



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1:4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

Заметим, что в разложении чисел для минимизации произведения должны быть

только числа 2, 3 и 5 в некоторых степенях.
Если встретится другое простое число, p , можно в разложении, например, числа a , можно не нарушать условий задачи, возвратив число $\frac{a}{p}$ — таким образом произведение уменьшится.

Утак, пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$

$$\beta = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$$

$$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$ab = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2} \quad ; \quad 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc = 2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_2 + \gamma_3} \quad ; \quad 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac = 2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_3} \quad ; \quad 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 11 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 \geq 16 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$$

abc будет наименьшим, когда простые множители, на которые это число разложено, входят в наименьших степенях. Из ранее записанных систем следует:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 36 \quad 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 59 \quad 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 52$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$$

$$\text{но } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{59}{2} = 29\frac{1}{2} \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26.$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$$

Поэтому наим. возмож.

значение $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$

заметим, что

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28 \Rightarrow$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28$$

Утак, $abc \geq$ равно 30.

Равенство достигается, например, для чисел $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$.

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x. \quad 9\pi - 2x$$

(1)

$$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi, 0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$$

Значит, для равенства необходимо условие:

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi; \quad -9\pi \leq -2x \leq \pi;$$

$$-\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi.$$

Сделаем замену: $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Заметим, что $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

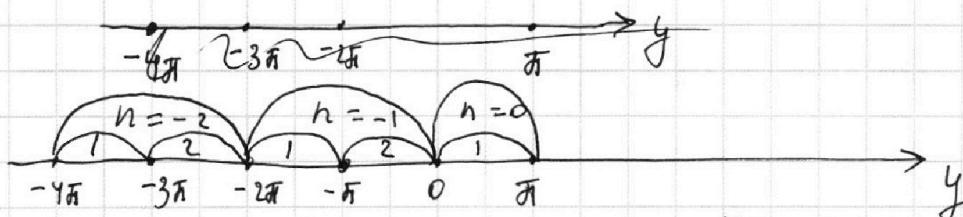
$$\begin{aligned} \text{Значит, } \sin x &= \cos y. \quad x = \frac{\pi}{2} - y; \quad 9\pi - 2x = 9\pi - 2(\frac{\pi}{2} - y) = \\ &= 9\pi - \pi + 2y = 8\pi + 2y. \end{aligned}$$

$-4\pi \leq y \leq \pi$. Ур-е принимает вид:

$$10 \arccos(\cos y) = 8\pi + 2y.$$

Заметим теперь, что $\arccos(\cos y) = \begin{cases} y - 2\pi n, & y \in [2\pi n; \pi + 2\pi n) \\ y - 2\pi n, & y \in [2\pi n; \pi + 2\pi n] \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$

В нашем случае $y \in [-4\pi; \pi]$. Исследуем,
на какие промежутки ведут $[2\pi n; \pi + 2\pi n], [2\pi n; \pi + 2\pi n)$,
 $n \in \mathbb{Z}$ делится отрезок, в котором умещается y .



В маленьких дугах, отмеченных на прямой показаны,
во какой форме в данном промежутке существует
 $\arccos(\cos(y))$: 1 - если $\arccos(\cos y) = y - 2\pi n$; 2 - если



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\arccos(\cos y) = 2\pi - y + 2k\pi$. В больших дугах искажен, (2)
при каком k наступает ^{ое} изложение.

Итак, Теперь перейдем к решению ур-я. Рассмотрим
несколько случаев:

1) $y \in [-4\pi; -3\pi]$; $10\arccos(\cos y) = 10(y + 4\pi)$;

$$10(y + 4\pi) = 8\pi + 2y; 10y + 40\pi = 8\pi + 2y; 8y = -32\pi; y = -4\pi; \text{ удовл. условию. Продолжим.}$$

2) $y \in (-3\pi; -2\pi)$

$$10\arccos(\cos y) = 10(2\pi - y + 4\pi) = 10(-6\pi - y)$$

$$10(-6\pi - y) = 8\pi + 2y; 60\pi - 10y = 8\pi + 2y; 12y = 52\pi$$

$$y = \frac{52\pi}{12} > 0, \text{ но } y < -2\pi < 0 \quad \text{противоречие.}$$

3) $y \in$

$$10(-2\pi - y) = 8\pi + 2y; -20\pi - 10y = 8\pi + 2y$$

$$12y = -28\pi; y = -\frac{7}{3}\pi = -2\frac{1}{3}\pi \in [-3\pi; -2\pi] \text{ удовл. услов. усл.}$$

3) $y \in [-2\pi; -\pi]$; $10\arccos(\cos y) = 10(y + 2\pi)$

$$10(y + 2\pi) = 8\pi + 2y; 10y + 20\pi = 8\pi + 2y; 8y = -12\pi; y = -\frac{3}{2}\pi$$

4) $y \in [-\pi; 0]$; $10\arccos(\cos y) = 10(2\pi - y + 2\pi) = -10y$.

$$-10y = 8\pi + 2y; 12y = -8\pi; y = -\frac{2}{3}\pi$$

5) $y \in [0; \pi]$; $10\arccos(\cos y) = 10y$

$10y = 8\pi + 2y; y = \pi$. Этот корень не удовл. промежутку $[0; \pi]$, но, в ~~уравнениях~~ если подставить

это число в ур-е, оно обратится в первое равенство.

Но это $y = \pi$ — корень.

Итак, $y = -4\pi; -\frac{7}{3}\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{2}{3}\pi; \pi$. Сделаем

обратную замену и находим ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} - y; x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + \frac{7}{3}\pi = \frac{17}{6}\pi; x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi; x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5\pi}{6};$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}.$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИЕсли отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!2) $a \neq 0$. Т.к. прямая имеет с ②

окруженностью 4 общие точки для 4 решений системы. Это возможно только в том случае, когда прямая пересекает окружность в 2 точках (т.к. прямая и окр. пересекаются не более, чем в 2 точках).

Тогда обе системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 5x + 6ay - b = 0 \end{cases} \quad \text{и } \begin{cases} x^2 + (y+g)^2 = 4 \\ 5x + 6ay - b = 0 \end{cases}$$

имеют 2 решения. Рассмотрим решения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} \end{cases} \quad \left(-\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}\right)^2 + y^2 = 25 \quad | \cdot 25$$

$$(-6ay)^2 (-6ay + b)^2 + 25y^2 = 625;$$

$$36a^2y^2 - 12aby + b^2 + 25y^2 = 625$$

$$y^2(36a^2 + 25) - 12aby + (b^2 - 625) = 0.$$

Заметим, что это квадратное ур-е должно иметь 2 реш-я. предположим, что оно одн. ^{не более, чем одно}. Тогда

$$5x + 6ay - b = 0 \text{ имеет не более 1 решения} \Rightarrow$$

Система имеет не более одного решения.

$$\text{Тогда } (12ab)^2 - 4(36a^2 + 25)(b^2 - 625) > 0 \quad | : 4$$

$$144a^2b^2 - 36a^2b^2 - 625 \cdot 36a^2 + 25b^2 + 25 \cdot 625 > 0$$

$$25b^2 < 36 \cdot 625a^2 - 25 \cdot 625 \quad | : 25$$

$$b^2 < 36 \cdot 25a^2 - 625. \quad \text{от}$$

И так, должно существовать такое b , что это нер-во верно. $\Rightarrow 36 \cdot 25a^2 - 625 > 0$
 $36a^2 > 25; \quad \left[a > \frac{5}{6} \right]$
 $a < -\frac{5}{6}$.

$$(2) \begin{cases} x^2 + (y+g)^2 = 4 \\ x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} \end{cases} \quad \left(-\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}\right)^2 + (y+g)^2 = 4 \quad | : 25$$

$$\begin{cases} x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} \\ (-6ay + b)^2 + (5y + 45)^2 = 100 \end{cases}$$

$$36a^2y^2 - 12aby + b^2 + 25y^2 + 225 + 450y + 2025 = 100$$

$$36 \cdot y^2(36a^2 + 25) + y(12ab + 450) + 1925 = 0$$

Предположим, это ур-е имеет ^{не более одного} корня.

Тогда ур-е $x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}$ имеет один корень \Rightarrow система имеет не более одного корня, как и система. А нуто?

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

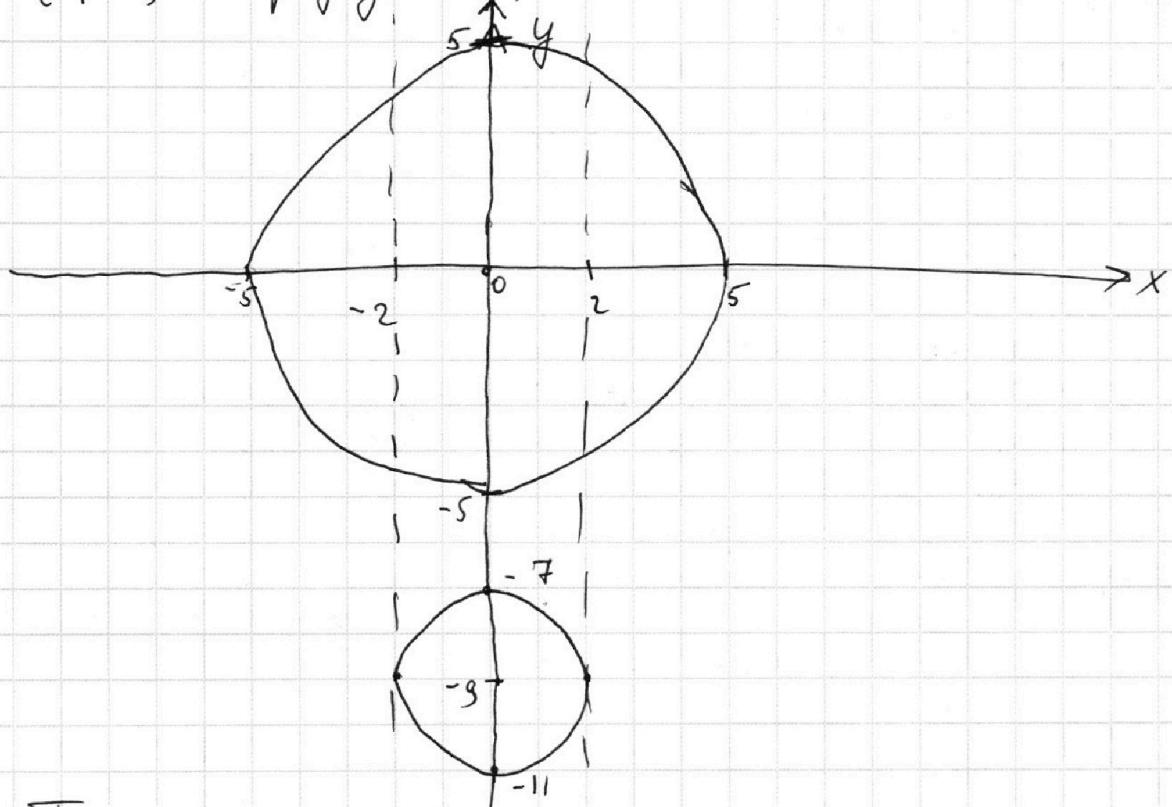
№ 4.

(1)

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Пока дадимся вторым ур-ем:
 $(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$

Оба ур-я совокупности дают окр.: первое - с центром $(0, 0)$ и радиусом 5, а второе - с центром $(0, -9)$ и радиусом 2.



Теперь становится ясно, что прямая $5x + 6ay - b = 0$ должна пересекать наши окружности в 4 точках -
тогда система имеет 4 решения. Рассмотрим
несколько случаев:

1) $a = 0$. $x = \frac{b}{5}$. Это прямая, параллельная оси
Oy. Она имеет с нашими окружностями 4 общие
точки, когда

$$-2 < \frac{b}{5} < 2 \quad (\text{такие } -2, 0, 2, 3, 1 \text{ или } 0)$$

$$-10 < b < 10. \quad \text{Итак, для } a=0 \quad \text{Это такое, что}$$

система имеет 4 решения.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

корня. Тогда $(-12ab + 450)^2 - 4(36a^2 + 25)(1925 + b^2) \geq 0$ (3)

$$(-12ab + 450)^2 - 4(36a^2 + 25)(1925 + b^2) \geq 0 \quad | : 4$$

$$(-6ab + 225)^2 - (36a^2 + 25)(b^2 + 1925) \geq 0$$

$$36a^2b^2 - 12 \cdot 225ab + 225^2 - 36a^2b^2 - 36 \cdot 1925a^2 - 25b^2 - 25 \cdot 1925 \geq 0$$

$$-12 \cdot 225ab + 225^2 - 36 \cdot 1925a^2 - 25b^2 - 25 \cdot 1925 \geq 0$$

$$-12 \cdot 9ab + 9 \cdot 225 - 36 \cdot 77a^2 - b^2 - 25 \cdot 1925 \geq 0$$

$$36 \cdot 77a^2 + 12 \cdot 9ab + b^2 - 100 \leq 0$$

Должно существовать b , при котором это неравенство верно. Тогда квадратный трёхчлен относительно b должен иметь 2 корня, т.к. $36 \cdot 77 > 0$. Значит,

$$(12 \cdot 9b)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 77(1b^2 - 100) \geq 0 \quad | : 16$$

$$(3 \cdot 9b)^2 - 9 \cdot 77(1b^2 - 100) \geq 0 \quad | : 9$$

$$81b^2 - 77b^2 + 7700 \geq 0 \quad \text{Это неравенство}$$

$(12 \cdot 9a)^2 + 4 \cdot 100 + 36 \cdot 77a^2 \geq 0$ — это верно
 $a \neq 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2)

n5.

$$1) \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{x^3/121} \frac{1}{11} - 5 \quad \begin{matrix} x \neq 0, x > 0, x \neq 1 \\ x > 0, x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad | \cdot 3 \log_{11} x$$

$$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0$$

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-3}) - 5 \quad \cancel{\log y \neq 2; y > 0}$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = \log_{0,125y^3} \frac{1}{11^3} - 5 \quad \begin{matrix} \log_{0,5y} 11 = -\frac{13}{3} \\ \log_{0,5y} 11 = -5 \end{matrix}$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 15 \log_{11} 0,5y + 16 = 0$$

23 Решите $u = \log_{11} x; v = \log_{11} 0,5y$.

$$\begin{cases} 3u^5 + 15u - 16 = 0 \\ 3v^5 + 15v + 16 = 0 \\ u^5 + v^5 + 5(u+v) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(u^5 + v^5) + 15(u+v) = 0 \quad | :3 \\ 3(u^5 - v^5) + 15(u-v) = 0 \end{cases}$$

$$6(u+v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4) + 5 = 0$$

$$1) u = -v, \quad u+v=0.$$

$$\log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0$$

$$\log_{11} 0,5xy = 0; \quad 0,5xy = 11; \quad xy = 22.$$

$$2) u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 + 5 = 0$$

$$u^4 + v^4 + 5 - uv(u^2 - uv + v^2) = 0$$

$$3(u^5 - v^5) + 15(u-v) - 32 = 0$$

Предположим, ~~если~~ отрицательно u есть хотя бы

р-и то $f(u) = u^5 + 5u + v^5 + v; \quad f'(u) = 5u^4 + 5 > 0$

$f(u) \Rightarrow$ не более 1 решения отрицательно u .

Это решение $u = -v$. В этом случае показано, что $xy = 22$.

Ответ: 22.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5.

 $x > 0, x \neq 1$

(1)

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \cancel{\log_{11}^3 \frac{1}{121} - 5}. \text{ Преобразуем это выражение.}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cancel{\log} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \mid \cdot \log_{11} x,$$

$$x \neq 1 \Rightarrow \log_{11} x \neq 0$$

$$3 \log_{11}^5 x - 6 \cdot 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$\log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0. \text{ Заметим, что } \log$$

$$\text{Пусть } \log_{11} x = t; t^5 + 15t - 16 = 0.$$

Заметим, что $t=1$ - корень. Заметим, что других корней быть не может т.к. $f(t) = t^5 + 15t - 16$ - возрастающая ф-я. Покажем это: $f'(t) = 5t^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(t)$ - возрастает. И так, $\log_{11} x = 1; x = 11$.

Занимайтесь вторыми выравниваниями!

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125} y^3 (11^{-13}) - 5,$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \cancel{\log_{0,5y} 11} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} - 5.$$

$$\text{Пусть } \log_{11} 0,5y = u, \text{ т.к. } u \neq 0, \text{ т.к. } y \neq 2 \Rightarrow$$

$$u^4 + \frac{1}{u} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{u} - 5 \mid \cdot 3u \quad 0,5y \neq 1 \Rightarrow \log_{11} 0,5y \neq 0.$$

$$3u^5 + 3 = -13 - 15u; 3u^5 + 15u + 16 = 0;$$

Пусть $f(u) = 3u^5 + 15u + 16; f'(u) = 15u^4 + 15 > 0 \forall u \Rightarrow$
 $f(u) \geq f(u) \in \mathbb{R} \Rightarrow 3u^5 + 15u + 16 = 0$ имеет не
 более 1 корня.

$$\begin{aligned} 3u^5 + 15u + 16 &= 0 \\ t^5 + 15t - 16 &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.

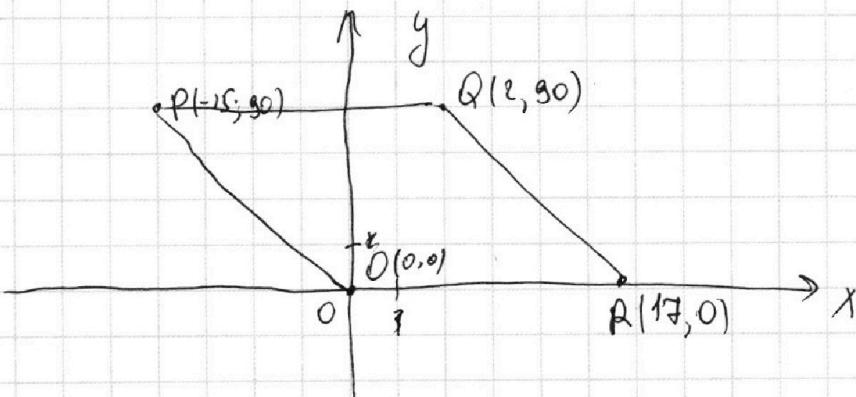
$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

Пусть $x_2 - x_1 = x$; $y_2 - y_1 = y$.

~~$6x + y = 48$. Из этого следует, что
все точки, удовлетворяющие условию, лежат на прямой
 $6x + y = 48$.~~

Заметим, что все ~~эти~~ ^{пары} точки, которые удовлетворяют
условию, лежат на прямой $6x + y = 48$.

Заметим, что все ~~эти~~ ^{пары} точки $X(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$
такие, что $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ — лежат на
прямой $6x + y = 48$. $y = -6x + 48$



Т.к. ~~пары~~ ^{точки} лежат ~~внутри~~ ^{внешне} параллограмма,
их координаты удовлетворяют ^{уравнению} ~~условию~~:
 $0 \leq y \leq 90$

$$\begin{cases} y \geq -6x + 48 \\ y \leq -6x + 102 \end{cases}$$

Пусть точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ такие, что
 $6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

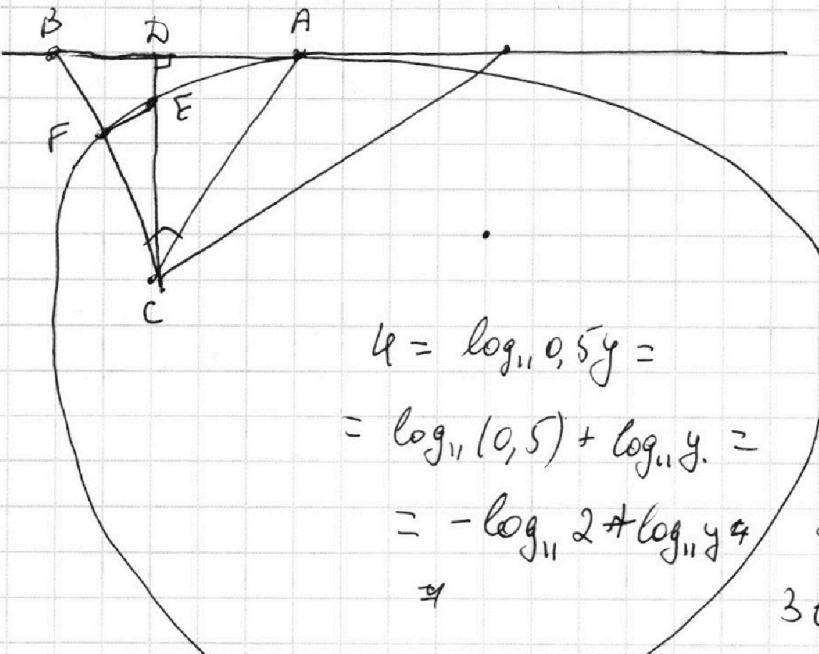
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 4x &= \log_{11} 0,5y = \\ &= \log_{11} (0,5) + \log_{11} y = \\ &= -\log_{11} 2 + \log_{11} y \quad \text{---} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \\ = \log_{11} 3 \frac{1}{121} - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \\ = -\frac{2}{3} \log_{11} 11 - 5 \cdot \frac{1}{3} \\ 4x^4 + \frac{1}{4} = -\frac{13}{3x} - 5 \cdot \frac{1}{3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 34x^5 + 15x + 16 = 0 \\ 3 \log_{11}^5 \frac{y}{2} + 15 \log_{11} \frac{y}{2} + 16 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$BD = x$$

$$AC^2 = CF \cdot CK$$

$$\frac{CK}{AD} = \cancel{x}$$

$$3 \log_{11}^4 x - 16 \log_{11} x + 15 = 0$$

$$\log_{0,5y} 11 = \frac{1}{\log_{11} 0,5y}$$

$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{(0,5y)^3} (11^{-13}) - 5 = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} 0,5y} - 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

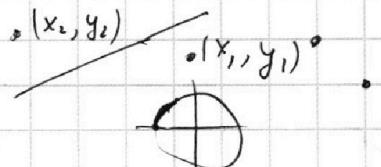


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi \\ \sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right); \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \\ -9\pi &\leq -2x \leq 10\pi - 9\pi \\ \frac{9\pi}{2} &\leq x \leq \frac{8\pi}{2}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) &= \cos\left(\frac{10\pi - \pi - 2x}{10}\right) = \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi - 2x}{10}\right) = -\cos\frac{\pi - 2x}{10}. \end{aligned}$$

$$\sin x = x - 2\pi n$$

~~$$\frac{9\pi}{2} - 2\pi n$$~~

$$\sin x = \sin(\pi - x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

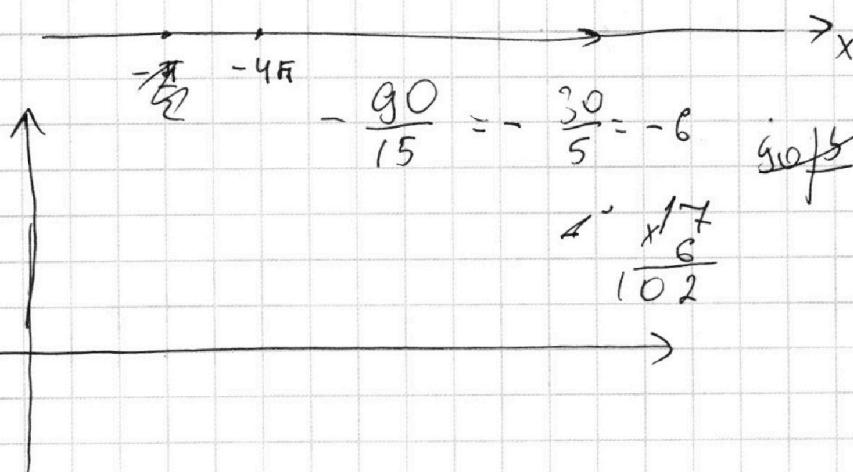
$$0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$$

$$\begin{aligned} -\frac{9\pi}{2} &\leq -x \leq \frac{\pi}{2} \\ -4\pi &\leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi &\quad -\frac{9\pi}{2} \leq -2x \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq x \leq \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

$$10 \arccos(\sin x) = 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$\begin{aligned} \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 &= \log_{0,5y} 11 - 5 \\ \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 &= -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5 \\ 3 \log_{11}^4(0,5y) + 16 \log_{0,5y} 11 + 5 &= 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

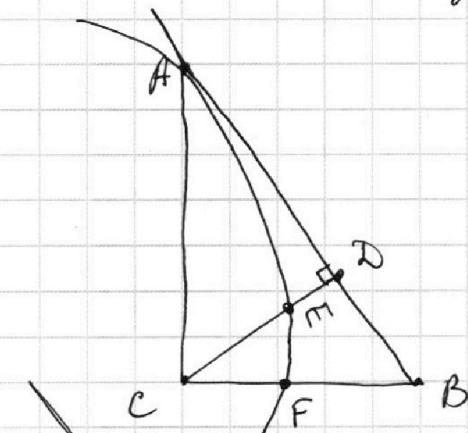
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

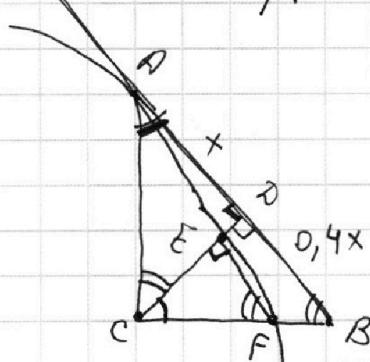
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AB}{AD} = 1,4 \quad \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} - ?$$



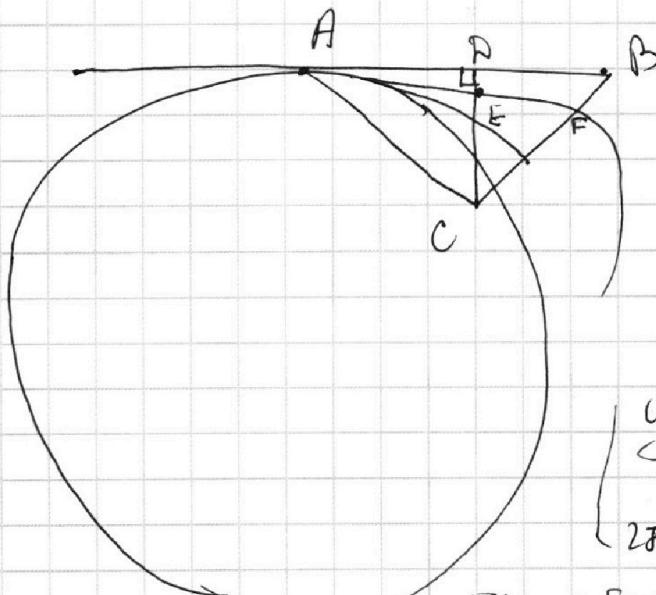
$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF$$

8

APX

$$1: y - 2\pi h$$

$$2: 2\pi - y + 2\pi h$$



$$\begin{cases} y - 2\pi h \\ [2\pi h; \pi + 2\pi h] \\ 2\pi - y + 2\pi h \end{cases}$$

$$\arccos(\cos y) = \begin{cases} y \in [0; \pi] \\ 2\pi - y \in [\pi; 2\pi] \end{cases}$$

$$-3\pi \leq y \leq -2\pi$$

$$-\pi \leq 2\pi - y$$

$$\pi \leq -y \leq 3\pi$$

$$4\pi \leq 2\pi - y \leq 6\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№.

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}; \quad bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}; \quad ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$abc \rightarrow \min. \quad a = 2^{d_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\delta_1} \quad abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3},$$

$$b = 2^{d_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\delta_2}$$

$$c = 2^{d_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_3}$$

$$1 \cdot 5^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$d_1, d_2 \leq 6$$

$$d_1 + d_2 = 6$$

$$d_2 + d_3 = 14$$

$$d_1 + d_3 = 16$$

$$2(d_1 + d_2 + d_3) = 36$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = 18$$

$$d_3 = 12$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 21 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$4 + 2 + 12 = 16$$

$$4 + 5 + 17 = 31$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 2 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ - 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$abc = 2^{16} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\log_{10}(0,5y) =$$

$$= (\log_{10} 0,5 + \log_{10} y)$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$xy = ?$$

$$\log_{10} x - 6 \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{10}(0,5y) + \log_{10} 0,5y = \log_{10} 0,125y^3 (10^{-3}) - 5$$

$$\frac{2}{3} \quad \cancel{25}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



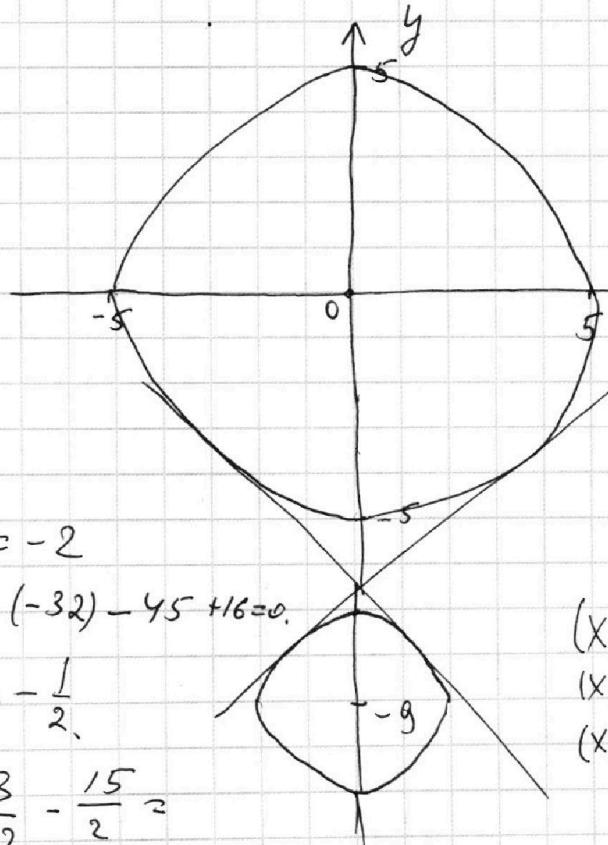
- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$345 \quad 5x + 6ay - b = 0.$$

$$a = 0 \quad b \\ x = \frac{b}{5}$$



$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = \\ = x^2 + (y + 9)^2 - 4$$

$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48 \\ 6(x_2 + x_1) + y_2 + y_1 = 48$$

$$a = -2$$

$$3 \cdot (-32) - 45 + 16 = 0.$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{32} - \frac{15}{2} =$$

$$= -\frac{3}{32} \quad y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}.$$

$$y = -kx + k$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 15 \\ \hline 16 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$25 \quad 15 = 5.3$$

$$\begin{array}{r} 1925 \\ -175 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 5 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 450 \\ \times 2 \\ \hline 900 \\ -900 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 45 \\ \hline 550 \\ 440 \\ \hline 495 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 9 \\ \hline 2025 \end{array}$$