



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

$$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}; \quad bc: 2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}; \quad ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

Пирамочки получаем:  $a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{53} \cdot 5^{53}$

$a, b, c$  - натуральные числа  $\Rightarrow (abc)^2$  - квадрат натурального числа?

И.к. квадрат числа можно разложить на четные степени, то

$$a^2 b^2 c^2: 2^{42} \cdot 3^{53} \cdot 5^{53} \Rightarrow abc: 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{27}$$

Заметим  $ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \Rightarrow ac: 5^{30} \Rightarrow abc: 5^{30} \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc: 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$$

Наименьшее возможное значение  $abc$ , при  $abc: 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$ , это

$abc = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$ . Необходимо построить пример таких чисел  $a, b, c$ :

$$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13} \quad \left. \begin{array}{l} ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \right\} \begin{array}{l} : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{13} \\ : 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{13} \\ : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{array} \quad W$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{17}$$

Эти числа  $a, b, c$  - подходят  $\Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$

Наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

Ответ:  $abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

По формуле приведения  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ,

тогда

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{1}{2}\pi$$

$$\frac{4}{2}\pi = 6x$$

$$2\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

Проверка:  $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ;

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = 5 \arcsin\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) = 5 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\pi + x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi - \text{подходит}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{3}$ .



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \rightarrow 2y=-ax+3b \rightarrow y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

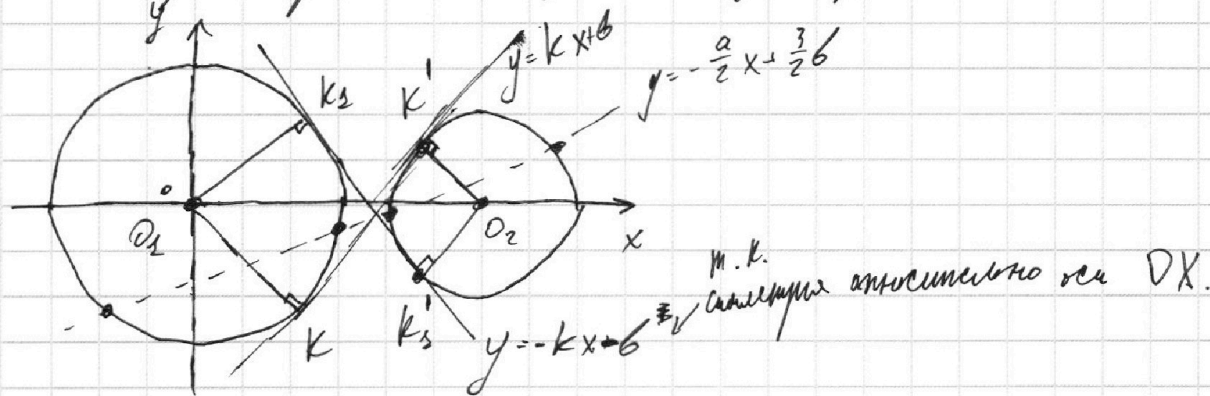
$$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$$

$$\begin{cases} y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b \leftarrow y-\text{е прямая} \\ x^2+y^2-9=0 \rightarrow x^2+y^2=3^2 \leftarrow y-\text{е окружность} \\ x^2+y^2-12x+32=0 \rightarrow (x-6)^2+y^2=2^2 \leftarrow y-\text{е окружность} \end{cases}$$

$$x^2+y^2-9=0 \rightarrow x^2+y^2=3^2 \leftarrow y-\text{е окружность}$$

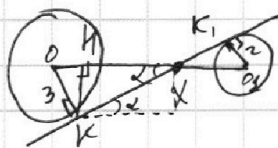
$$x^2+y^2-12x+32=0 \rightarrow (x-6)^2+y^2=2^2 \leftarrow y-\text{е окружность}$$

Построим график совокупности (две окружности)



м.к. симметрична относительно оси OX.

Получаем на искомое значение  $a$ , будет видно, что  $-k < -\frac{a}{2} < k \Rightarrow -2k < a < 2k$ , найдем значение  $k$ .



$$OO_1 = 6, \quad OO_1 \perp KK_2 \rightarrow \text{м. X.}$$

Из подобия  $\frac{OX}{O_2X} = \frac{OK}{O_2K_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow OX = \frac{3}{5}OO_1 = 3,6$

По м. Птолемея  $KX^2 = OX^2 - OK^2 = 3,6^2 - 3^2 = 6,6 \cdot 0,6 = 0,6^2 \cdot 11$

$KH = \frac{KO \cdot KX}{OX} = \frac{3 \cdot 0,6 \sqrt{11}}{3,6} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ , по м. Птолемея  $HX^2 = KX^2 - KH^2$

$HX^2 = 0,36 \cdot 11 - 0,25 \cdot 11 = 0,11 \cdot 11 = 1,1^2 \Rightarrow HX = 1,1 \quad 1/2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 15

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y}^2 (3^{\frac{1}{5}}) - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0 \rightarrow \left(-\log_3 \frac{1}{5y}\right)^4 - \frac{7}{2}(-1) \log_{\frac{1}{5y}} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 \left(\frac{1}{5y}\right) + \frac{7}{2} \log_{\frac{1}{5y}} 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что если  $x$ -решение  $y$ -а  $\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$ ,

то  $\frac{1}{5y} = x$ ,  $y = \frac{1}{5x}$  — решение  $y$ -а  $\log_3^4 \left(\frac{1}{5y}\right) + \frac{7}{2} \log_{\frac{1}{5y}} 3 + 8 = 0$ .

Рассмотрим  $y$ -е  $\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$ ,  $x > 0$ ,  $x \neq 1$

Введем замену:  $\log_3 x = t \Rightarrow \log_x 3 = \frac{1}{t}$   
 $x \neq 1 \Rightarrow t \neq 0$

$$t^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{t} + 8 = 0 \quad | \cdot t \neq 0$$

$$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 2t^5 + 8t = -7$$

$(2t^5 + 8t)' = 10t^4 + 8 > 0 \Rightarrow$  ф-я  $2t^5 + 8t$  — возрастательная и

она будет иметь всего одну точку пересечения с прямой  $y = -\frac{7}{2}$

$\Rightarrow$  существуют всего одно решение уравнения  $\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$ .

1/2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получается существует всего одно такое число  $x$ , и  
всего одно такое число  $y$ , что они удовлетворяют  
равенствам и по ранее описанной методике  
выполняется равенство  $x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$  ← ответ  
Всего одно возможное значение произведения  $xy$   
Ответ:  $xy = 0,2$ .

2/2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6/

$O(0;0); P(-14;42); Q(6;42); R(20;0)$

Введем для каждой точки с целочисленными координатами  
функцию  $f(x,y)$ , где  $x,y$  - координаты точки

$f(x,y) = 3x + y$ , тогда выразив  $y$  получаем

$$y = -3x + f(x,y)$$

По условию  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$

Заметим, что если у точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  одинаковые  
значения  $f(x,y)$ , то они лежат на одной прямой,

обобщив получаем что все точки лежащие на прямой

$y = -3x + f(x,y)$  имеют одинаковые значения функции  $f(x,y)$  (однаков.)

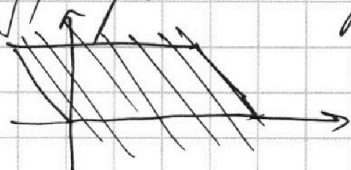
Поскольку заметим сторона  $OP$  лежит на прямой  $y = -3x$

значит у точек на стороне  $OP$   $f(x,y) = 0$ . (на стороне  $OP$ )

Сторона  $RQ$  лежит на прямой  $y = -3x + 60 \Rightarrow$

у точек на стороне  $RQ$   $f(x,y) = 60$ .

Мы проведем прямые  $y = -3x + f(x,y)$ , где  
 $f(x,y)$  - принимает значения от 0 до 60.



Получаем кол-во точек на  
каждой из прямых

1/2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На прямой, у которой  $f(x, y) : 3$  будет лежать по 15 точек,  
а на ординате по  $M$  точек.

Найти количество пар точек для которых выполняется

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = 33$$

Решение будут:  $33-0; 34-1; 35-2; \dots; 59-26; 60-27$ .

Всего 28 пар  $f(x; y)$  из которых 10 будут  
составлены из  $f(x, y) : 3$

$$\text{Тогда число пар точек будет } 18 \cdot 14^2 + 10 \cdot 15^2 =$$
$$= 5778. \leftarrow \text{ответ}$$

Ответ: 5778 пар точек



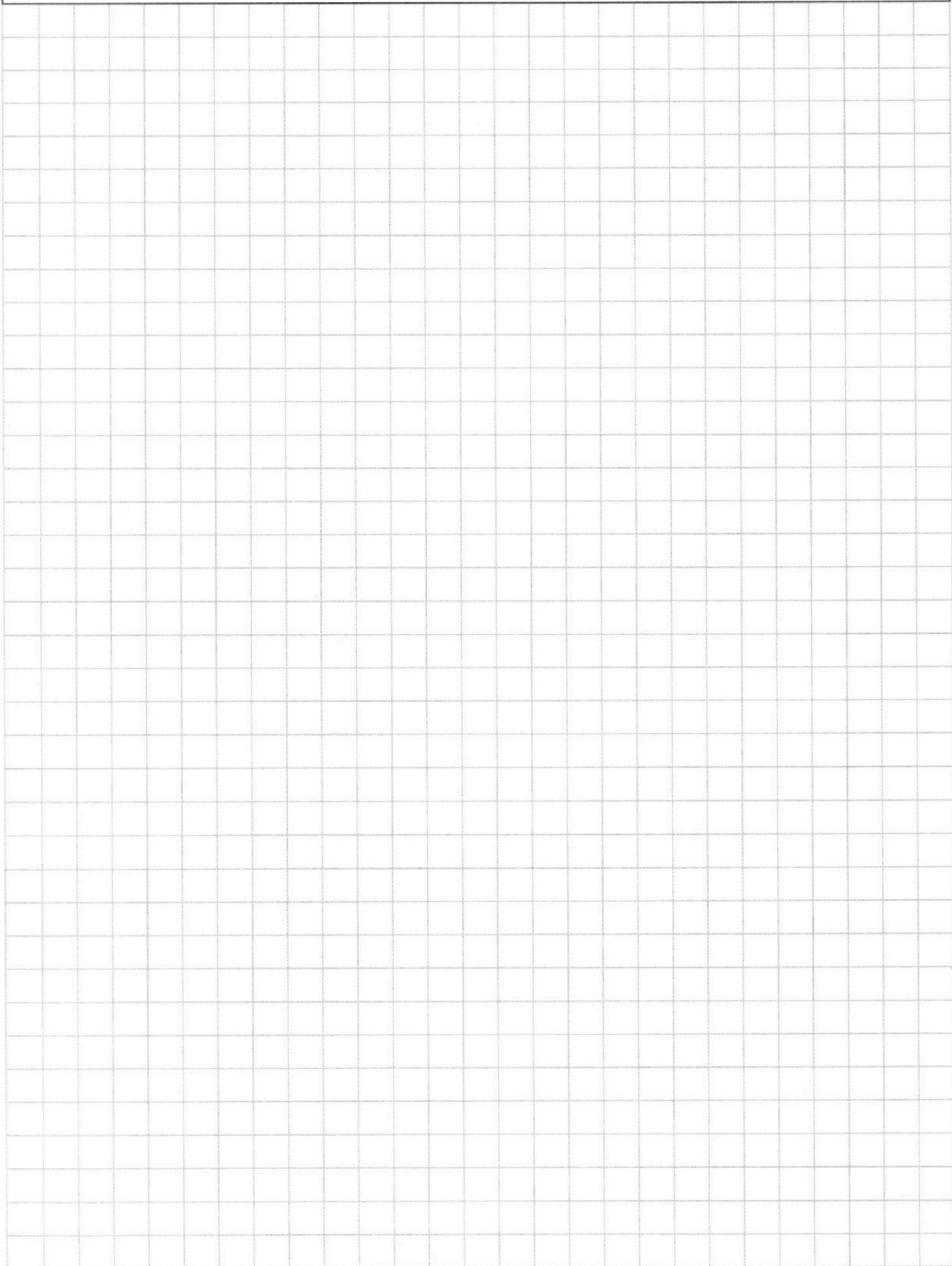
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







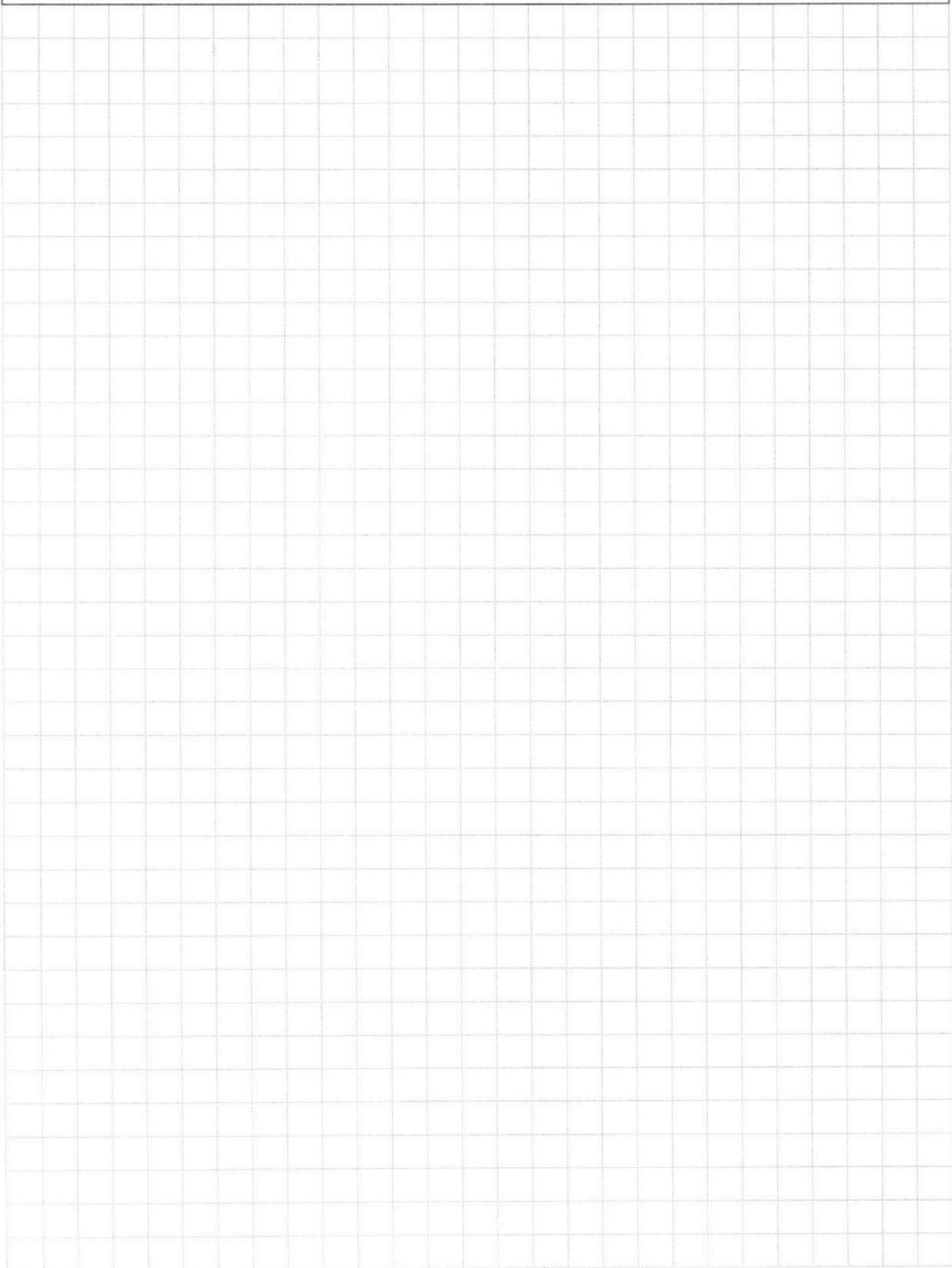
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



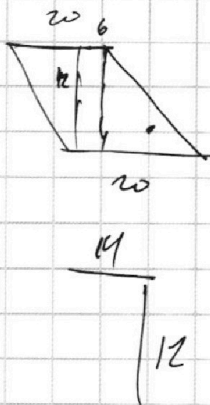
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

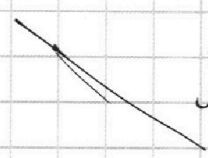


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

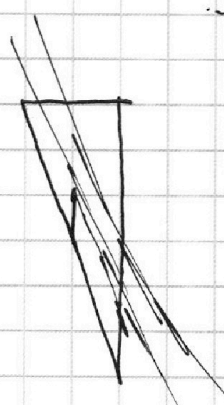


$f(x) = 3x + 12$   
 $42$   
 $-14$

$f(x, y) = 3x + y$   
 $y = -3x + 60$



$y = -3x$



$0; 13$   
 14 точек

$0; 0$      $3$      $15$   
 $1$   
 $2$      $42; 10; 13$

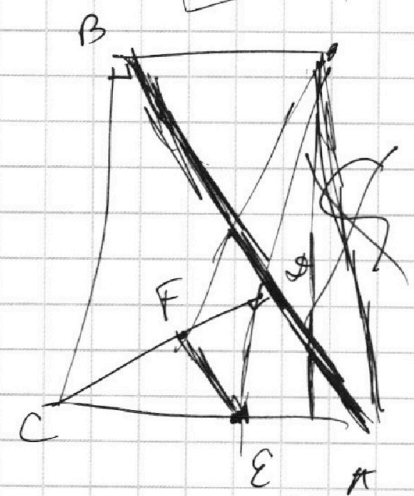
$15; 0$   
 $14; 2$

$-3x + 12 \geq 0$   
 $0 + 33; 3 + 30; 6 + 27; 9 + 24; \dots$

$-3x + 60$

$$\begin{array}{r}
 12 \cdot 15 + 34 \cdot 14 \\
 \hline
 225 \\
 12 \\
 \hline
 450 \\
 225 \\
 \hline
 2700
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 196 \\
 24 \\
 \hline
 784 \\
 588 \\
 \hline
 6600 \\
 2700 \\
 \hline
 9364
 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*

$$\begin{array}{r} 196 \\ 18 \\ \hline 1568 \\ 196 \\ \hline 3528 \\ 2250 \\ \hline 5778 \end{array}$$