x + 2ys \sin \alpha$$

$$CM = 2xs \sin \alpha + y$$

$$CO = 2xs \sin \alpha$$

$$\frac{\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}}{\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{r}{\sqrt{1-\frac{r^2}{4}}} = 1 - \frac{x}{BN} \quad \frac{r}{2} = 1 - \frac{2xs \sin \alpha}{CM}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{y} = \frac{xc}{x+2ysind} - \frac{2xsin\alpha}{y+2xsin\alpha}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{y} = \frac{xy + 2x^2sind - 2x^2sind - 2xysind}{(xc + ysin\alpha)(y + 2xsin\alpha)}$$

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle \frac{B}{2} + \angle \frac{C}{2}$$

$$\angle \frac{B}{2} - \angle \frac{C}{2}$$