



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} ab: 2^8 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc: 2^{15} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \\ ac: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{45} \end{array} \Rightarrow \text{Можно перемножить эти} \\ \text{попарные произведения, получим:}$$

$$(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{45} \cdot 5^{75}$$

Т.к. $(abc)^2$ — это квадрат, то степень вост-
жения каждого простого числа в него является
чётным числом. Значит, раз: $(abc)^2: 3^{45}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (abc)^2: 3^{44}$ и $(abc)^2: 5^{75} \Rightarrow (abc)^2: 5^{76}$. Полу-
чаем $(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76}$, т.к. числа натуральные,
можно вынести корень:

$(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76} \Rightarrow abc: 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$ $\Rightarrow$
но т.к. $ac: 5^{45}$

$\Rightarrow abc: 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$ не меньше
Раз $abc: 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$, то abc ~~натуральное~~
 $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$, т.к. a, b, c — натуральные числа.

Пример к $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$:

$$\begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{21} \\ b = 2^3 \cdot 3^5 \\ c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22} \end{cases} \quad \textcircled{25}$$

$\Rightarrow \begin{cases} ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{21} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc = 2^{15} \cdot 3^{16} \cdot 5^{22} : 2^{15} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \\ ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \end{cases}$ — Пример
подходит.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

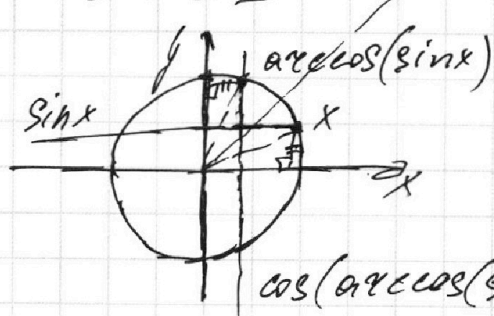
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓
 $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$
 Изобразим графики правой и левой части
 равенства. $f(x) = \frac{3\pi}{2} + x$ - это прямая,
 $g(x) = 5 \arccos(\sin x)$ конусная из функции
 $g_1(x) = \arccos(\sin x)$ растянутой в 5
 раз вдоль оси Ox , поэтому, чтобы понять,
 как выглядит график $g(x)$, сначала
 нужно понять как выглядит $g_1(x)$.

Т.к. $\sin x$ - функция периодическая, с периодом
 2π , то и $g_1(x) = \arccos(\sin x)$ тоже периоди-
 ческая, с периодом 2π . Значит нам доста-
 точно построить $g_1(x)$ на промежутке
 $[0; 2\pi]$, чтобы полностью понять как выла-
 дат график функции.

Рассмотрим 4 промежутка:

1. $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$



(мы учитываем, что)
 из единичной окруж-
 ности видно, что
 при $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\arccos(\sin x)$ будет
 $\cos(\arccos(\sin x))$ являться той же
 величиной x отклю-
 чительно от первой четверти, т.е.

1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

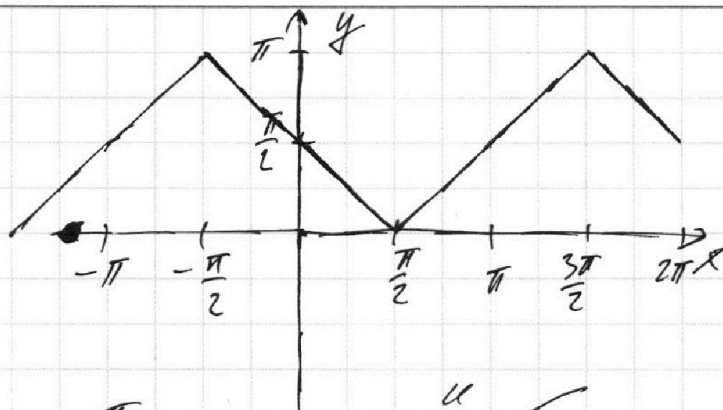
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

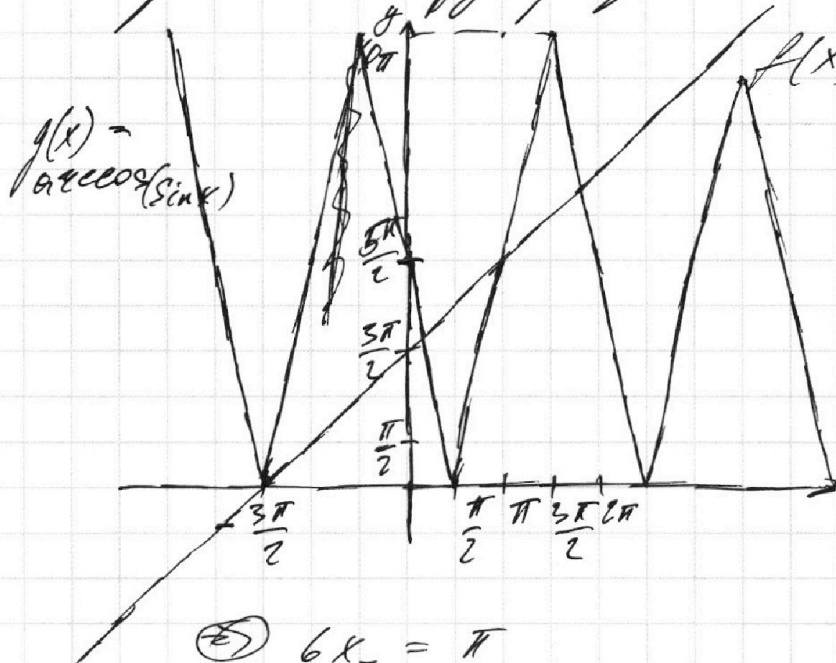
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Поняв, хотим изобразить $f(x)$ и $g(x)$:



$$f(x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Из графиков
находим
решения:

$$x_1 = -\frac{3\pi}{2}$$

$$x_2 = \pi$$

$$x_3 + \frac{3\pi}{2} = 5\left(\frac{\pi}{2} - x_3\right) \quad (*)$$

$$6x_3 = \pi$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_4 + \frac{3\pi}{2} = 5\left(\frac{5\pi}{2} - x_4\right) \Rightarrow 6x_4 = \frac{25\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 11\pi$$

$$x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$$

3.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

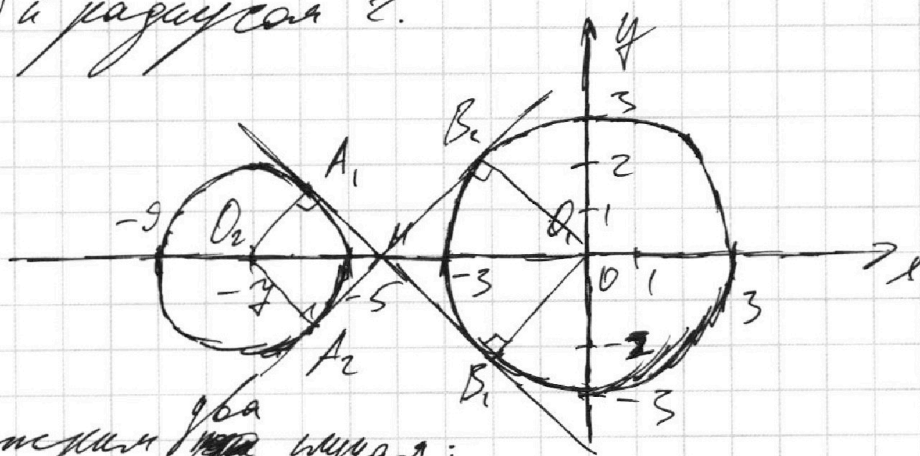
№4

$$\begin{cases} x+3ay-9b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+14x+y^2+45=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x+7)^2+y^2=4 \end{cases} \quad (3)$$

Графики выражения (2) будут две окружности: первая в центре $(0;0)$ и радиусом 3, а вторая в центре $(-7;0)$ и радиусом 2.



Рассмотрим ~~два~~ случая:

а) $a=0 \Rightarrow$ (1) принимает вид:

$x=9b$ - это является

вертикальной прямой, а из графика выражения (2) видно, что никакая вертикальная прямая не сможет пересечь одновременно

1. две окружности, т.е. не возможно найти



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

такой параметр b , чтобы исходная система имела ровно n решений.

6. $a \neq 0 \Rightarrow$ ⁽¹⁾ принимает вид:

$$x + 3ay - 7b = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{-3a}x + \frac{7b}{3a} - \text{это прямая,}$$

при этом из данной задачи мы видим, что при заданном параметре a , от b зависит только свободный член. Т.е. при изменении b , мы совершаем параллельный перенос данной прямой вдоль оси Oy .

Рассмотрим два случая:

а. $a > 0 \Rightarrow y = \frac{1}{-3a}x + \frac{7b}{3a}$ - это убывающая функция.

Из графика выразения (1) можно сделать вывод, что, чтобы существовал такой b , при котором система имела ровно n решений, ^{нужно, чтобы} коэффициенты у прямой $y = \frac{1}{-3a}x + \frac{7b}{3a}$ ^{были бы} меньше по модулю, чем у внутренней обшей касательной окружностей. ^{по модулю}

Каждый из коэффициентов ~~у~~ ^{данной} касательной:

Рассмотрим $\triangle A_1MO_2$ и $\triangle B_1MO_1$:

7. 1) $\angle O_1MB_1 = \angle O_2MA_1$, как вершин.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



выражения отн. к x , модуль коэффициента касательной будет тот же, что и в случае 1):

$$\left| \frac{1}{-3a} \right| < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad (2)$$

$$(2) \quad \frac{1}{-3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad a < 0$$

$$a < -\frac{2\sqrt{6}}{15} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right)$$

Ответом будет $\left\{ \begin{array}{l} a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \\ a \in \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right) \end{array} \right. \quad (3)$

$$(3) \quad a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) $\angle O_2 A, M = \angle O_1 B, M = 90^\circ$, т.к. A, B - кас. (3)

(3) $\triangle O_2 A, M \sim \triangle M O, B,$
 $O_2 A_1 = 2$
 $O_1 B_1 = 3$
 $\Rightarrow \frac{O_1 M}{O_2 M} = \frac{O_1 B_1}{O_2 A_1} = \frac{3}{2}$ (3)
 $O_1 O_2 = 4$

(3) $O_2 M = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$
 $O_2 M = \frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{14}{5} \Rightarrow$ по т. Пифагора:
 $O_2 M^2 = O_2 A_1^2 + M A_1^2$
 $\Rightarrow \frac{4\sqrt{6}}{5} M A_1 = \sqrt{O_2 M^2 - O_2 A_1^2}$ (3)

(3) $\text{tg} \angle A, M O_1 = \text{tg} \angle M O_2 = \frac{A_1 O_2}{A_1 M} = \frac{2}{\frac{4\sqrt{6}}{5}} =$
 $= \frac{5}{2\sqrt{6}}$

~~Теперь~~ Теперь можем найти координаты значения a : $|\frac{1}{-3a}| < \frac{5}{2\sqrt{6}}$ (3)

(3) $\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$, т.е.
 $a \in (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$

(2) $a < 0 \Rightarrow y = \frac{1}{-3a} \cdot x + \frac{46}{3a}$ - это возрастающая функция

Аналогичными рассуждениями, что и для пункта (1), приходим, что нам необходимо, что модуль коэффициента общей внешней касательной для окружностей был больше $|\frac{1}{-3a}|$. В силу симметрии графика (2)

3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Преобразуем первое уравнение:

$$\log_4^4(6x) - 2 \cdot \log_{6x}^4 4 = \log_{36x^2}^{343} - 4$$

$$\log_4^4(6x) - 2 \cdot \frac{1}{\log_3 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 6x} - 4$$

Замена: $\log_4(6x) = t$, при этом $t \neq 0$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0 \quad (1)$$

Преобразуем второе уравнение:

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 7 = \log_{y^2}^5(7^5) - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \cdot \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

Замена: $z = \log_7 y$, при этом $z \neq 0$

$$z^4 + 6 \cdot \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z} - 4 \quad | \cdot z$$

$$z^5 + 4z + \frac{7}{2} = 0 \quad (2)$$

Сложим выражения (1) и (2):

$$t^5 + z^5 + 4t + 4z = 0$$

$$(t+z)(t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 4) = 0$$

Рассмотрим два случая:

$$1. \quad t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 4 = 0$$

1.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. $t^4 \geq 0$, $z^4 \geq 0$, $t^2 z^2 \geq 0$, можем записать
нер-во Коши:

$$1) \frac{t^4 + t^2 z^2}{2} \geq |t^3 z| \geq t^3 z \quad (*)$$

$$(*) \frac{t^4}{2} + \frac{t^2 z^2}{2} - t^3 z \geq 0$$

$$2) \frac{z^4 + t^2 z^2}{2} \geq |z^3 t| \geq z^3 t \quad (**)$$

$$(**) \frac{z^4}{2} + \frac{t^2 z^2}{2} - z^3 t \geq 0$$

Сложим эти два получившихся нер-ва:

$$\frac{t^4}{2} + \frac{z^4}{2} + t^2 z^2 - z^3 t - t^3 z \geq 0$$

$$t^4 - t^3 z + t^2 z^2 - z^3 t + z^4 + 4 \geq 4 + \frac{t^2}{2} + \frac{z^2}{2} > 0$$

Из этого получаем, что равенство данного
выражения с 0 невозможно.

② $t + z = 0 \Rightarrow \log_3(6x) + \log_3(y) = 0$
 Обратная замена $\Rightarrow \log_3(6xy) = 0$
 $6xy = 1$
 $xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6
Зададим ~~уравнение~~ точки, которые имеют в
данном параллелограмме с помощью
системы неравенств:

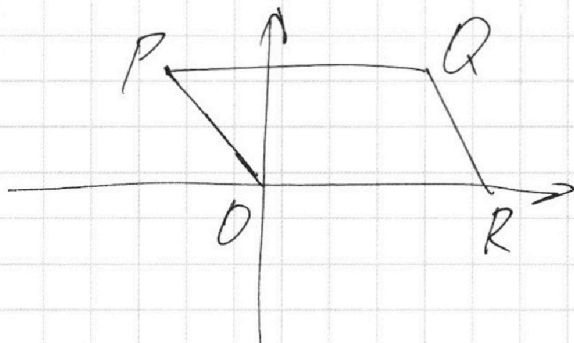
OR: $y = 0$

PQ: $y = 68$

PO: $\frac{x-0}{-19-0} = \frac{y-0}{68-0} \Rightarrow y = -4x$

QR: $y = -4(x-19) \Rightarrow y = -4x + 76$

⊕ Точки фигуры: $x \in [0; 19]$ $y \in [0; 68]$



$y \geq -4x$
 $y \leq -4x + 76$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

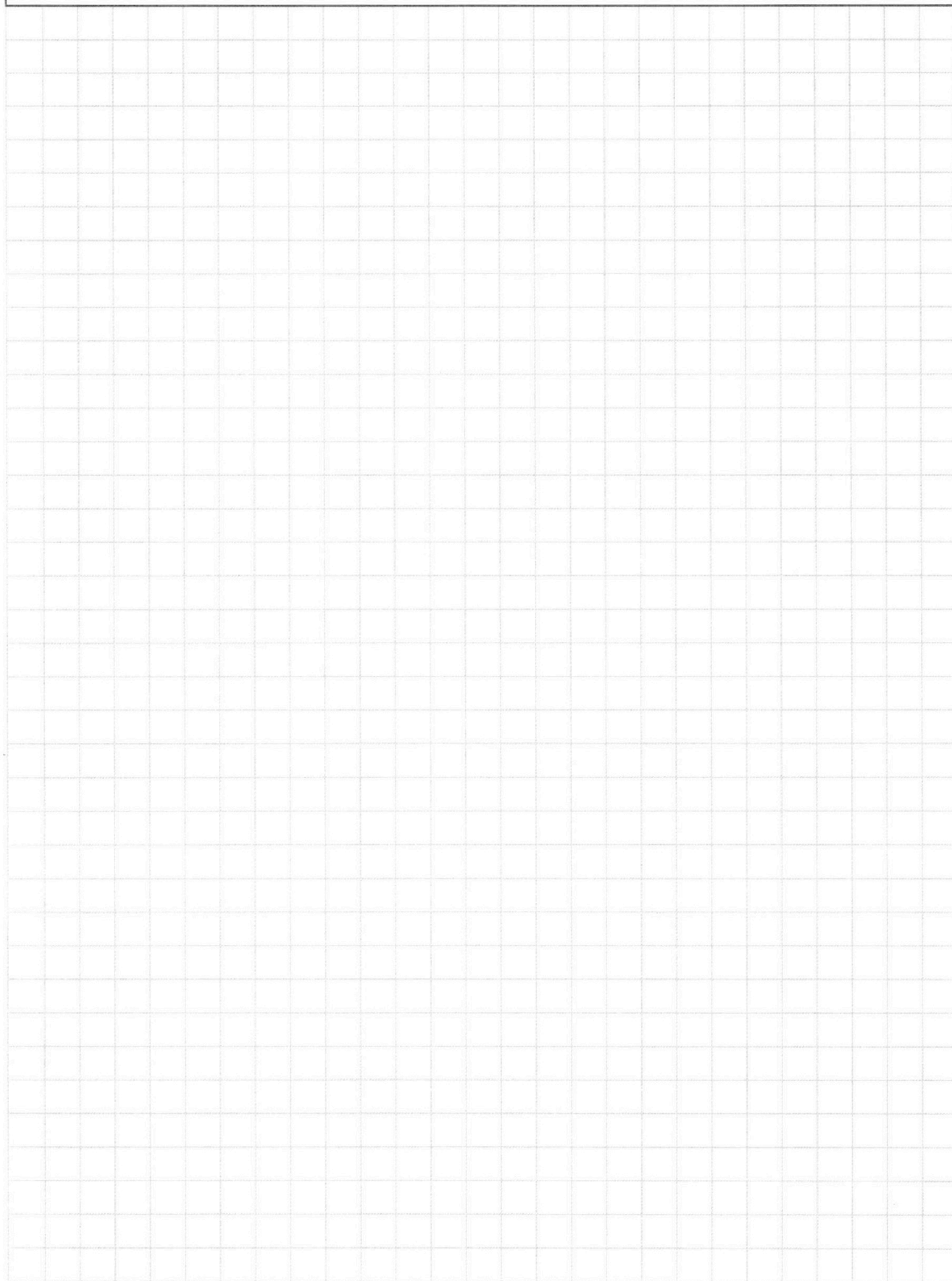
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

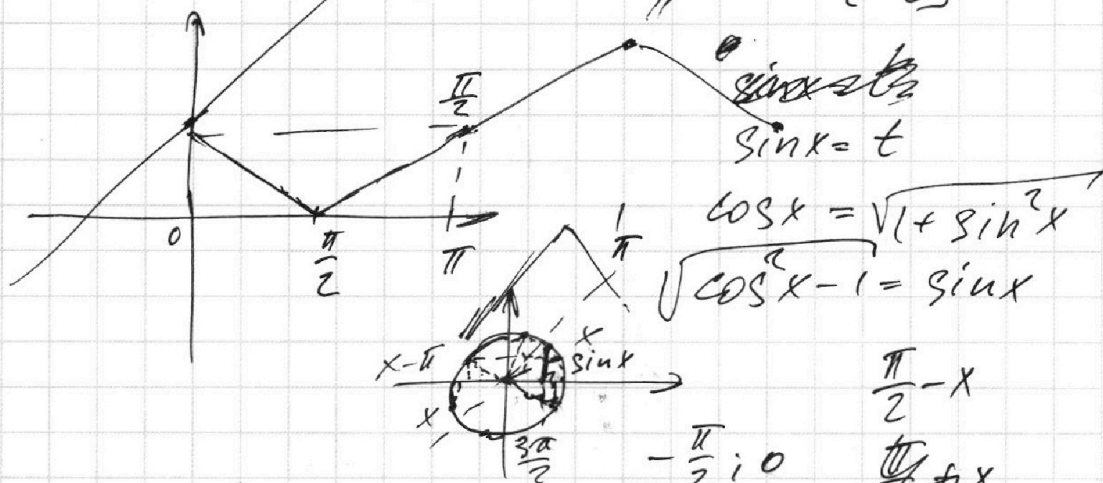
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} - x$$



$$\cos x = \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

$$\sqrt{\cos^2 x - 1} = \sin x$$

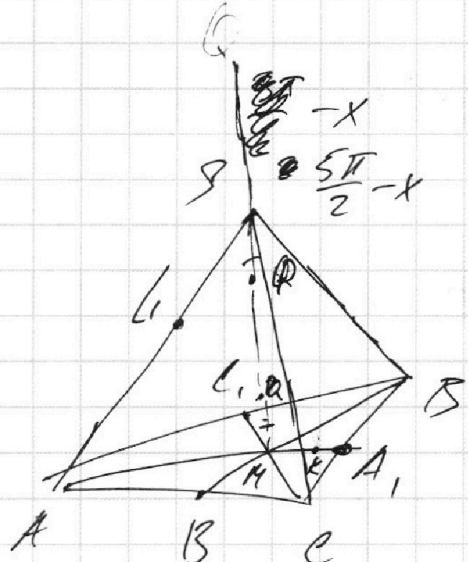
$$\frac{\pi}{2} - x$$

$$-\frac{\pi}{2} + 0$$

$$\frac{\pi}{2} - (\pi - x) = x - \frac{\pi}{2}$$

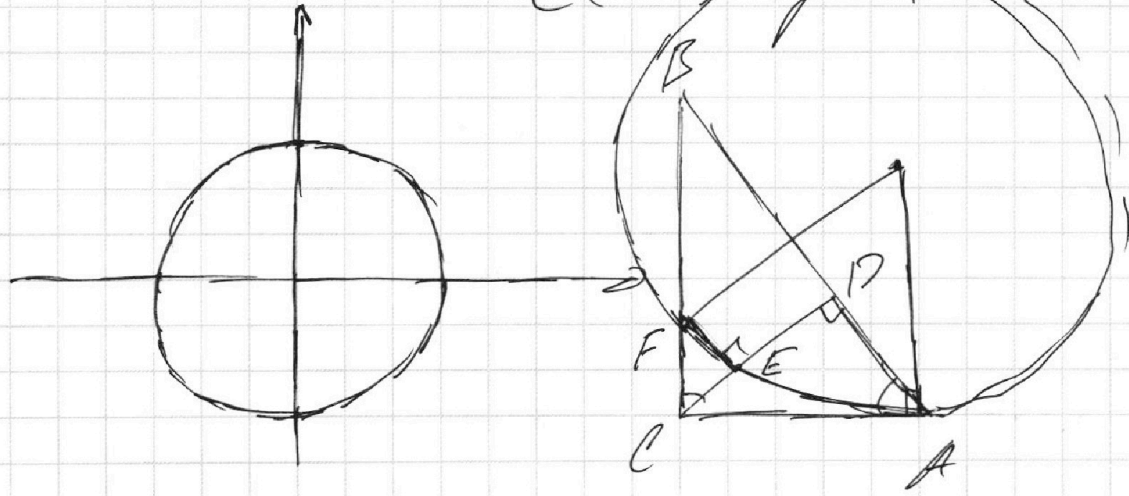
$$\frac{3\pi}{2} - (x - \pi) = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$\frac{3\pi}{2} - (x - \pi) = \frac{5\pi}{2} - x$$



$$\begin{cases} x + 3ay - 3b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x + 4)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$





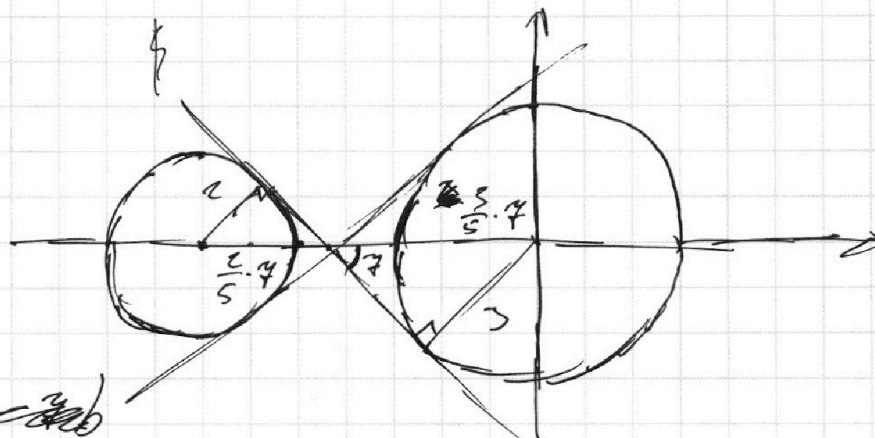
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~а~~ ~~$x - 2.4b = -3ay$~~

$$x - 2.4b = -3ay$$
$$y = \frac{1}{-3a}x + \frac{2.4}{3a}$$

$$\begin{array}{r} x/4 \\ 1/14 \\ +56 \\ 14 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ 25 - 4 \\ \hline 96 \\ 25 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 32}{25}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2^5}{25}} = \frac{\sqrt{6} \cdot 4}{5}$$

$$\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$2\sqrt{6} < 15a \quad a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

~~а~~ $2\sqrt{6} < -15a$

$$a < -\frac{2\sqrt{6}}{15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓1

$$abc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{45} \cdot 11$$

$$b = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^{20} \cdot 11$$

$$(abc)^2 : 2^{54} \cdot 3^{45} \cdot 5^{90}$$

$$(abc)^2 : 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{96}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{58}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{45}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{21}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22}$$

$$abc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{45}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 74 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 17 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ 19 \\ \hline 32 \\ 45 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 86/2 \\ 2/38 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y+z=17 \\ x+y=4 \\ y+z=13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 345/24 \\ -28/49 \\ \hline 63 \end{array}$$

✓5

$$\log_2(6x) + \log_2(y) = 0$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \quad | \cdot t$$

$$t^5 - 2 = \frac{5}{2} - 4t$$

$$t^5 + 4t - \frac{9}{2} = 0$$

$$(t+z)(z^4 - z^3t + z^2t^2 - zt^3 + t^4) + 4(t+z) = 0$$

$$t+z=0$$

$$\log_2(6x) + \log_2(y) = 0$$

$$\log_2(6xy) = 0 \Rightarrow$$

$$2^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} + 2t^2 - 2t^3 + t^4 + 4 = 0$$

$$(z^2+t^2) - 2t(z+t^2) - 2t^2(z+t^2)$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$\frac{12}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$22t \leq 2^3t + 2t^3$$

$$z^4 + 6 \cdot \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z} - 4$$

$$z^5 + 4z + \frac{7}{2} = 0$$

$$t^4/t^4$$

$$t^4 + z^4 \geq 2t^2z^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

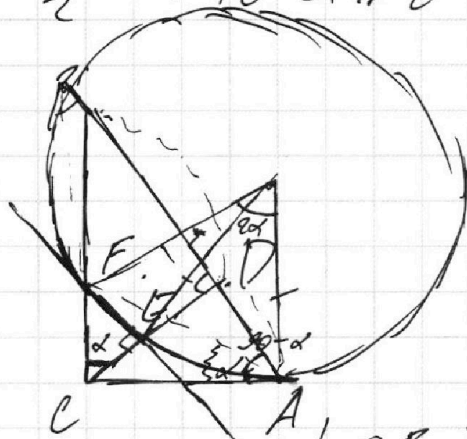
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$z^4 - z^3t + z^2t^2 - zt^3 + t^4 + 4 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{z^4 + z^2t^2}{z^2t^2 + t^4} &\geq \frac{z^3t}{t^3z} \geq \frac{z^2t}{t^2z} \\ \frac{z^4 + z^2t^2}{z^2t^2 + t^4} &\geq \frac{z^3t}{t^3z} \geq \frac{z^2t}{t^2z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{z^4 - z^3t + z^2t^2 - zt^3 + t^4}{z^2t^2 + t^4} \geq 0 \Rightarrow -11 + 4 > 0 - (!).$$



$$\frac{AB}{BD} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{15}$$

$$\frac{1}{2} \cdot CB \cdot AD = \frac{3}{26}$$

$$P(-17; 68) \quad (y=68)$$

$$(y=0) \quad O(0;0) \quad R(19;0)$$

$$\frac{x-0}{-17-0} = \frac{y-0}{68-0}$$

$$\frac{68}{17} = \frac{4}{1}$$

$$68x = -17y \Rightarrow y = -4x$$

$$y = -4(x-19) = -4x + 76$$

$$y \in$$

$$\begin{cases} y \geq -4x \\ y \leq -4x + 76 \end{cases}$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40 \quad y \in [0; 68]$$

$$y_2 - y_1 = -4(x_2 - x_1) + 40$$

$$68 = -4(x_2 - x_1) + 40$$

$$28 = -4(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 = -7 \Rightarrow x_2 = x_1 - 7$$

$$\begin{aligned} y_1 &\geq -4x_1 \\ y_2 &\geq -4x_2 \\ y_1 &\leq -4x_1 + 76 \\ y_2 &\leq -4x_2 + 76 \\ -4x_1 + 76 &\geq -4x_2 \end{aligned}$$