МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab : 2^8 3^{14} \cdot 5^{12}$ $\quad ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$bc : 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, тогда $abc \in \mathbb{N}$

Пусть: $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$
$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$
$ac = 2^{14} 3^{21} \cdot 3^{39}$ $\Rightarrow$ $a^2b^2c^2 = 2^{34} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68} \Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

$a^2b^2c^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$, но $55 \not\vdots 2$ $\Rightarrow$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

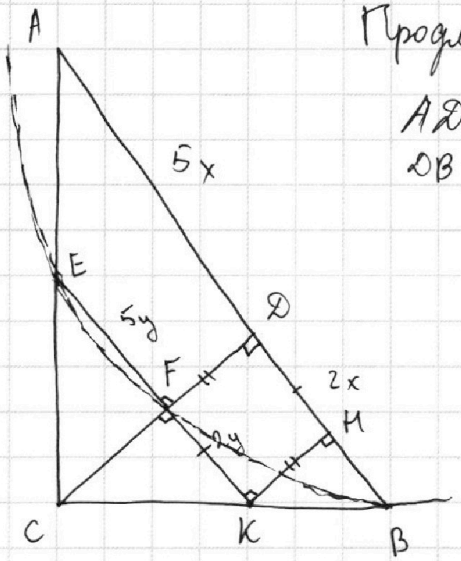
Пояснения: мы берём 56, т.к 54 не будет хватать и в какой-то паре возникнет противоречие. Ведь значит сумма степеней 3 ≥ 55.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице: 2

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продлим EF до EK

$AD = 5x$
$DB = 2x$ | из условия $EF \parallel AB \Rightarrow$

$\Rightarrow EF = 5y$; $FK = 2y$

Проведём $KM \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow FDMK$ – прямоугольник $\Rightarrow FD = KM$

$S_{CEF} = \frac{1}{2} EF \cdot CF$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD}{CF \cdot EF} = \left(\frac{CF+KM}{CF}\right) \cdot \frac{x}{y} =$

$= \left(1 + \frac{KM}{CF}\right) \frac{x}{y}.$

Т.к. $\triangle CFK \sim \triangle CDB$: $\frac{DB}{FK} = \frac{x}{y} = \frac{CD}{CF} = \left(1 + \frac{KM}{CF}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(1 + \frac{KM}{CF}\right)^2.}$$

Т.к K – степень точки $\Rightarrow KF \cdot KE = KB^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 14y^2 = KB^2 \Rightarrow \boxed{\frac{KB}{y} = \sqrt{14}}$. $\frac{KM}{CF} = \frac{KB}{CK}$.

По формуле высоты $CF = \sqrt{10y^2} \rightarrow CK = \sqrt{CF^2 + FK^2} =$

$CK = y\sqrt{14} \Rightarrow \frac{KB}{CK} = \frac{KB}{\sqrt{14}y} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 1.$ $\Rightarrow \sqrt{10y^2 + 4y^2} = y\sqrt{14}. \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{KB}{CK} = 1 = \frac{KM}{CF} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = (1+1)^2 = 4$ Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 4.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

10 $\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{2x}{10}$ → $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{10} - \frac{2x}{10} \le \frac{\pi}{2}$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - 2x\right) = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$

$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$

$-6x \le -2x \le 4\pi$

$-2\pi \le x \le 3\pi$

$\cos x = \left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi m \\ -2\pi \le x \le 3\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi m \\ -2\pi \le x \le 3\pi \end{cases} \Rightarrow \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

⇓

Ответ: $x = \frac{\pi}{2};\ 3\pi;\ -2\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3};$ и

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

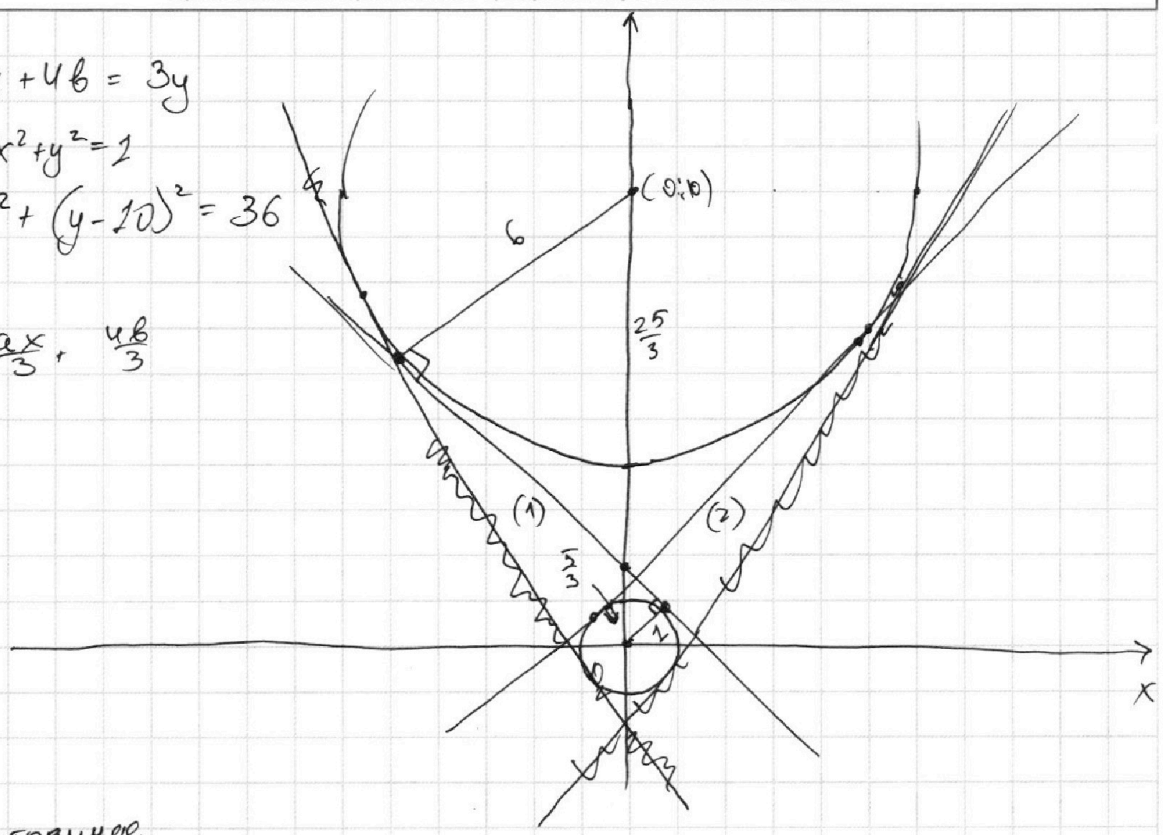
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 4b = 3y \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$

$y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3}$

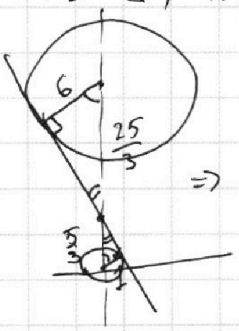


внутреннее

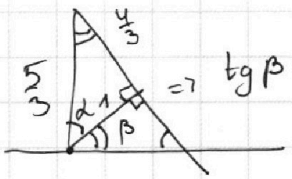
1) ~~внешние~~ общие касательные: ЭТО предельные положения прямой, тоесть значения $\frac{a}{3}$;

у прямых (1) и (2) коэф. перед x отличается только знаком.

Пусть (1): $=k_1$, (2): k_2, тогда $k_1 \le \frac{a}{3} \le k_2$, для таких $\frac{a}{3}$ всегда найдутся b, $\Rightarrow$!



$\Rightarrow$



$\Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$ (=?)

(=?) $k_2 = \frac{3}{4}$

$k_1 = -\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$

$-\frac{3}{4} < \frac{a}{3} \le \frac{3}{4}$

$-\frac{9}{4} < a < \frac{9}{4}$

Ответ: $-\frac{9}{4} < a < \frac{9}{4}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем: замена $t_x = \log_5 2x \neq 0$

$x > 0 \quad y > 0 \longrightarrow$ $t_y = \log_5 y \neq 0$, тогда:

$$t_x^4 - \frac{3}{t_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t_x} - 3 \quad | \cdot t_x$$

$$t_y^4 + 4 \cdot t_y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t_y} - 3 \quad | \cdot t_y \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t_x^5 + 3t_x = \frac{13}{3}$$

$$t_y^5 + 3t_y = -\frac{13}{3} \rightarrow (-t_y)^5 - 3t_y = \frac{13}{3}$$

Пусть $f(x) = x^5 + x \quad f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \Rightarrow f(x)$ ↗ на всём $\mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, если $x_1 = x_2$ (⇒)

(⇒) $f(t_x) = f(-t_y) \Rightarrow t_x = -t_y$.

$$\log_5 2x = -\log_5 y \Rightarrow \log_5 2x = \log_5 \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 2x - \log_5 \frac{1}{y} = 0$$

т.к $x > 0$ и $y > 0$.

$$\log_5 2x \cdot y = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Все (·)(·) лежат в области α:

$$(*)\quad \begin{cases} y \le 80 \\ y \ge 0 \\ -5x \ge y \\ -5x+90 \le y \end{cases} \qquad 5x_2+y_2-45=5x_1+y_1$$

Для всех прямых из α выполняется:

$-5x+y \in \alpha$

$-5x+1=y \in \alpha$ при $y \in [0;80]$

$-5x+2=y \in \alpha$ $\Rightarrow$

$-5x+3=y \in \alpha$

...

$-5x+90=y \in \alpha$

По нашему условию $(x_1;y_1)$ $(x_2;y_2)$ - целые. Тогда все 17 значений у прямых $y=-5x+k$, где $k \vdots 5$, если $k \not\vdots 5$, то у таких прямых только 16 целых $(x;y)$ принадлежащих ей !!!

$\Rightarrow$ $y+5x=0$

$y+5x-1=0$

$y+5x-2=0$, выполняется для всех (·)(·) лежащих на этих прямых при услови (*), тогда

...

$y+5x-90=0$

$5x_2+y_2-45=5x_1+y_1$

...

$5x_2+y_2-90=5x_1+y_1-45.$

Для каждой прямой из пары: есть по 17 значений если $k \vdots 5$ x, которые явл. целыми, следовательно на каждой прямой вида $-5x+k=y$, есть 17 (·)(·) с целыми коэффициентами $\Rightarrow$ это выполняется и для другой прямой в паре, если $k \vdots 5$ то 16 значений, пар где $k \vdots 5$ 10 шт. оставшихся 36 шт. ($5x_2+y_2-45=5x_1+y_1$ $k \vdots 5$)

...

$5x_2+y_2-50=5x_1+y_1-5$

...

идут с периодом 5)

и встречаются только друг с другом.

Тогда всего вариантов: $17^2 \cdot 10 + 16^2 \cdot 36 =$

$= 12\,106$ Ответ: 12 106

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем: сделав замену $t_x = \log_5 2x$

$t_y = \log_5 y$

$t_x^4 - 3\frac{1}{t_x} = \frac{4}{3}\frac{1}{t_x} - 3$ и $t_y^4 + 4\frac{1}{t_y} = -\frac{1}{t_y} - 3.$

Тогда: $t_x^4 - \frac{4}{t_x} - \frac{1}{3t_x} = -3$

$t_y^4 + \frac{4}{t_y} + \frac{1}{3t_y} = -3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть $f(x) = x^4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{3x}$, тогда

$f(x) = x^4 + \frac{13}{3x}$ и при $x > 0$ $f(x)$ монотонно

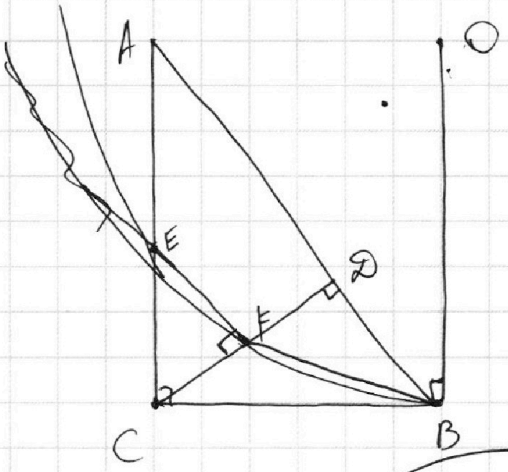
$\log_5 2x \cdot y = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



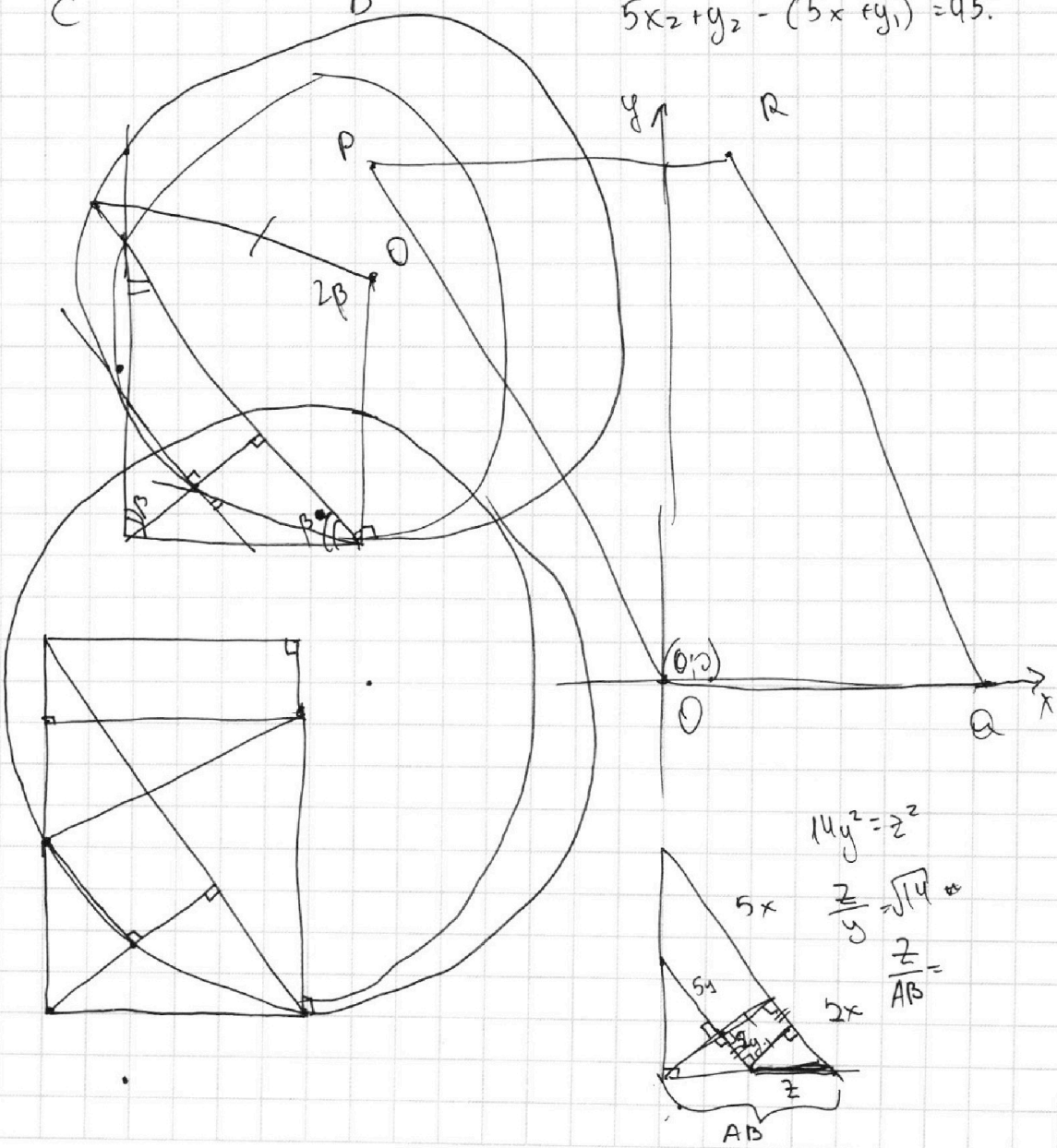
6. $5(x_2-x_1)+y_2-y_1=45=9\cdot 5.$

разность по $y_2-y_1 \vdots 5.$

~~y~~ ~~ax+y~~ ~~[illegible]~~

$5x_2+y_2-5x_1-y_1=45$

$5x_2+y_2-(5x+y_1)=45.$



7.

$14y^2=z^2$

$\frac{z}{y}=\sqrt{14}$

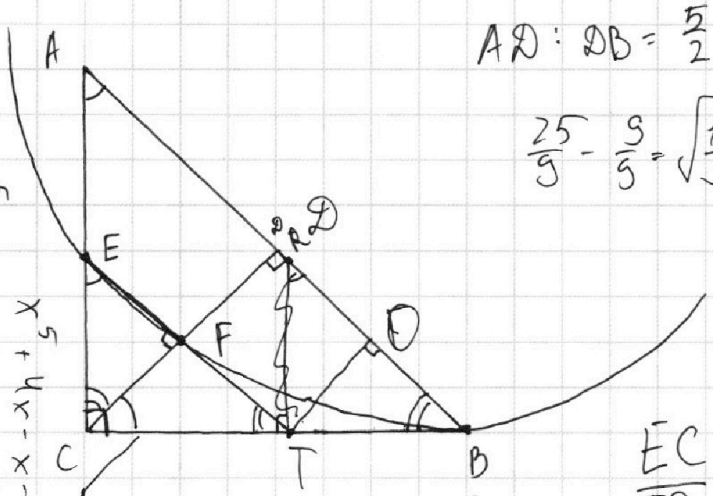
$\frac{z}{AB}=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

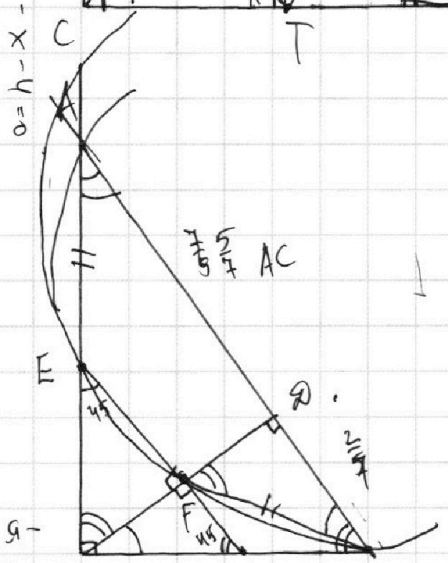
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AD : DB = \frac{5}{2}$.

$\frac{25}{9} - \frac{9}{9} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$.



$\frac{EC}{TO} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$CE \cdot CA = CF \cdot CD$

$\frac{CA}{CD} = \frac{CF}{CE}$

$EF \cdot FE = TB^2$.

$EF = \frac{5}{7} \cdot ET$.

$TF = \frac{2}{7} \cdot ET$

$ET^2 \cdot \frac{2}{7} = TB^2$.

$\frac{ET}{TB} = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

5.

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{(2x)^4} 5^{-1} - 3$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{2x} 5 - 3$

$\log_5^4(2x) = 4\log_{2x} 5 - 3$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$.

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_y \sqrt[3]{0,2} - 3$.

$0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$

$-\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

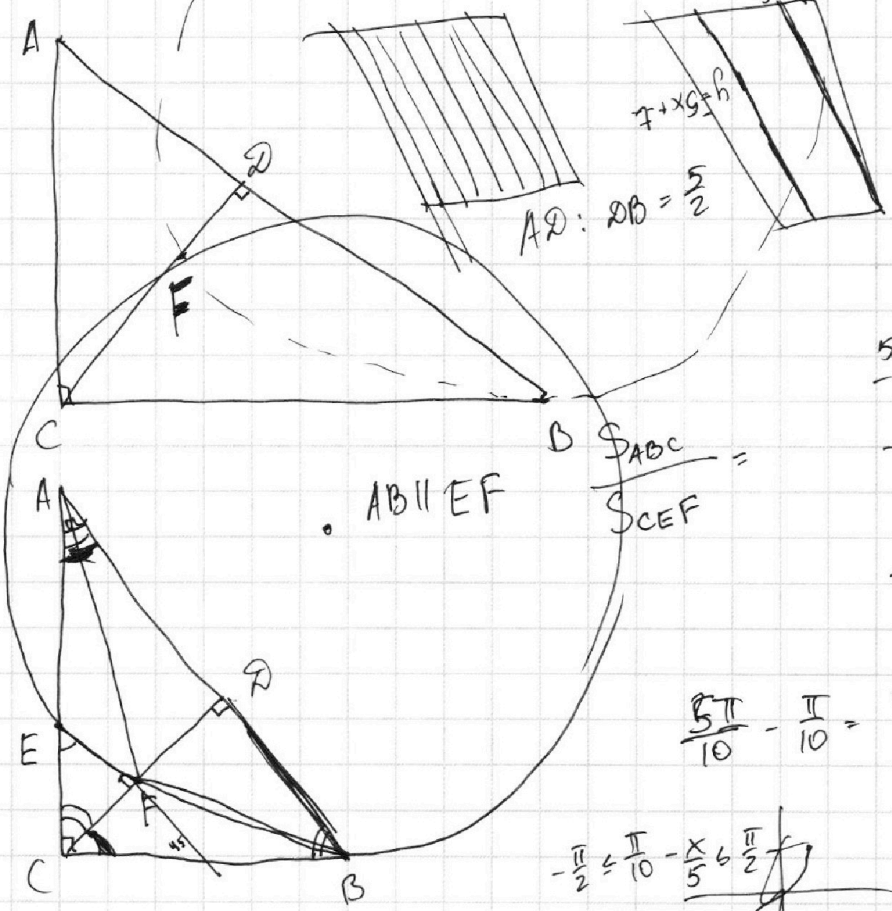
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $ab = 2^8 3^{14} 5^{12}$ $ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$(abc)^2 = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68}}$ $2^{17} 3^{28} 5^{34}$

② 

$AD : DB = \frac{5}{2}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} =$

③ $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)\right)$

$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$

$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi m \end{cases} \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \le \frac{\pi}{2}$

$5x = x + 2\pi + 10\pi k$

$4x = 2\pi + 10\pi k$

$5x = -x - 2\pi + 10\pi m$

$6x = -2\pi + 10\pi k$

$-\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$

$-\frac{6\pi}{10}$

$-\frac{5}{5} \le \pi - 2x \le$

$-5\pi \le \pi - 2x$

$\frac{5\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \le \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2}$

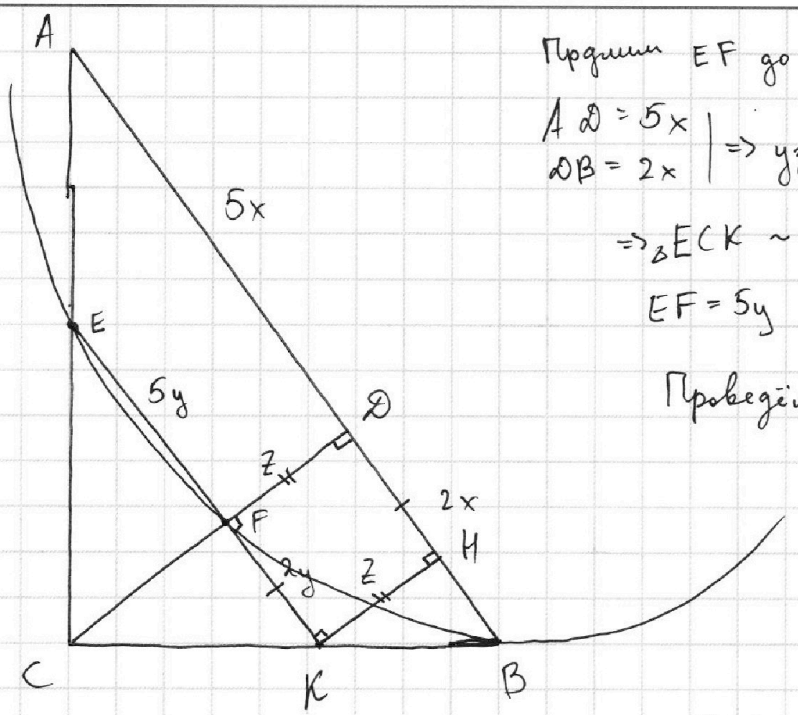
$-\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Продлим EF до EK.

$AD = 5x$, $DB = 2x$ $\Rightarrow$ из условия $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ECK \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$EF = 5y$ $FK = 2y \Rightarrow$

Проведём $KH \perp AB \Rightarrow$

$FD = KH$

$\Rightarrow \triangle CFK \sim \triangle KMB$ и $FDMK$ - $\square$ из подобия:

$$\frac{CD}{KH} = \frac{DB}{MB} \Rightarrow \frac{CF + KH}{KH} = \frac{DM + MB}{MB} \Rightarrow \frac{CF}{KH} = \frac{DM}{MB} = \frac{FK}{MB}$$

$S_{CEF} = \frac{1}{2} EF \cdot CF$ $\quad \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{EF \cdot CF}{CD \cdot AD} = \frac{CF}{(CF+KH)} \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{CF + KH}{CF} \cdot \frac{x}{y} = \left(1 + \frac{KH}{CF}\right) \cdot \frac{x}{y}.$$

Ещё Из подобия $\triangle CFK \sim \triangle CDB$: $\frac{DB}{FK} = \frac{x}{y} = \frac{CD}{CF} = 1 + \frac{KH}{CF} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \left(1 + \frac{KH}{CF}\right)^2.$$

Т.к K - степень точки $\Rightarrow KF \cdot KE = 10y^2 = KB^2 \Rightarrow \frac{KB}{y} = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{KH}{CF} = \frac{KB}{CK} \Rightarrow CF = y\sqrt{10} \Rightarrow CK = 2\sqrt{2}y \Rightarrow \frac{KB}{2\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \frac{KB}{CK} = \frac{KH}{CF} \Rightarrow$

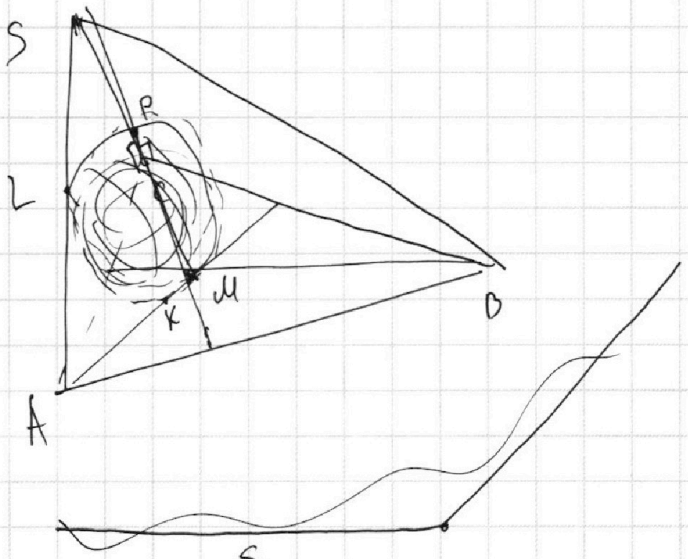
$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \sqrt{5} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} + \sqrt{5}$ Ответ: $\frac{9}{4} + \sqrt{5}$.

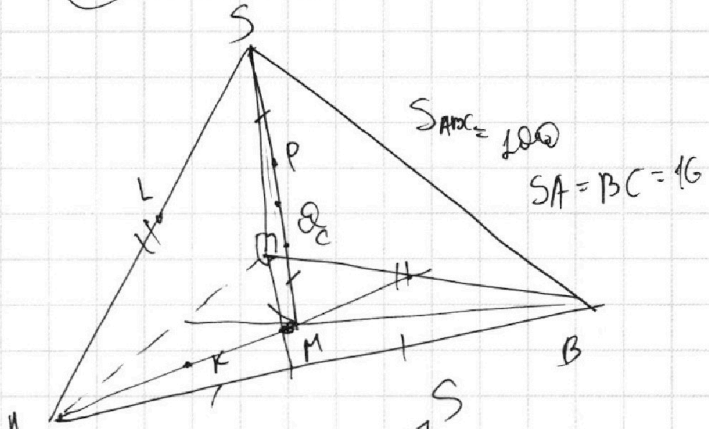
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

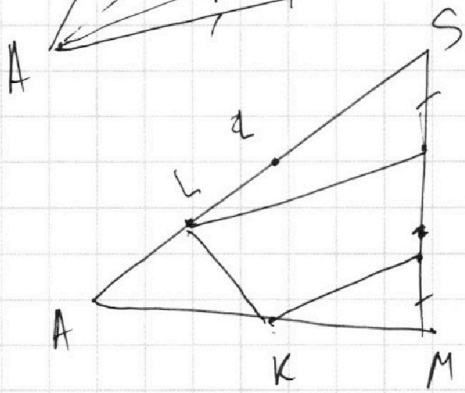
МФТИ





$S_{ABC} = 100$

$SA = BC = 16$



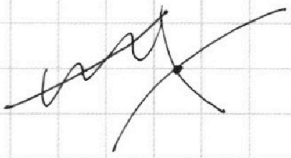
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{2x}5 - 3$



$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$t^4 + \frac{4}{t} = -\frac{1}{3\cdot t} - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{1}{t} - 3$

$t_y^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t_y$

$t_x^5 - 3 = 1 - 3t_x$

$t_y^5 + 4\frac{1}{3} - 3t_y = 0.$

$t_x^5 - 3t_x - 4 = 0$

$\boxed{\log_5 2x = t_x}$

$\boxed{\log_5 y = t_y.}$

$t_x^5 + t_y^5 - 3(t_x + t_y) + \frac{1}{3} = 0.$

$x\cdot y.$

$\log_5 2\cdot xy$

$+\frac{1}{3}.$

$(t_x + t_y)($

$-\frac{1}{3}\log_y 5$

1: $t_x^4 - \frac{3}{t_x} = \frac{1}{t_x} - 3$

2: $t_y^4 + 4\cdot\frac{1}{t_y} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t_y} - 3$

$-5x \quad -5x+90$

$-5x+1=0$

$x = \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{5}$

$a^5 + b^5 = (a+b)($

$(a^4 - a^3b + a^2b^2$

$t_x^5 - 3 = 1 - 3t_x$

$t_y^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t_y$

$t_x^5 + 3t_x - 4 = 0$

$+\ t_y^5 + 3t_y + 4 + \frac{1}{3} = 0$

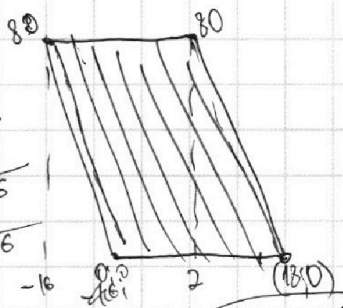
289

2890

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$

16×10

$256 \times 36 = 1536 + 768 = 9216$



$(t_x + t_y)(\ldots) + 3(t_y + t_x) + \frac{1}{3} = 0.$

$\boxed{6\ 9\ 11\ 16}$

$-5x + 1 = y.$

$\log_5^4 2x + \log_5^4 y + 3\cdot\log_5 2xy + \frac{1}{3} = 0$

$x = \frac{1-y}{5} \in \mathbb{Z}$

$17\cdot17\cdot10 + 16\cdot16\cdot36$

$9216 + 2890 = 12106$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

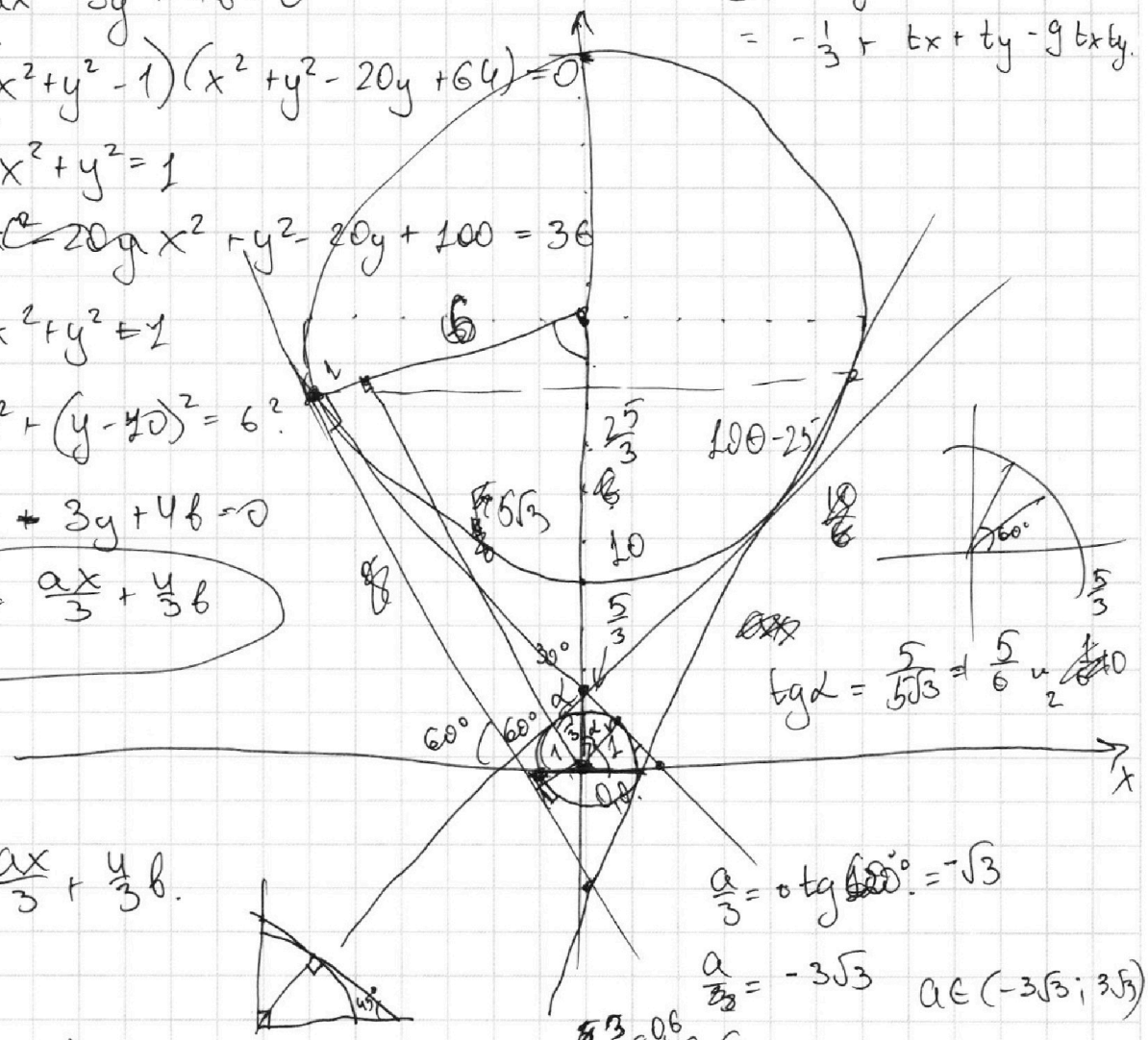
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ \cancel{x^2-20y}\ x^2+y^2-20y+100=36 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right. \\ ax - 3y + 4b = 0 \end{cases}$$

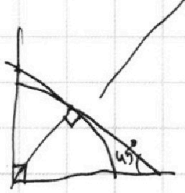
$$y = \frac{ax}{3} + \frac{4}{3}b$$

$$t_x^5 \cdot t_y^5 - 3t_y^5 + 4t_{yx}^5 - 12 =$$
$$= -\frac{1}{3} + t_x + t_y - 9t_xt_y.$$



$$tg\alpha = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{5}{6} \text{ и } \frac{1}{2}$$

$$\frac{ax}{3} + \frac{4}{3}b.$$



$$\frac{a}{3} = tg\,120° = -\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{3} = -3\sqrt{3} \qquad a \in (-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$$

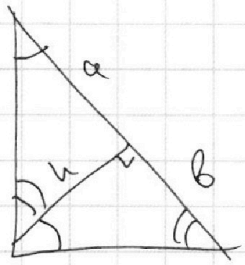
$$\frac{3}{5} = 0{,}6 \quad a \in$$

$$(t_x^5 - 3)\left(-\frac{1}{3} - 3t_y\right)$$

$$\cos\varphi =$$

$$-\frac{t_x^5}{3} - 3t_x^5t_y + 1 - 9t_y.$$

$$t_y^5 - 3t_y^5t_x + 4$$



$$KB^2 = 10y^2 \Rightarrow$$

$$\frac{KB}{y} = \frac{\sqrt{10}}{1}$$

$$h = \sqrt{25y^2 - 4y^2} = \sqrt{21y^2}!$$

$$10y^2 - 2y^2 =$$

$$\cancel{t_y \cdot t_x} = -12t_x. \quad \frac{a}{h} = \frac{h}{b} = h = \sqrt{ab}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за $t_x = \log_5 2x$ $\Rightarrow$ при условии $x > 0$, $y > 0$

$t_y = \log_5 y$

$\Rightarrow t_x^4 - 4 \cdot \frac{1}{t_x} = \frac{1}{3} t_x - 3$

$t_y^4 + 4 \cdot \frac{1}{t_y} = -\frac{1}{3} t_y - 3$

$\Rightarrow \begin{cases} t_x^5 - 3 = 1 - 3t_x \\ t_y^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t_y \end{cases}$ (1)

$t_x^5 + 3t_x - 4 = 0$

$t_y^5 + 3t_y + 4\frac{1}{3} = 0$

$+ \Rightarrow t_x^5 + t_y^5 + 3(t_x + t_y) + \frac{1}{3} = 0.$

(1) $(t_x \cdot t_y)^5 - 3t_y^5 + 4t_x^5 - 12 = -\frac{1}{3} + t_x t_y - 3t_y + 9 t_x t_y$

$(t_x t_y)^5 - 9 t_x t_y - 3t_y^5 + 4t_x^5 - t_x + 3t_y - 11\frac{2}{3} = 0.$

$- 4t_x^5 - 12t_x + 16$

$+ 3t_y^5 + 9t_y + 12$

$(t_x t_y)^5 - 9(t_x t_y) - 13t_x + 12t_y + 28 - 11\frac{2}{3} = 0.$

$f(y) = f(x)$ $f(2x) = \log_5 2x + 3\log_5 2x$

$f(xy) = 0.$ $f(2x) - 4 = f(2y) + 4 + \frac{1}{3}$

$0,2 = 5^{-1}$ $-\frac{1}{3}\log_y 0,2 - 3$ $t_x^5 - 4 - \frac{1}{3} = -3t_x$

$f(x) = f(y)$ $2x = \frac{4}{3} - t_y^5 +$

$\log_5 2x = \log_5 y.$ $4x^3 - \frac{11}{3x}$

$\frac{13}{1}$ $\frac{1}{x} x^{-1} = \ln x$

$4x^3 + \frac{13}{3}\ln|x| = 0$ $\frac{13}{3}\ln x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Все точки с целыми коорд. лежат в области:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ -5x \geq y \\ -5x + 90 \leq y \\ y \leq 80 \end{cases}$$

такие, что $5x_2 + y_2 - (5x_1 + y_1) = 45$. →

→ $5x_2 + y_2 = 5x_1 + y_1 + 45$: $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$

или

$5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_2$

$5x_2 + y_2 - 90 = 5x_1 + y_1$

(будем наз. 2) для всех прямых из нашего участка выполняется следующее:

$-5x + y \in \alpha$ (при ограничениях на y $0 \leq y \leq 80$

$-5x + 1 = y \in \alpha$

$-5x + 2 = y \in \alpha$ ⇒

...

$-5x + 90 = y$ ⇒ $y + 5x = 0$, $y + 5x - 2 = 0$, $y + 5x - 3 = 0$, ..., $y + 5x - 90 = 0$ $\in \alpha$.

Значит, для всех:

$5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$

...

$5x_2 + y_2 - 90 = 5x_1 + y_1 - 45$, это

верно когда они лежат в α.

$-5x + 0 = y$ 5 10

$-5x + 1 = y$ 6 11

$\frac{80}{5} =$

$-5x + 89 = 0$

$-5x + 90 = 0$

$-5x + 89 = 0$

$x = \frac{89}{5}$

10 п.

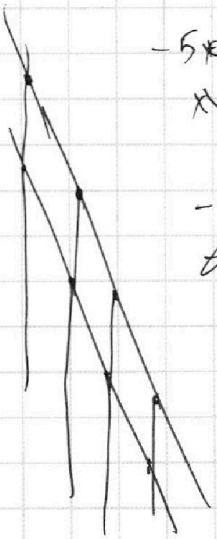
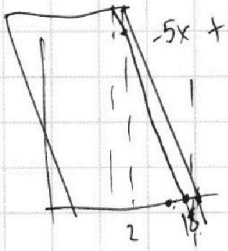
-90

-45

$90 - 50$

$-5x + 89$

$-5 \cdot 17 + 89$

35 п.

16.