



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.  
Заметим, что в разложении чисел  $a, b, c$  на простые множители для минимизации произведения должны быть только числа 2, 3 и 5 в некоторых степенях. Если встретится другое простое число, можно в разложении, например, числа  $a$ , найти не нарушая условий задачи, выбрать число  $\frac{a}{p}$  - таким образом произведение уменьшится.

Итак, пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

$ab = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2} \quad ; \quad 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc = 2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_2 + \gamma_3} \quad ; \quad 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac = 2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_3} \quad ; \quad 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 16 \end{array} \right\} \text{ и } \left. \begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \end{array} \right\} \text{ и } \left. \begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 11 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$

$abc$  будет наименьшим, когда простые множители, на которые это число разложено, входят в наименьших степенях. Из ранее записанных систем следует:

$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 36 \quad 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 59 \quad 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 52$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18 \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{59}{2} = 29\frac{1}{2} \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 26$

но  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$  Заметим, что

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0 \quad \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28 \Rightarrow$

Поэтому мин. возм.  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28$

значит  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$

Итак,  $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$  равно 30. Равенство достигается, например, для чисел  $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$ ,  $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$ ,  $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x. \quad 9\pi - 2x \quad (1)$$

$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi; 0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$   
Значит, для равенства необходимо условие:

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi; \quad -9\pi \leq -2x \leq \pi; \\ -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \\ -4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi.$$

Сделаем замену:  $y = \frac{\pi}{2} - x$ .  
Заметим, что  $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ .  
Значит,  $\sin x = \cos y$ .

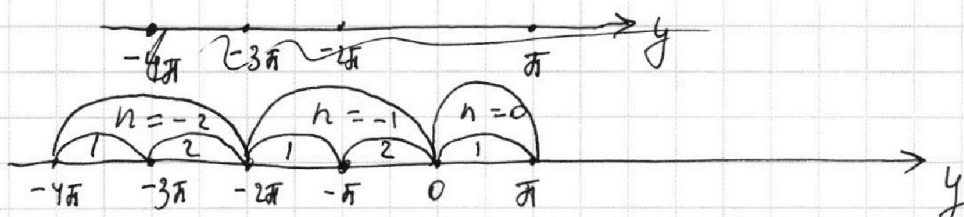
$$x = \frac{\pi}{2} - y; \quad 9\pi - 2x = 9\pi - 2(\frac{\pi}{2} - y) = \\ = 9\pi - \pi + 2y = 8\pi + 2y.$$

$-4\pi \leq y \leq \pi$ . Ур-е принимает вид:

$$10 \arccos(\cos y) = 8\pi + 2y.$$

Заметим теперь, что  $\arccos(\cos y) = \begin{cases} y - 2\pi n, & y \in [2\pi n, \pi + 2\pi n) \\ 2\pi - y + 2\pi n, & y \in [\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n) \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$

В нашем случае  $y \in [-4\pi; \pi]$ . Посмотрим, на какие промежутки вида  $[2\pi n; \pi + 2\pi n); [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  делится отрезок, в котором изменяется  $y$ .



В маленьких дугах, отмеченных на прямой покажем, по какой формуле в данном промежутке считается  $\arccos(\cos(y))$ : 1 - если  $\arccos(\cos y) = y - 2\pi n$ ; 2 - если

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\arccos(\cos y) = 2\pi - y + 2\pi n$ . В больших дугах покажем, (2)  
при каком  $n$  получится нужной <sup>ое</sup> жакенне.

Итак, теперь перейдем к решению ур-я. Рассмотрим  
несколько случаев:

1)  $y \in [-4\pi; -3\pi)$ .  $10 \arccos(\cos y) = 10(y + 4\pi)$ ;  
 $10(y + 4\pi) = 8\pi + 2y$ ;  $10y + 40\pi = 8\pi + 2y$ ;  $8y = -32\pi$ ;  
 $y = -4\pi$ ; —удовл. условиям. Продолжим.

2)  $y \in [-3\pi; -2\pi)$   $10 \arccos(\cos y) = 10(2\pi - y + 4\pi) = 10(6\pi - y)$   
 $10(6\pi - y) = 8\pi + 2y$ ;  $60\pi - 10y = 8\pi + 2y$ ;  $12y = 52\pi$   
 $y = \frac{52\pi}{12} > 0$ , но  $y < -2\pi < 0$  —противоречие.

3)  $y \in [-2\pi; -\pi)$   $10 \arccos(\cos y) = 10(y + 2\pi)$   
 $10(y + 2\pi) = 8\pi + 2y$ ;  $10y + 20\pi = 8\pi + 2y$ ;  $8y = -12\pi$ ;  $y = -\frac{3}{2}\pi$   
 $12y = -28\pi$ ;  $y = -\frac{7}{3}\pi = -2\frac{1}{3}\pi \in [-3\pi; -2\pi)$  —удовл. усл.

3)  $y \in [-\pi; 0)$   $10 \arccos(\cos y) = 10(2\pi - y + 2\pi) = -10y$   
 $-10y = 8\pi + 2y$ ;  $12y = 8\pi$ ;  $y = \frac{2}{3}\pi$

5)  $y \in [0; \pi)$   $10 \arccos(\cos y) = 10y$   
 $10y = 8\pi + 2y$ ;  $y = \pi$ . Этот корень не удовл. промежутку  
 $[0; \pi)$ , но, в ~~затраченных~~ точках если подставить  
 это число в ур-е, оно обратится в верное равенство.  
 Поэтому  $y = \pi$  —корень.

Итак,  $y = -4\pi; -\frac{7}{3}\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{1}{3}\pi; \pi$ . Сделаем  
 обратную замену и получим ответ:

$x = \frac{\pi}{2} - y$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{7}{3}\pi = \frac{17}{6}\pi$ ;  
 $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{6}$ ;  $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$ .  
 Ответ:  $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2)  $a \neq 0$ . Т.к. наша прямая имеет с  $\odot$  окружностями 4 общие точки для 4 решений системы, это возможно только в том случае, когда наша прямая пересекает каждую из окружностей в 2 точках (т.к. прямая и окр. пересекаются не более, чем в 2 точках).

Тогда обе системы

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 5x + 6ay - b = 0 \end{cases} \text{ и } (2) \begin{cases} x^2 + (y+9)^2 = 4 \\ 5x + 6ay - b = 0 \end{cases}$$

имеют 2 решения. равных решения.

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} \end{cases}; \quad \left(-\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}\right)^2 + y^2 = 25 \quad | \cdot 25$$

$$\left(-6ay + b\right)^2 + 25y^2 = 625;$$

$$36a^2y^2 - 12aby + b^2 + 25y^2 = 625$$

$$y^2(36a^2 + 25) - 12aby + (b^2 - 625) = 0.$$

Заметим, что это квадратное ур-е должно иметь 2 реш-я. предположим, это оно <sup>не больше, чем одно!</sup>  $= 0$ . Тогда

$$5x + 6ay - b = 0 \text{ имеет не более 1 решения} \Rightarrow$$

система имеет не более одного решения.

$$\text{Тогда } (12ab)^2 - 4(36a^2 + 25)(b^2 - 625) > 0 \quad | : 4$$

$$144a^2b^2 - 36a^2b^2 - 36a^2b^2 + 625 \cdot 36a^2 - 25b^2 + 25 \cdot 625 > 0$$

$$25b^2 < 36 \cdot 625a^2 - 25 \cdot 625 \quad | : 25$$

$$b^2 < 36 \cdot 25a^2 - 625. \quad \text{обт}$$

Итак, должно существовать такое  $b$ , что это нер-во верно.  $\Rightarrow 36 \cdot 25a^2 - 625 > 0$

$$36a^2 > 25; \quad \begin{cases} a > \frac{5}{6} \\ a < -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + (y+9)^2 = 4 \\ x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} \end{cases} \quad \left(-\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}\right)^2 + (y+9)^2 = 4 \quad | \cdot 25$$

$$\left(-6ay + b\right)^2 + (5y+45)^2 = 100$$

$$36a^2y^2 - 12aby + b^2 + 25y^2 + 225 \cdot 450y + 2025 = 100$$

$$36 \cdot y^2(36a^2 + 25) + y(12ab + 450) + 1925 = 0$$

Предположим, это ур-е имеет <sup>не более 1 корня</sup> один корень.  $\Rightarrow$

Тогда ур-е  $x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}$  имеет один корень  $\Rightarrow$  система имеет не более одного корня, как и система. А именно 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4.

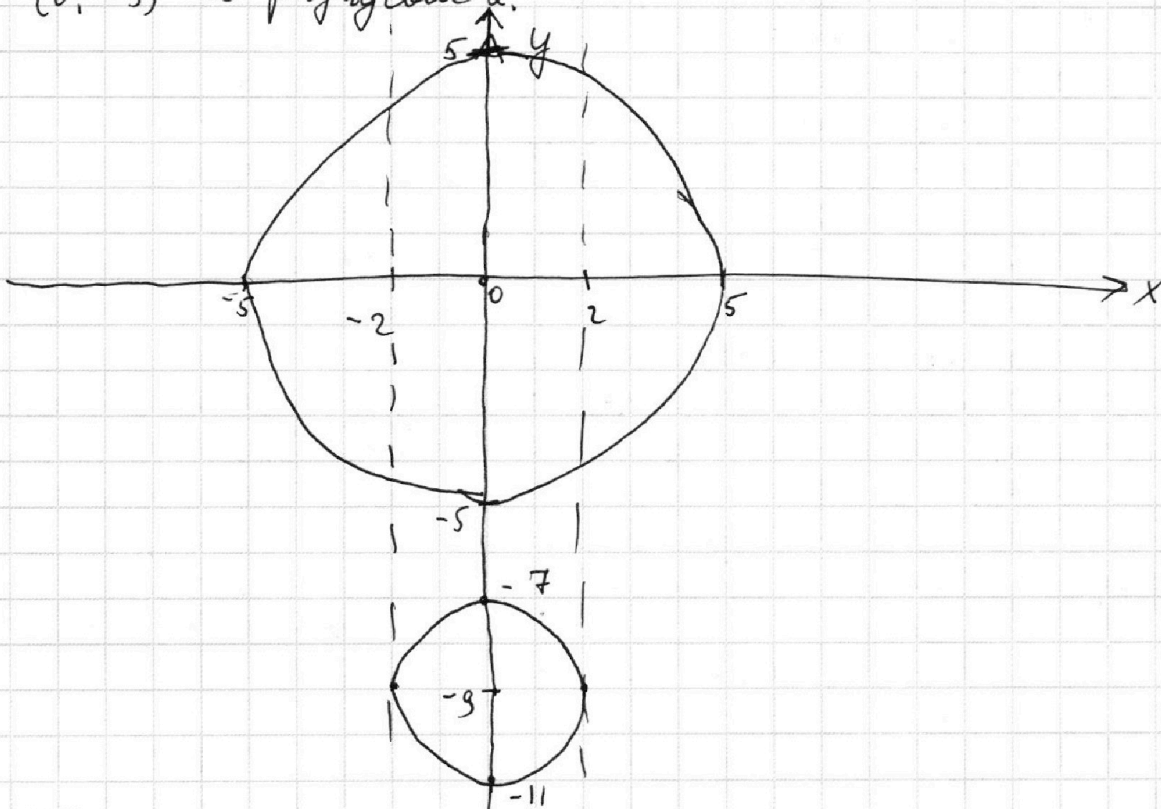
①

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Пока займёмся вторыми ур-ми:

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

Оба ур-я совокупности задают окр.: первое - с центром  $(0, 0)$  и радиусом 5, а второе - с центром  $(0, -9)$  и радиусом 2.



Теперь становится ясно, что прямая  $5x + 6ay - b = 0$  должна пересекать наши окружности в 4 точках - тогда система имеет 4 решения. Рассмотрим несколько случаев:

1)  $a = 0$ .  $x = \frac{b}{5}$  - это прямая, параллельная оси  $Oy$ , она имеет с нашими окружностями 4 общие точки, когда

$$-2 < \frac{b}{5} < 2 \quad (\text{иначе } -2, \text{ или } 2, \text{ или } 3, \text{ или } 0)$$

$-10 < b < 10$ . И так, для  $a = 0$   $\exists b$  такое, что система имеет 4 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



корня. Тогда  $(-12ab + 450)^2 - 4(36a^2 + 25) \cdot 1925 > 0$  (3)

$$(-12ab + 450)^2 - 4(36a^2 + 25)(1925 + b^2) > 0 \quad | :4$$

$$(-6ab + 225)^2 - (36a^2 + 25)(b^2 + 1925) > 0$$

$$36a^2b^2 - 12 \cdot 225ab + 225^2 - 36a^2b^2 - 36 \cdot 1925a^2 - 25b^2 - 25 \cdot 1925 > 0$$

$$-12 \cdot 225ab + 225^2 - 36 \cdot 1925a^2 - 25b^2 - 25 \cdot 1925 > 0$$

$$-12 \cdot 9ab + 9 \cdot 225 - 36 \cdot 77a^2 - b^2 - 1925 > 0$$

$$36 \cdot 77a^2 + 12 \cdot 9ab + b^2 - 100 < 0$$

Должно существовать  $b$ , при котором это неравенство верно. Тогда квадратный трёхчлен относительно  $b$  должен иметь 2 корня, т.к.  $36 \cdot 77 > 0$ . Значит,

$$(12 \cdot 9b)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 77(b^2 - 100) > 0 \quad | :16$$

$$(3 \cdot 9b)^2 - 9 \cdot 77(b^2 - 100) > 0 \quad | :9$$

$$81b^2 - 77b^2 + 7700 > 0 \quad \text{это неравенство}$$

$$(12 \cdot 9a)^2 + 4 \cdot 100 - 36 \cdot 77a^2 > 0 \quad - \text{это верно}$$

$\forall a \neq 0$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2

НС.

$$1) \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{x^3 121} \frac{1}{-5} \quad \begin{matrix} x \neq 0, x \\ x > 0, x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad | \cdot 3 \log_{11} x$$

$$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0$$

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\log y \neq 2; y > 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = \log_{0,125y^3} \frac{1}{-5} = \log_{0,125y^3} \frac{1}{-5} = \log_{0,125y^3} \frac{1}{-5} = \log_{0,125y^3} \frac{1}{-5}$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 15 \log_{11} 0,5y + 16 = 0$$

$$3) \text{ Пусть } u = \log_{11} x; v = \log_{11} 0,5y.$$

$$\begin{cases} 3u^5 + 15u - 16 = 0 \\ 3v^5 + 15v + 16 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(u^5 + v^5) + 15(u+v) = 0 : 3 \\ 3(u^5 - v^5) + 15(u-v) = 0 \end{cases}$$

$$(u^5 + v^5) + 5(u+v) = 0$$

$$(u+v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4) + 5(u+v) = 0$$

$$1) u = -v; u+v=0.$$

$$\log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0$$

$$\log_{11} 0,5xy = 0; 0,5xy = 11; xy = 22.$$

$$2) u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 + 5 = 0$$

$$u^4 + v^4 + 5 - uv(u^2 - uv + v^2) = 0$$

$$3(u^5 - v^5) + 15(u-v) - 32 = 0$$

Предположим, ~~есть~~ относительно  $u$  есть хотя бы

$$p\text{-м } p\text{-но } f(u) = u^5 + 5u + v^5 + v; f'(u) = 5u^4 + 5 > 0$$

$f(u) \nearrow \Rightarrow$  не более 1 решения относительно  $u$ .

Это решение  $u = -v$ . В этом случае показано, что  $xy = 22$ .

Ответ: 22.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5.

$x > 0, x \neq 1$

11

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5. \text{ Преобразуем это выражение.}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_x \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad | \cdot 3 \log_{11} x,$$

$x \neq 1 \Rightarrow \log_{11} x \neq 0$

$$3 \log_{11}^5 x - 6 \cdot 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$\log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0. \text{ Заметим, что } \log$$

Пусть  $\log_{11} x = t$ ;  $t^5 + 15t - 16 = 0$ .

Заметим, что  $t=1$  - корень. Заметим, что других корней быть не может, т.к.  $f(t) = t^5 + 15t - 16$  - возрастающая ф-я. Покажем это:  $f'(t) = 5t^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(t)$  - возрастает. Итак,  $\log_{11} x = 1$ ;  $x = 11$ .

Займемся вторым выражением:

$y > 0, y \neq 2$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{13}) - 5.$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} 0,5y} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5.$$

Пусть  $\frac{0,5y}{11} \log_{11}^4 0,5y = u$ ,  $u \neq 0$ , т.к.  $y \neq 2 \Rightarrow 0,5y \neq 1 \Rightarrow \log_{11} 0,5y \neq 0$

$$u^4 + \frac{1}{u} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{u} - 5 \quad | \cdot 3u$$

$$3u^5 + 3 = -13 - 15u; \quad 3u^5 + 15u + 16 = 0;$$

Пусть  $f(u) = 3u^5 + 15u + 16$ ;  $f'(u) = 15u^4 + 15 > 0 \quad \forall u \Rightarrow f(u) \nearrow \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow 3u^5 + 15u + 16 = 0$  имеет не более 1 корня

$$3u^5 + 15u + 16 = 0$$

$$t^5 + 15t - 16 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



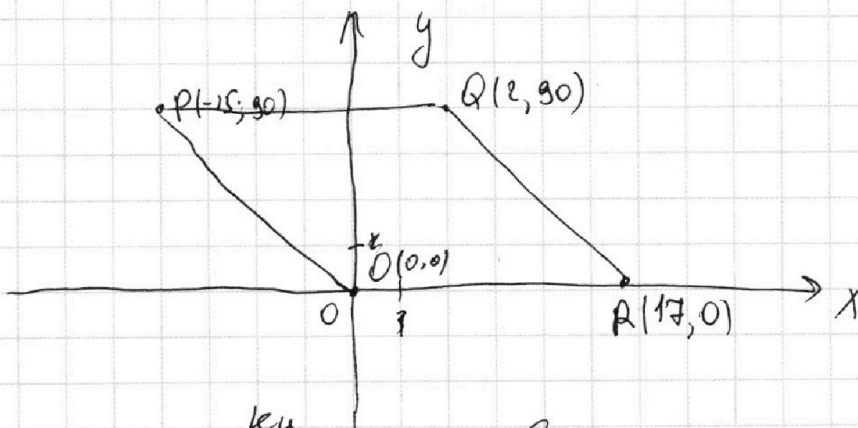
$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48 \quad \text{нб.}$$

В Пусть  $x_2 - x_1 = x$ ;  $y_2 - y_1 = y$ .

$6x + y = 48$ . Из этого следует, что все точки, удовлетворяющие условию, лежат на прямой  $6x + y = 48$ .

Заметим, что все <sup>пары</sup> точки, которые удовлетворяют условию, лежат на прямой  $6x + y = 48$ .

Заметим, что все <sup>пары</sup> точки  $X(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$  такие, что  $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$  лежат на прямой  $6x + y = 48$ .  $y = -6x + 48$



Т.к. <sup>пары</sup> точки лежат внутри параллелограмма, их координаты удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 90 \\ y \geq -6x + 48 \\ y \leq -6x + 102 \end{cases}$$

Пусть точки  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  такие, что  $6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

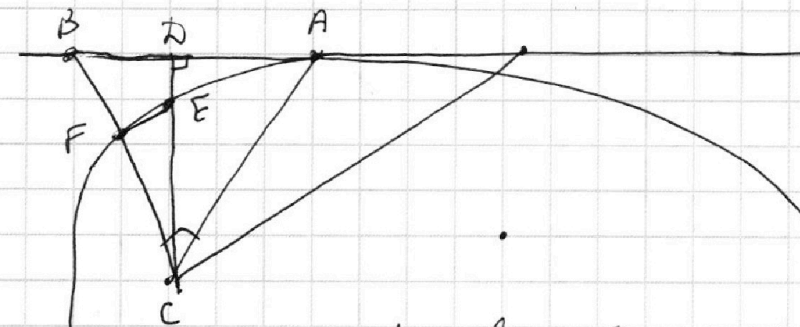
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$u = \log_{11} 0,5y =$$

$$= \log_{11} (0,5) + \log_{11} y =$$

$$= -\log_{11} 2 + \log_{11} y$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x =$$

$$= \log_{11} x^{\frac{1}{121}} - 6$$

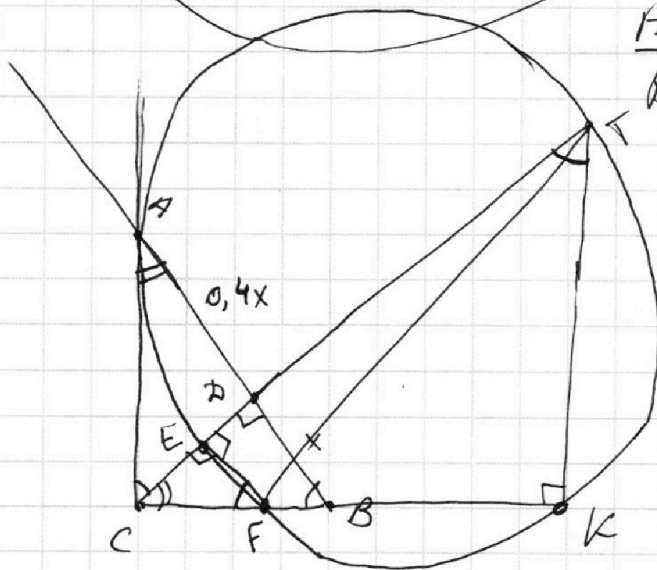
$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x =$$

$$= -\frac{2}{3} \log_{11} (11-5) \cdot 3$$

$$u^4 + \frac{1}{u} = -\frac{13}{3u} - 5/3u$$

$$3u^5 + 15u + 16 = 0$$

$$3 \log_{11}^5 \frac{y}{2} + 15 \log_{11} \frac{y}{2} + 16 = 0$$



$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$BD = x$$

$$AC^2 = CF \cdot CK$$

$$\frac{CK}{AD} = \frac{CF}{AD}$$

$$3 \log_{11}^4 x - 16 \log_{11} x + 15 = 0$$

$$\log_{0,5y} 11 = \frac{1}{\log_{11} 0,5y}$$

$$\frac{AD \cdot CD}{CF \cdot EF}$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{(0,5y)^3} (11^{-13}) - 5 = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} 0,5y} - 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

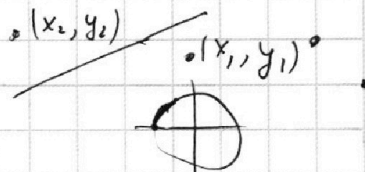
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3.



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &\leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi \\ \sin x &= \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right); \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \\ -9\pi &\leq -2x \leq 10\pi - 9\pi \\ \frac{9\pi - 10}{2} &\leq x \leq \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) &= \cos\left(\frac{10\pi - \pi - 2x}{10}\right) = \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi - 2x}{10}\right) = -\cos\frac{\pi - 2x}{10}. \end{aligned}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \end{aligned}$$

$$\frac{9\pi - 10}{2} = 2\pi n$$

$$\sin x = \cos\frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\begin{aligned} -\frac{9\pi}{2} &\leq -x \leq \frac{\pi}{2} \\ -4\pi &\leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi \end{aligned}$$

$$0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

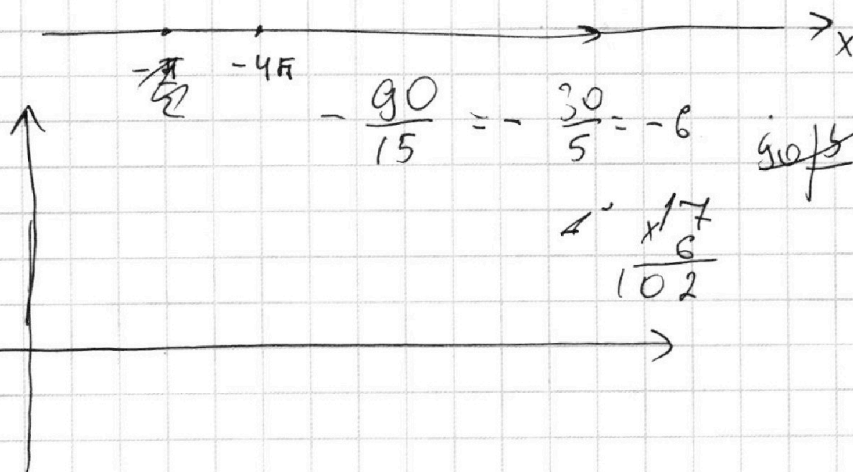
$$\begin{aligned} -9\pi &\leq -2x \leq \pi \\ -\frac{9\pi}{2} &\leq x \leq \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

$$10 \arccos(\sin x) = 10 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$

$$-5 = \log_{0.125} 3 / (11^{-13})$$

$$\log_{11}^4(0.5y) + \log_{0.5y}^{11} = -\frac{13}{3} \log_{0.5y}^{11} - 5$$

$$3 \log_{11}^4(0.5y) = 16 \log_{0.5y}^{11} + 5 = 0$$



$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\frac{90}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

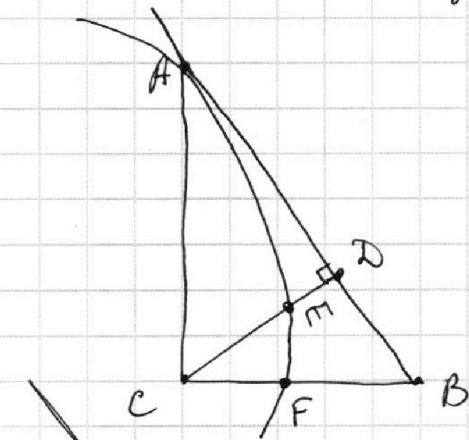
1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

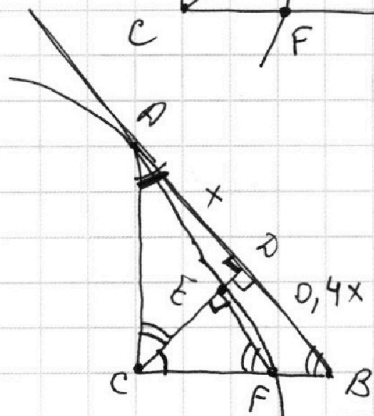


~2.



$$AB \parallel EF$$

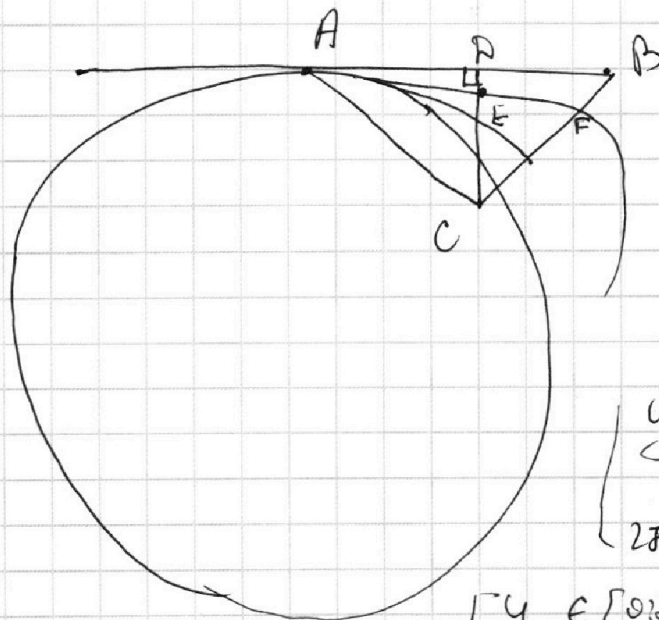
$$\frac{AB}{AD} = 1,4 \quad \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$



$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF \cdot \sin \angle CEF$$

$$1: y - 2\pi h$$

$$2: 2\pi - y + 2\pi h$$



$$\begin{cases} y - 2\pi h \\ [2\pi h; \pi + 2\pi h] \\ 2\pi - y + 2\pi h \end{cases}$$

$$\arccos(\cos y) = \begin{cases} y \in [0; \pi] \\ 2\pi - y \in [\pi; 2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3\pi &\leq y \leq -2\pi \\ -\pi &\leq 2\pi - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi &\leq -y \leq 3\pi \\ 4\pi &\leq 2\pi - y \leq 6\pi \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нр.

$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}; \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}; \quad ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

$abc \rightarrow \min.$

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1} \\ b &= 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2} \\ c &= 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} abc &= 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \\ \alpha_1, \alpha_2 &\leq 6 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 6$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 14$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 16$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 36$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18$$

$$\alpha_3 = 12$$

$$\alpha_1 = 4$$

$$\alpha_2 = 2$$

$$\begin{array}{r} +13 \\ 21 \\ \hline 25 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +11 \\ 11 \\ \hline 22 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$29 \frac{1}{2} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \times 29 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +24 \\ \hline 28 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \overline{) 26} \\ -4 \quad \overline{) 26} \\ \hline 12 \end{array}$$

$$4 + 2 + 12 = 16$$

$$2 + 5 + 17 = 24$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$abc = 2^{16} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\frac{+16}{25}$$

$$\log_{11} (0,5y) =$$

$$= (\log_{11} 0,5 + \log_{11} y)$$

$$xy = ?$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} 0,5y = \log_{11} 11^{-13} - 5$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

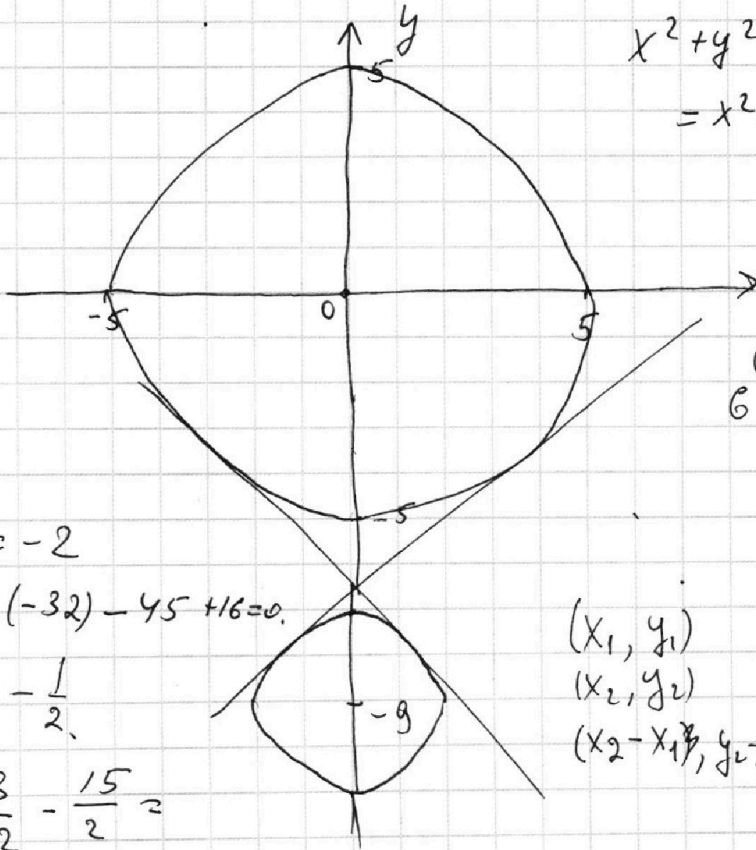
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~345~~  $5x + 6ay - b = 0$

$a = 0$   
 $x = \frac{b}{5}$



$x^2 + y^2 + 10y + 77 =$   
 $= x^2 + (y + 5)^2 - 4$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$   
 $6(x_2 + x_1) + (y_2 + y_1) = 48$

$a = -2$

$3 \cdot (-32) - 45 + 16 = 0$

$k = -\frac{1}{2}$

$-\frac{3}{32} - \frac{15}{2} =$

$= -\frac{1}{32}$

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

~~$y = kx + k$~~

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ \times 15 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1925 / 25 \\ -175 \\ \hline 175 \end{array}$$

25

$15 = 5 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ \times 5 \\ \hline 225 \end{array}$$

$(x_1, y_1)$

$(x_2, y_2)$

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 450 / 2 \\ -4 \\ \hline 5 \\ -4 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 25 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 25 \\ \times 7 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 9 \\ \hline 2025 \end{array}$$