



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$bc : 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

, тогда $abc \in N$

(Пусть: $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$) $a^2 b^2 c^2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$, но $55 \not\equiv 2 \pmod{2}$ (\Rightarrow)

$$\begin{aligned} bc &= 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac &= 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{aligned} \quad (\Rightarrow) \quad a^2 b^2 c^2 = 2^{34} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68} \Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

Пояснение: мы берём 56, т.к. 54 не будет хватать и в какой-то
паре возникнет противоречие. т.к. изначально сумма степеней 3 > 55.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

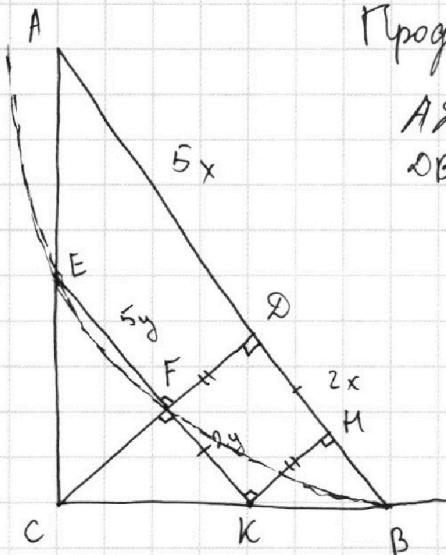
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проводим $EF \parallel AB$

$$AD = 5x \quad | \text{ из условия } EF \parallel AB \Rightarrow \\ DB = 2x$$

$$\Rightarrow EF = 5y, FK = 2y$$

Проводим $KM \perp AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow FDMK - \text{прямоугольник} \Rightarrow FD = KM$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} EF \cdot CF \quad \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD}{CF \cdot EF} = \left(\frac{CF + KM}{CF} \right) \cdot \frac{x}{y} = \\ S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD \quad = \left(1 + \frac{KM}{CF} \right) \frac{x}{y}.$$

$$\text{T.k. } \triangle CFK \sim \triangle CDB : \frac{DB}{FK} = \frac{x}{y} = \frac{CD}{CF} = \left(1 + \frac{KM}{CF} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(1 + \frac{KM}{CF} \right)^2}.$$

$$\text{T.k. } K - \text{степень точки} \Rightarrow KF \cdot KE = KB^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14y^2 = KB^2 \Rightarrow \boxed{\frac{KB}{y} = \sqrt{14}}. \quad \frac{KM}{CF} = \frac{KB}{CK}.$$

$$\text{По определению высоты } CF = \sqrt{10y^2} \Rightarrow CK = \sqrt{CF^2 + FK^2} = \sqrt{10y^2 + 4y^2} = \sqrt{14y^2} = y\sqrt{14}.$$

$$CK = y\sqrt{14} \Rightarrow \frac{KB}{CK} = \frac{KB}{y\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}y} = 1. \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{10y^2 + 4y^2} = y\sqrt{14}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{KB}{CK} = 1 = \frac{KM}{CF} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = (1 + 1)^2 = 4 \quad \text{Ответ: } \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 4.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{2x}{10} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{10} - \frac{2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - 2x\right) = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\cos x = \left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6x \leq -2x \leq 4\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi m \end{cases}$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}k & k, m \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}m \end{cases} \Rightarrow$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}; 3\pi; -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \dots$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

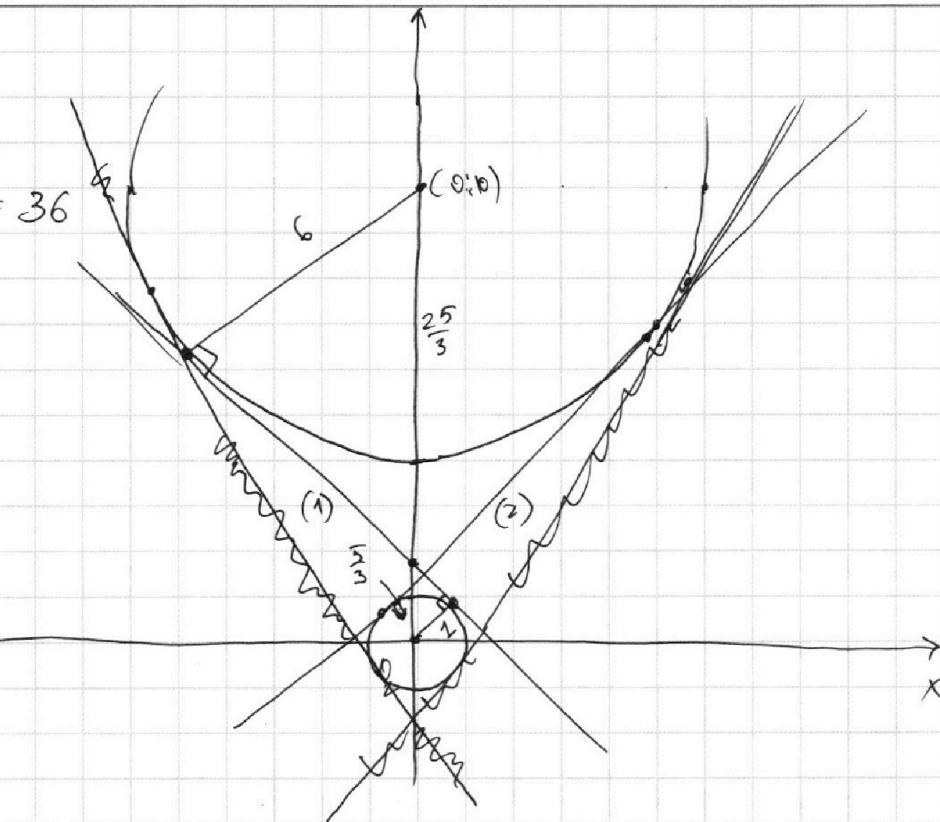
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 4b = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3}$$



внутренние

1) ~~общие~~ общие касательные: это предельные положения

прямой, то есть значения $\frac{a}{3}$:

коэр. перед x

у прямых (1) и (2) отличается только знак.

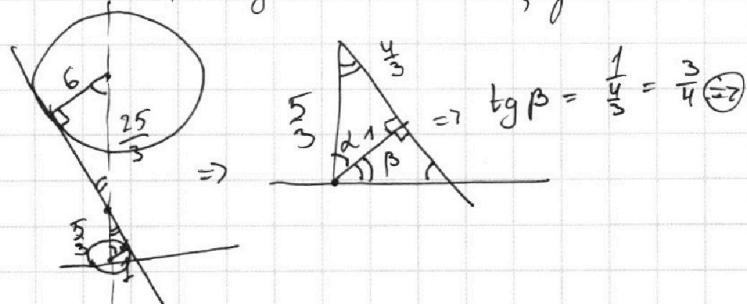
Пусть (1): ~~K_1~~ = K, (2): ~~K_2~~ = K, тогда $K_1 = \frac{a}{3}$ и $K_2 = -\frac{a}{3}$, где таких

$\frac{a}{3}$ всегда найдутся 2, \Rightarrow ?

$$\Rightarrow K_2 = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow K_1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{3}{4} < \frac{a}{3} < \frac{3}{4}$$
$$-\frac{9}{4} < a < \frac{9}{4}$$

Ответ: $-\frac{9}{4} < a < \frac{9}{4}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем: заменим $t_x = \log_5 2x \neq 0$
 $x > 0 \quad y > 0 \rightarrow t_y = \log_5 y \neq 0$, т.к. $y > 0$.

$$t_x^4 - \frac{3}{t_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t_x} - 3 \quad | \cdot t_x \rightarrow \\ t_y^4 + 4 \cdot t_y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t_y} - 3 \quad | \cdot t_y \rightarrow$$

$$\Rightarrow t_x^5 + 3t_x = \frac{13}{3} \\ t_y^5 + 3t_y = -\frac{13}{3} \rightarrow (-t_y)^5 - 3t_y = \frac{13}{3}$$

Пусть $f(x) = x^5 + x \quad f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \Rightarrow f(x)$ инк
всем $\mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, если $x_1 = x_2 \text{ } \textcircled{2}$

$$\Rightarrow f(t_x) = f(-t_y) \Rightarrow t_x = -t_y.$$

$$\log_5 2x = -\log_5 y \Rightarrow \log_5 2x = \log_5 \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 2x - \log_5 \frac{1}{y} = 0 \\ \log_5 2xy = 0 \quad \downarrow \text{т.к. } \cancel{\log_5} \text{ } x > 0 \text{ и } y > 0.$$

$$2xy = 1$$

$$\text{Одн.: } xy = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Все $(-)$ -матрицы одинаки 2.

$$(*) \quad \begin{cases} y \leq 80 \\ y \geq 0 \\ -5x \geq y \\ -5x + 90 \leq y \end{cases} \quad 5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$$

Две бсx привык x d бензинетка:

$$-\log(-5x+y) \in \mathbb{Z} \quad \text{with } y \in [0; 80]$$

$$-5x + 1 = y + 2$$

$$-5x + 2 = y \in \mathbb{Z}$$

$$-5x + 3 = y \in \alpha$$

$$F_1 + g_D = y \in d \quad \text{-cylinder. Torga bce}$$

$$-5x + 90 = y \text{ Ed } \left| -\text{zuw. 10ya ne} \right. \\ y = -5x + k, \text{ zge } k$$

$$y + 5x = 0$$

$$\Rightarrow y + 5x - 1 = 0$$

$$y + 5x - 2 = 0$$

$$\therefore \sqrt{3}x - 90 = 0$$

$$y + 3x = 0$$

установи в

Для каждого партнера есть 17 различных x , которые они могут выбрать; следовательно

На каждой прямой буга $-5x + k = y$, есть 17 точек с целыми координатами \Rightarrow
 это выполняется и для прямой прямой в паре, если $k \neq 5$ то 16 значений,
 пар имея $k \neq 5$ 10 нет. оставшихся 36 нет. ($5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$, $k \neq 5$)

Тогда общее выражение: $17^2 \cdot 10 + 16^2 \cdot 36 =$

= 12 106 Other: 12 106

$$5x_2 + y_3 - 50 = 5x_1 + y_1 - 5$$

и встречается только в группе 5)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Приобразуем: сделав замену $t_x = \log_5 2x$
 $t_y = \log_5 y$

$$t_x^4 - 3t_x = \frac{4}{3} t_x - 3 \quad \text{и} \quad t_y^4 + 4 \frac{1}{t_y} = -\frac{1}{t_y} - 3.$$

Тогда: $t_x^4 - \frac{4}{t_x} = -3$ \Rightarrow
 $t_y^4 + \frac{4}{t_y} + \frac{1}{3t_y} = -3$

\Rightarrow Рассмотрим $f(x) = x^4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{3x}$, тогда
 $f(x) = x^4 + \frac{13}{3x}$ и при $x > 0$ $f(x)$ монотонно

$$\log_5 2x \cdot y = 1$$



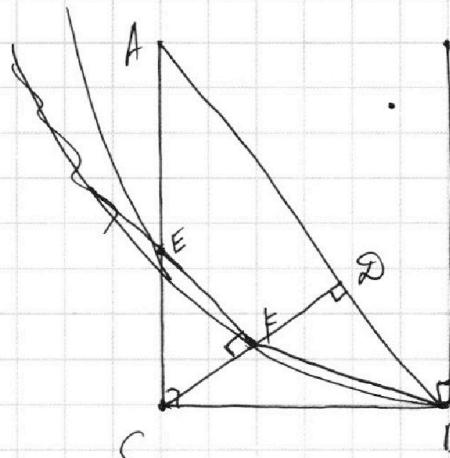
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



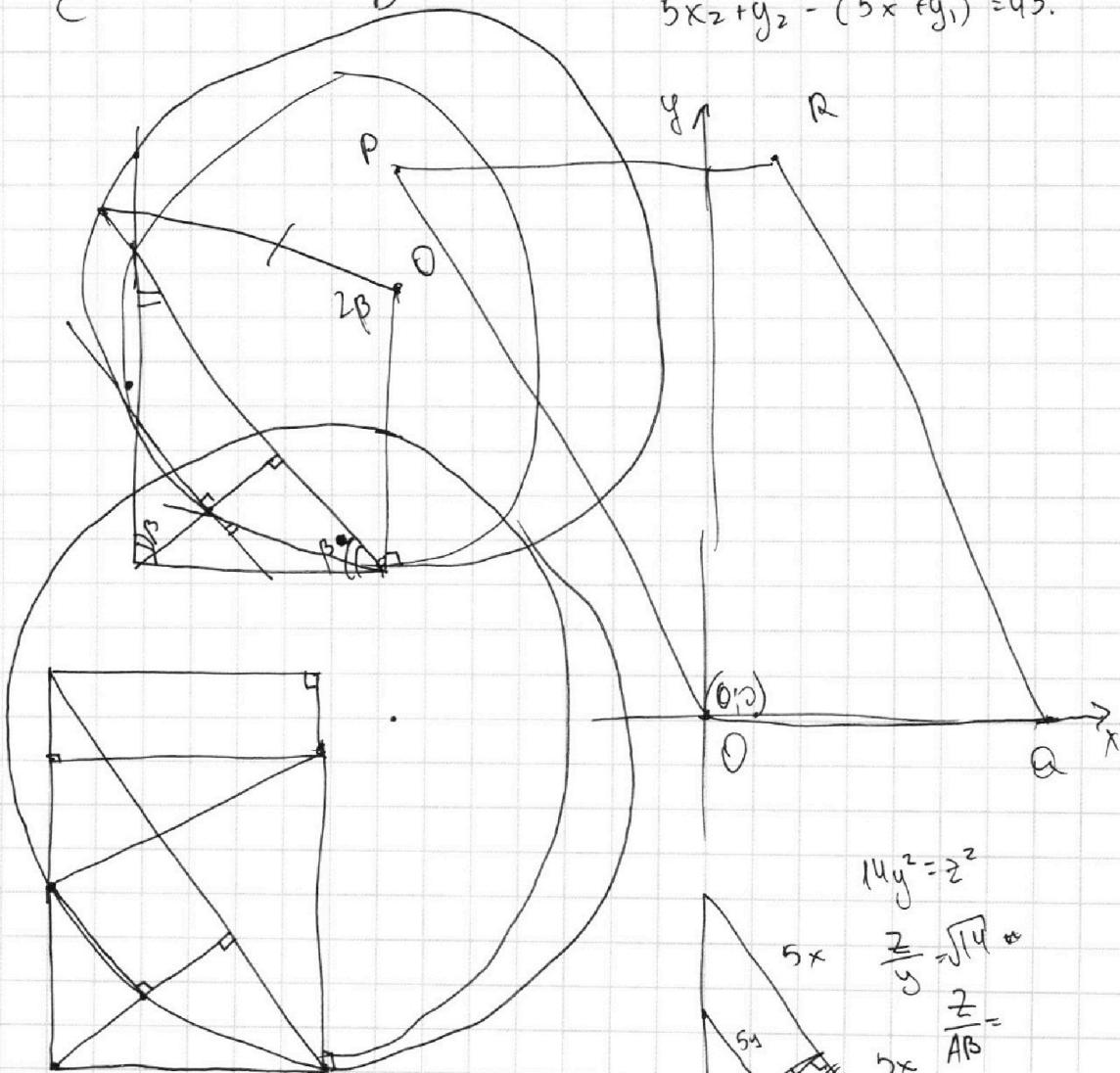
$$6. \quad 5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45 = 9 \cdot 5.$$

разность по $y_2 - y_1 : 5$.

ахаху ввввв

$$5x_2 + y_2 - 5x_1 - y_1 = 45$$

$$5x_2 + y_2 - (5x_1 + y_1) = 45.$$



$$14y^2 = z^2$$

$$\frac{z}{y} = \sqrt{14}$$

$$\frac{z}{AB} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

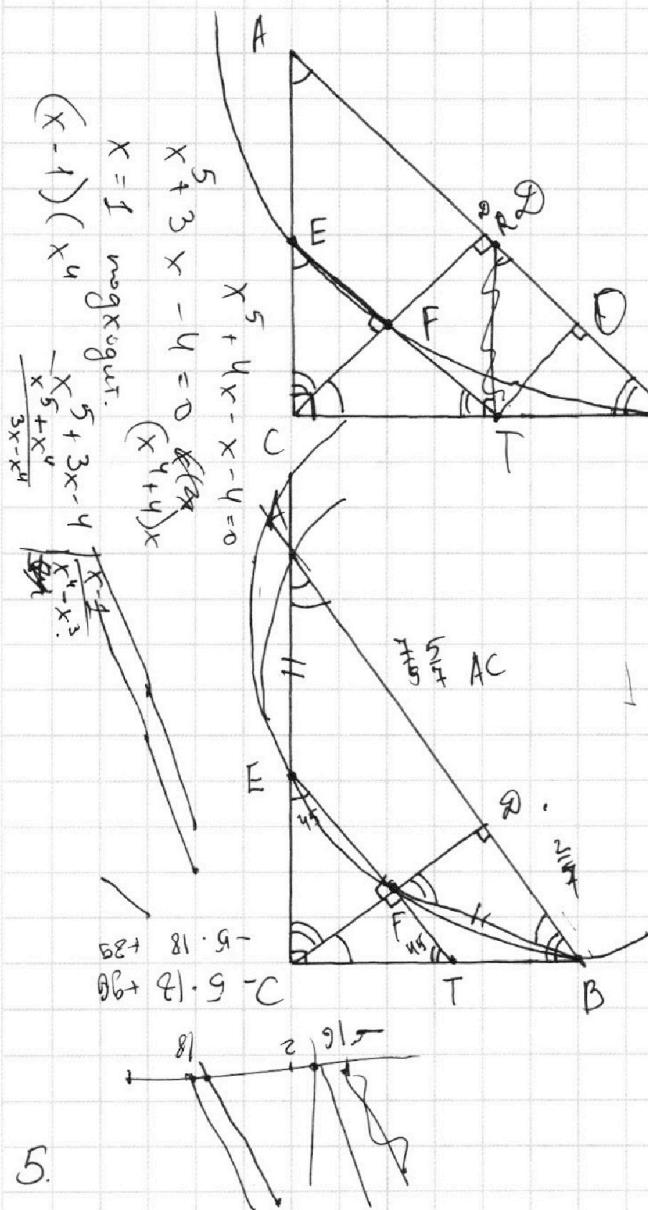
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD : DB = \frac{5}{2}$$

$$\frac{25}{9} - \frac{9}{5} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{l} 2x \\ \parallel \\ \frac{x}{25} \end{array}$$

$$= 06 + 06 = 81 \cdot 5 \\ (M) \pm 1$$

$$\frac{EC}{TO} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$CE \cdot CA = CF \cdot CD \quad ET =$$

$$\frac{CE}{CD} \frac{CA}{CD} = \frac{CF}{CE}$$

$$EF \cdot PE = TB^2$$

$$ET^2 \cdot \frac{2}{7} = TB^2$$

$$EF = \frac{5}{7} \cdot ET$$

$$TF = \frac{2}{7} \cdot ET \quad \frac{ET}{TB} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

5.

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{(2x)^2} 5^4 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) = 4\log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4\log_y 5 =$$

$$= \log_y \sqrt[3]{0,2} - 3$$

$$0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-2}$$

$$-\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

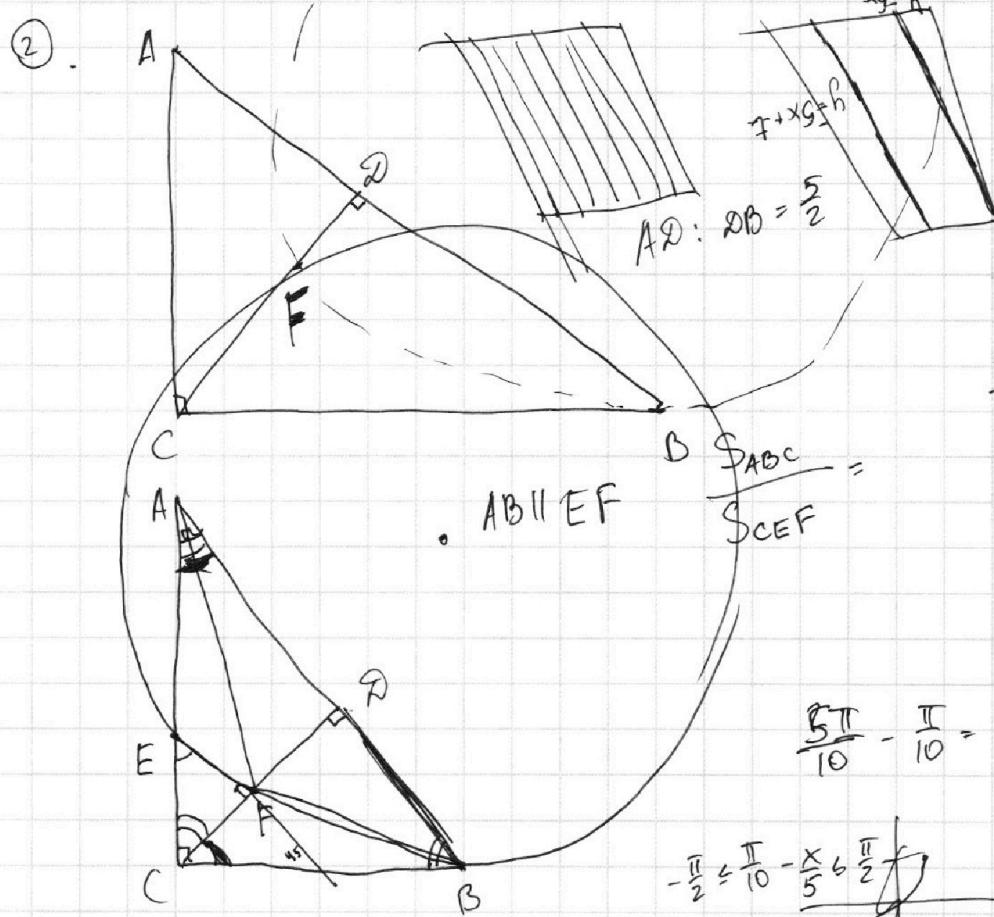
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1}. \quad a b c \quad ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \quad ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$\overline{abc}^2 = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68}} = 2^{17} 3^{28} 5^{34}$$

$$\frac{29}{39} = \frac{30}{40}$$



$$\textcircled{2}. \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi m \end{cases} \Rightarrow$$

$$5x = x + 2\pi + 10\pi k \quad \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} -$$

$$4x = 2\pi + 10\pi k \quad -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}$$

$$5x = -x - \frac{2\pi}{5} + 10\pi m \quad -$$

$$6x = -2\pi + \frac{10\pi m}{k}$$

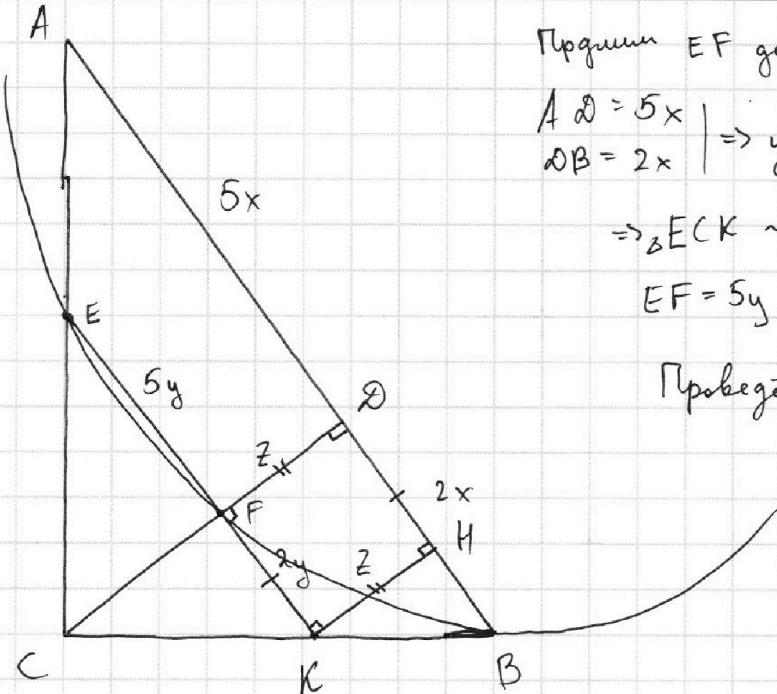
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Приделим EF до EK .

$$AD = 5x \\ DB = 2x \Rightarrow y_3 \text{ умножена} \Rightarrow$$

$$\triangle ECK \sim \triangle ACB \Rightarrow$$

$$EF = 5y \quad FK = 2y \Rightarrow$$

Проведём $KM \perp AB \Rightarrow$

$$FD = KH$$

$$\Rightarrow \triangle CFK \sim \triangle KMB \text{ и } FDKMK - \square \Rightarrow \text{из подобия:}$$

$$\frac{CD}{KH} = \frac{DB}{HB} \Rightarrow \frac{CF + KH}{KM} = \frac{DM + MB}{MB} \Rightarrow \frac{CF}{KM} = \frac{DM}{MB} = \frac{FK}{MB}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} EF \cdot CF$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{EF \cdot CF}{CD \cdot AD} = \left(\frac{CF}{CF + KM} \right) \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{CF + KM}{CF} \cdot \frac{x}{y} = \left(1 + \frac{KM}{CF} \right) \cdot \frac{x}{y}.$$

$$\underline{\text{Из подобия: }} \triangle CFK \sim \triangle CDB: \frac{DB}{FK} = \frac{x}{y} = \frac{CD}{CF} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \left(1 + \frac{KM}{CF} \right)^2 = 1 + \frac{KM}{CF} + \frac{KM^2}{CF^2} \Rightarrow$$

$$\text{Т.к. } K - \text{степень точки} \Rightarrow FK \cdot KE = 10y^2 = KB^2 \Rightarrow \frac{KB}{y} = \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{KM}{CF} = \frac{KB}{CK} \Rightarrow CF = y\sqrt{10} \Rightarrow CK = 2\sqrt{2}y \Rightarrow \frac{KB}{2\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{10}}{CK} = \frac{KB}{CF} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} \right)^2 = 1 + \sqrt{5} + \frac{25}{4} = \frac{29}{4} + \sqrt{5} \Rightarrow \text{Оконч. } \frac{29}{4} + \sqrt{5}.$$



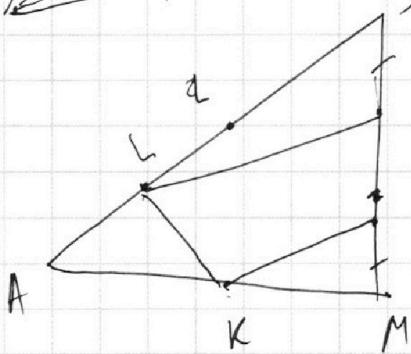
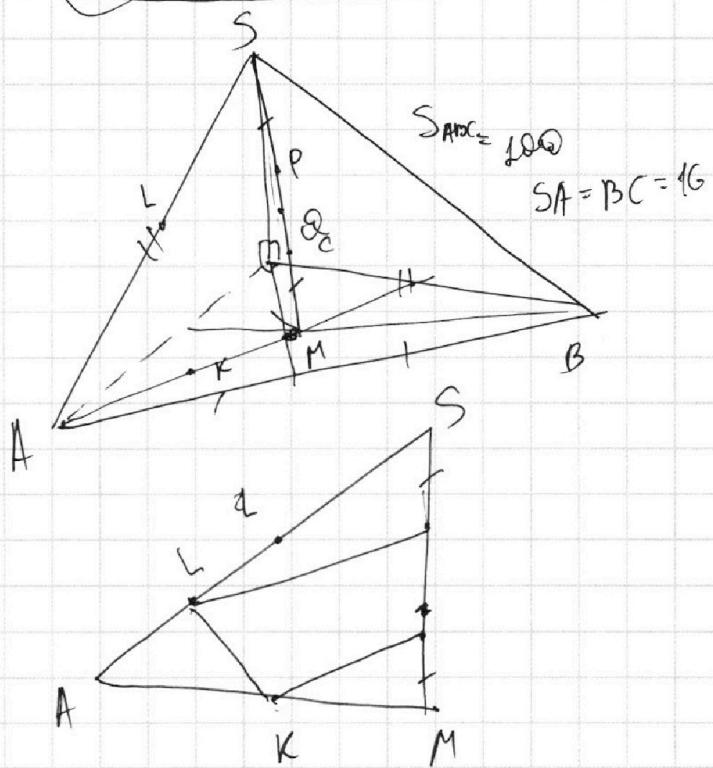
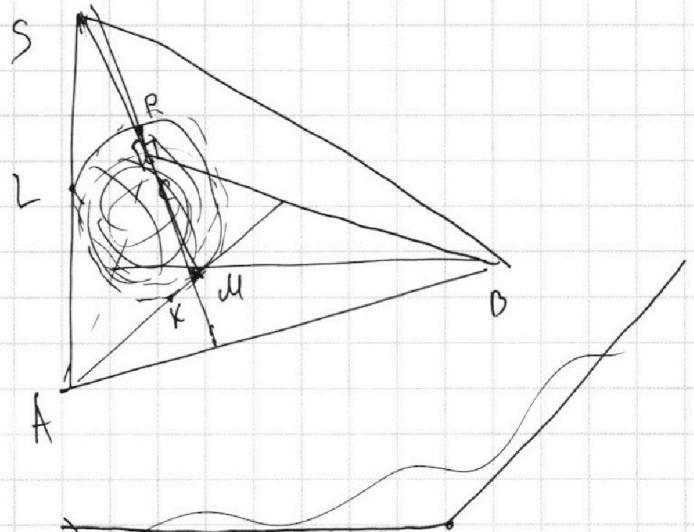
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

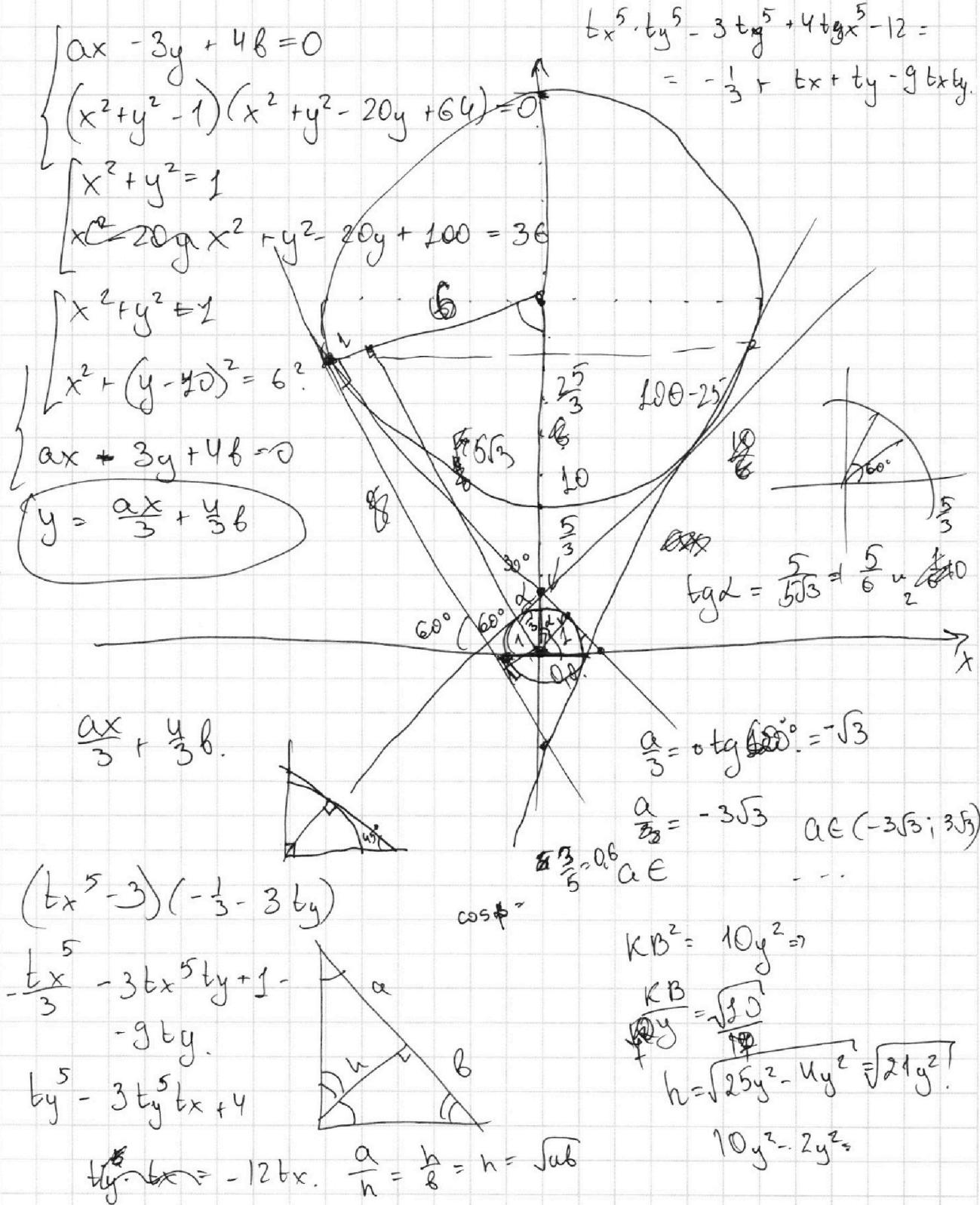
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Обозначим } t_x = \log_5 2x \Rightarrow \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array}$$

$$t_y = \log_5 y$$

$$\Rightarrow t_x^4 - 4 \cdot \frac{1}{t_x} = \frac{1}{3} t_x - 3 \quad \left| \begin{array}{l} t_x^5 - 3 = 1 - 3t_x \\ t_y^5 + 4 \cdot \frac{1}{t_y} = -\frac{1}{3} t_y - 3 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} t_x^5 + 3t_y^5 - 4 = 0 \\ t_y^5 + 3t_y + 4 \frac{1}{3} = 0 \end{array} \quad + \Rightarrow t_x^5 + t_y^5 + 3(t_x + t_y) + \frac{1}{3} = 0.$$

$$(1) (t_x \cdot t_y)^5 - 3t_y^5 + 4t_x^5 - 12 = -\frac{1}{3} + t_x t_y^4 + 9t_x t_y.$$

$$(t_x t_y)^5 - 9t_x t_y - 3t_y^5 + 4t_x^5 - t_x + 3t_y - 11 \frac{2}{3} = 0.$$

$$- 4t_x^5 - 12t_x + 16$$

$$+ 3t_y^5 + 9t_y + 12$$

$$(t_x t_y)^5 - 9(t_x t_y) - 13t_x + 12t_y + 28 - 11 \frac{2}{3} = 0.$$

$$f(x) = f(y) \quad f(2x) = \log_5 2x + 3 \log_5 2x$$

$$f(xy) = 0. \quad f(2x) - 4 = f(2y) + 4 + \frac{1}{3}$$

$$0,2 = 5^{-1} - \frac{1}{3} \log_5 0,2 - 3 \quad t_x^5 - 4 - \frac{1}{3} = -3t_y$$

$$f(x) = f(y) \quad 2x^5 = \frac{4}{3} - t_y^5 +$$

$$\log_5 2x = \log_5 y. \quad 3x^4 - \frac{11}{3x} = 0$$

$$4x^3 + \frac{13}{3} \ln|x| = 0 \quad \frac{1}{x} x^{-1} = \ln x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Все точки с указанными коорд. лежат в области:

$$\begin{aligned} & \text{- } \cancel{\text{задача}} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \geq 0 \\ -5x \geq y \\ -5x + 90 \leq y \\ y \leq 80 \end{array} \right. \quad \text{такие, что } 5x_2 + y_2 \\ & \quad \rightarrow -(5x_1 + y_1) = 45. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5x_2 + y_2 = 5x_1 + y_1 + 45: A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$$

или

$$\begin{aligned} 5x_2 + y_2 \overset{-45}{=} 5x_1 + y_1 + \cancel{45} \quad & \text{, где всех прямых из нашего участка} \\ & \text{выполняется следующее:} \\ 5x_2 + y_2 + 45 &= 5x_1 + y_1 + 80 \end{aligned}$$

Значит, для всех:

$$5x_2 + y_2 = 5x_1 + y_1 + \cancel{45}$$

...

$$5x_2 + y_2 - 90 = 5x_1 + y_1 - 45, \text{ это}$$

верно когда они лежат в α .

$$-5x + y = 5 \quad 10$$

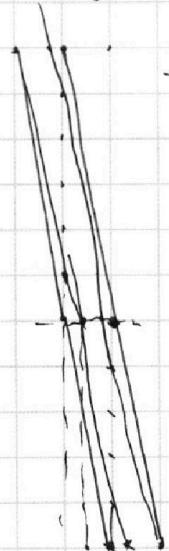
$$-5x + 1 = y \quad 6 \quad 11$$

$$\frac{80}{5} =$$

$$-5x + 80 = 5.$$

$$80 =$$

$$17,0 \quad 18,0$$



$$\begin{aligned} & -5x + 90 = y \quad \Rightarrow \begin{cases} y + 5x = 0 \\ y + 5x - 2 = 0 \\ y + 5x - 3 = 0 \end{cases} \in \alpha. \\ & -5x + 80 = y \quad \dots \\ & -5x + 90 = 0 \quad y + 5x - 90 = 0 \end{aligned}$$

$$-5x + 80 = 0 \quad 10 \text{ р.}$$

$$x = \frac{80}{5}.$$

$$-90$$

$$-5x + 80 = 90 \quad -50 \quad -45$$

$$-5x + 80 = 80 \quad 0 \quad -50$$

$$-5x + 80 = 35 \quad 35$$

$$-5x + 80 = 16 \quad 16$$

