



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 9 КЛАСС. Вариант 13

- [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

- [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
- [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x + 2y = z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2}$ .

- [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
- [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = 2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. Ответ:  $3^{25} \cdot 7^{38}$ .

Пример:  $a = 3^4 \cdot 7^{22}$ ;  $b = 3^4$ ;  $c = 3^{14} \cdot 7^{16}$

Доказа:

~~Более того~~, заметим, что если  
 $ab : 3^{11}, bc : 3^{18}, ac : 3^{21}$ , то  $a^2 b^2 c^2 : 3^{11} \cdot 3^{18} \cdot 3^{21} =$   
 $= 3^{50}$ , то есть  $abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2}$ , доказано

Правда, ~~если~~ максимум  $3^{25}$ , потому что  
если  $abc > 3^{25}$ , то  $(abc)^2 > (3^{25})^2$ . Заметим,  
что т.п.  $ac : 7^{38}$ , то  $abc : 7^{38}$ , тогда  $abc : 3^{25} \cdot 7^{38}$   
а ~~наибольшее~~ максимум, кратное  $3^{25} \cdot 7^{38}$ ,  
это и есть  $3^{25} \cdot 7^{38}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. Если  $\frac{a}{b}$  - искажающая дробь, то  $a \neq b$  (иначе 0).

Тогда  $a+b \equiv b \pmod{a}$ , и  $a+b \equiv a \pmod{b}$ , тогда

числа  $a, b, ab$  - взаимно простые. Такие числа

наибольший общий делитель чисел  $a+b$  и

$a^2-8ab+b^2$ . Заметим, что  $a^2-8ab+b^2 = (a+b)^2 - 10ab$ .

Тогда есть следующий общий делитель  $a+b$  и  $(a+b)^2 - 10ab$ ,

заметим, что  $(a+b)^2 \vdash ab$ , тогда числа  $a+b$  и

НОД  $ab$  и  $10ab$ . Заметим, что  $ab$

не делится ни на один из делите-

лей числа  $a$  или числа  $b$ , тогда  $\text{НОД } ab$

делится только на 1 либо на 5,

чтобы это было  $\geq 10$ , заметим, что 10 - наибо-

льшее из этого списка, то есть НОД  $(a+b)$  и

$10ab = 10$ , то есть НОД  $ab$  и  $(a+b)^2 - 10ab = 10$ ,

НОД  $ab$  и  $a^2-8ab+b^2 = 10$ , то есть

наибольшее  $m = 10$ .

Ответ: 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. Решить

$$a = 2x^2 - 3x + 4 \geq 0$$

$$b = 2x^2 + x + 3, \text{ тогда } \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b,$$

нужно  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ,  $y = \sqrt{b}$ , тогда

$$\sqrt{a} - y = \sqrt{b} - y; \quad (\sqrt{a} - y)(\sqrt{b} + y) = 0 \text{ (члены,}$$

когда  $\sqrt{a} - y = 0$  и  $\sqrt{b} + y = 0$ , тогда

$$(\sqrt{a} - y)(\sqrt{b} + y) = (\sqrt{a} - y)(\sqrt{a} + y); \quad \sqrt{a} - y$$

$x$

$$\sqrt{a} + y = 1, \text{ то есть}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1, \text{ выполним эту задачу}$$

уравнением

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} - (\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3}) = 1 - (1 - 4x)$$

$$2\sqrt{2x^2 + x + 3} = 4x$$

$$\sqrt{2x^2 + x + 3} = 2x$$

$$2x^2 + x + 3 = 4x^2$$

$$-2x^2 + x + 3 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{-4}; \quad x_2 = \frac{-1 - 5}{-4}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 1,5$$

Рассмотрим получившееся уравнение и заметим, что

один из корней отрицателен, а другой

положителен, если  $x = 0$ . Тогда если  $x < 0$ , то

если  $x > 0$ , то  $x^2 < 0$ , что невозможно.

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 0, \text{ то есть}$$

$$1 - 4x = 0, \text{ значит, что}$$

при  $x = \frac{1}{4}$  исходное равенство

выполнено, т.е. ответ:  $x = \frac{1}{4}$



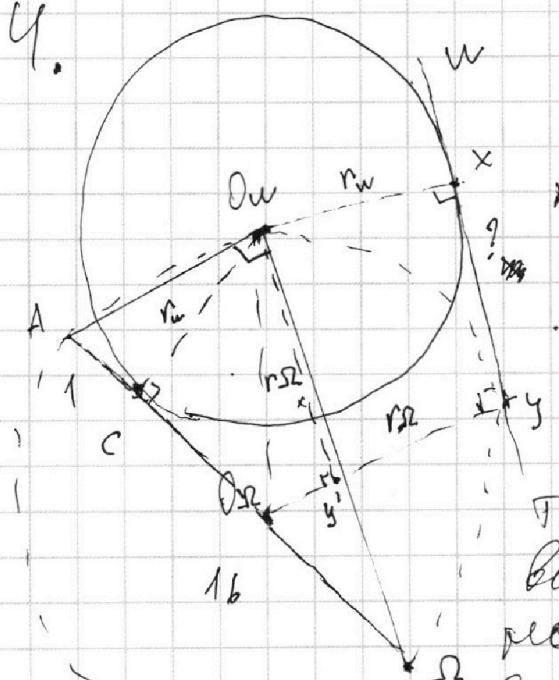
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ч.



Пусть центр  $W - O_W, \Omega - O_\Omega$ .

Значит, что  $\angle A O_W B = 80^\circ$ ,  
как высокий  $\angle B$ , отвер-  
нувшийся на дугу  $AB$ .

$\angle O_W C B = 90^\circ$ , тк.  $O_C$ -радиус,

который перпендикулярен  $AC$ . Тогда засчет-

того, что  $O_W C$ -высота, про-

веденная в прямом угле  
дуги  $ABC$  треугольника  $A O_W B$ , ч

внешний прямой угол  $\Rightarrow$

$$O_W C = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{1 \cdot 16} = 4. \text{ Значит, что}$$

$O_W C$ -это радиус  $W$ , то есть  $r_W = O_W C = 4$ . Если  $AB$ -

$$\text{дiameter}, \text{то } r_\Omega = \frac{AB}{2} = \frac{AC + CB}{2} = \frac{1+16}{2} = 8,5.$$

Пусть общая высота  $O_W C$  засчитана

$O_W X$  в точке  $X$ , а  $O_\Omega Y$  в точке  $Y$ . Тогда  $O_W X Y =$

$O_\Omega Y X = 90^\circ$ . Проведем прямую из  $O_W$  в

$O_\Omega$  на  $O_\Omega Y$ , пусть пересечение этой пр-

ямой  $O_\Omega Y$  и  $O_\Omega Y$ -точка  $Y'$ . Тогда, тк

$$O_W Y' Y = Y' Y X = O_W X Y = 90^\circ - O_W X Y = \text{прямой}$$

угол  $Y' Y X = O_W Y'$ , то есть  $O_W$  и



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нужно найти  $D_w y^1$ . Заметим, что  
 $D_w y^1$  - дистанция от центра тяжести треугольника до  
 $D_w D_2 y^1$ , то замечаем, что  $D_w D_2 =$   
 $R_2 \cancel{= 8,5}$ , т.к.  $D_w$  находится на  $D_2$ .  $D_2 y^1 =$   
 ~~$y^1$~~   $D_2 y^1 - y^1 y = R_2 - \cancel{R_w} \stackrel{8,5 - 4 = 4,5}{=} y^1 y = D_w X$ . Тогда  
по теореме Пифагора  $Xy = D_w y^1 = \sqrt{D_w D_2^2 - D_2 y^1^2} =$   
 $= \sqrt{8,5^2 - 4,5^2} = \sqrt{72,25 - \cancel{20,25}} = \sqrt{52}$   
Ответ:  $\sqrt{52}$



На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, что в этом случае возможна, приведя  
пример таких  $x, y, z$ .

$x = \cancel{2}; y = -1; z = 4$  условие выполнимо-

ся, а

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{12 - 4 - 16}{4 - 6} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. ~~К~~ ~~п~~ Решение 2 во второе уравнение,

$$\text{получаем } \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y} \quad | \cdot xy(3x+2y)$$

$$3 \cdot y \cdot (3x+2y) + x \cdot (3x+2y) = 2xy$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2yx = 2xy$$

$$3x^2 + 9yx + 6y^2 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 + 3\cancel{y}x + 2\cancel{y}^2 = 0$$

~~Д~~ Всегда решим x, через y

$$D = 9y^2 - 4 \cdot 2y^2 = y^2$$

$$x = \frac{-3y \pm \sqrt{y^2}}{2}$$

$$\begin{cases} x = -y; \\ 2 = 3 \cdot -y + 2y = -y \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = -2y; \\ 2 = 3 \cdot -2y + 2y = -4y \end{cases} \quad (2)$$

Положив x и 2 в выражение  $\frac{3x^2 - 4y^2 - 2^2}{x^2 - 6y^2}$  получим  
первого следила:

$$\frac{3(-y)^2 - 4y^2 - (-y)^2}{(-y)^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2y^2}{-5y^2} = \frac{2}{5}$$

Положив ячейку второго следила:

$$\frac{3(-2y)^2 - 4y^2 - (-4y)^2}{(-2y)^2 - 6y^2} = \frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{7. 8^2 (K+1)^2}{8^2 K (K+1)} = \frac{13}{3} \quad K+1 = \frac{13}{3}, \text{ но свойству}$$

пропорции  $3K + 3 = 13K$ ,  $10K = 3$ ,  $K = \underline{0}3$

Ответ: 0, 3

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ч.

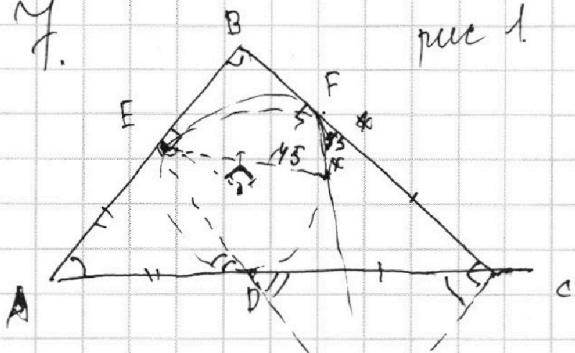


рис 1

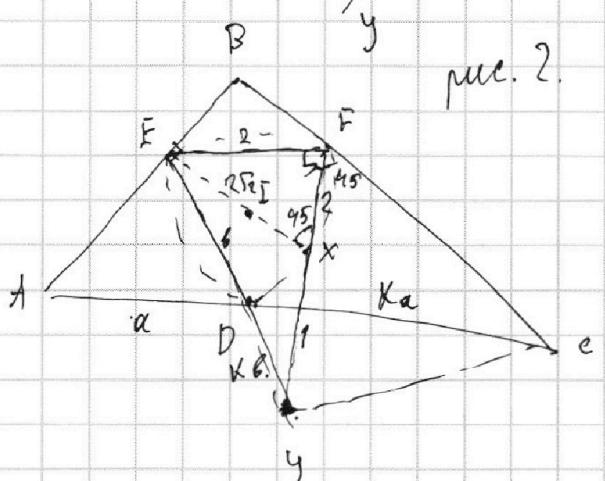


рис. 2.

1) Т.к.  $\angle A B C = \angle B C Y = 90^\circ$ ,  
 $A B \parallel Y C$ ,  $\Rightarrow \angle B A C = \angle A C Y$ .  
2) ~~Доказано~~,  $\angle B E D A = \angle Y D C$ ,  
поскольку вертикальные,  
тогда  $\triangle A E D$  равен  
 $\triangle D C Y$ .  $\Rightarrow A E = A D$ , т.к.  
отрезки соединяющие  
тогда  $D C = C Y$ , из него -  
тогда  $F C = D C$ , т.к.  
отрезки соединяющие  
тогда  $F C = C Y$ , тогда  
 $\triangle F C Y$  - прямойугольный  
и равнобедренный -  
т.к.  $F C = C Y$ , тогда ~~УПР 288~~

$\angle F C = \angle F Y C = 45^\circ$ . ~~Задача~~ Решение I ученика

и, тогда  $\angle T E B = \angle E B F = \angle B F I = 90^\circ$ , тогда  
 $\angle E F F = 90^\circ$ , Т.к.  $E B F I$  - прямойугольник.

Тогда  $\angle E X F = \angle E I F = 45^\circ$ , Т.к.  $\angle E I F$  - усеченный  
угол, а  $\angle E X F$  - прямойугольник. Тогда заме-  
чаем, что т.к.  $\angle E X F = \angle X F C = 45^\circ$ ,

~~т.к.~~  $E X \parallel F C$ ,  $\angle E B C = \angle A E X = 90^\circ$ , ~~т.к.~~  $\angle A E I = 90^\circ$ , т.к.  $E I$  лежит на ортот

$\angle A E I = 90^\circ$ , т.к.  $E I$  лежит на ортот

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы  $\angle EFX = 90^\circ$ , то есть  $EX$  - проекция, то  
проецирует из узла  $(I)$ . Тогда  $\angle EFX = 90^\circ$ ,  
то есть определяющей и на проекции,  
тогда получим, что  $m.R. \angle EXF = 45^\circ$ ,  
то  $\triangle EFX$ - прямоугольный и равнобедренный.  
Вернемся. Тогда  $\frac{EX}{FX} = \sqrt{2}$ , а  $FX^2 = 2$ ,  
 $FX = 2$ , и  $EF = 2$ , как равны.  
Пусть  $AD = a$ , ~~и~~  $ED = b$ , тогда из подобия  
имеем  $CD = ka$ ,  $DY = kb$ , тогда из подобия  
получим  $K$ . Значит, что  $m.R. \angle F$  и  $\angle Y$ -  
сопряженные углы, то  $y_x \cdot y_F = y_D \cdot y_E$   
то имеем  $1 \cdot (1+2) = kb \cdot (kb+b)$ , то имеем

$$b^2 k(k+1) = 3.$$

Значит, что  $EY^2 = FY^2 + FF^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ , то имеем  
 $(kb+b)^2 = 13$ , получаем систему:  
 $b^2 k(k+1) = 3$        $b^2 k(k+1) = 3$       ~~и~~  $(kb+b)^2 = 13$       ~~и~~  $b^2 (k+1)^2 = 13$



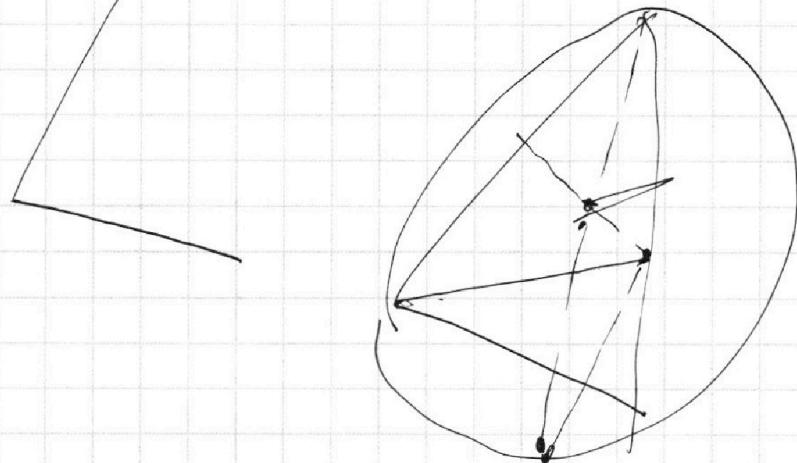
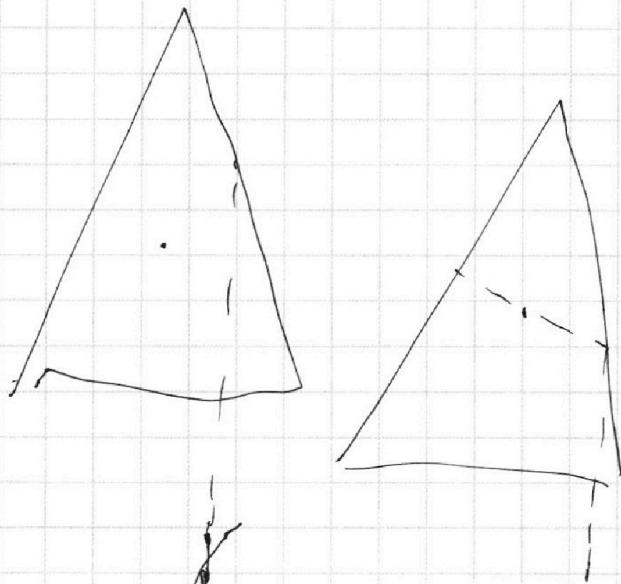
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{1-4\cdot 15}{-6} \\
 & x = \sqrt{2,25+1,5+3}, \quad y = \sqrt{2+3+4} \\
 & x - y = \sqrt{6,75} - \sqrt{6+5-5} \\
 & x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\
 & x + y = 1 \\
 & \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 \\
 & 2\sqrt{2x^2 + x + 3} = 4x \\
 & \sqrt{2x^2 + x + 3} = 2x \\
 & 2x^2 + x + 3 = 4x^2 \\
 & 2x^2 - 3x + 3 = 0 \\
 & D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \\
 & D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 + 24 \\
 & \sqrt{1,45} \\
 & 24 \quad -1+5 \quad -1-5 \\
 & \hline 12 \cdot 2 \quad -4 \quad -4 \\
 & 25 \quad 15 \quad 4,5 \\
 & 2 \cdot 2,25 - 4,5 + 9 \\
 & 6,25 - 4,5 = 
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{t}{x} = \frac{t}{y} - 2xy \quad \frac{x+t}{y} = \frac{yt}{x} + 96 \quad \begin{matrix} 16 \\ 38 \\ -16 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 26 \\ 22 \end{matrix}$$
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{x}{y} \quad a+b \geq 11$$
$$\frac{t}{x+6} = \frac{t}{y+6} - 125 \quad \begin{matrix} a+c \geq 16 \\ a+c \geq 38 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 28 \\ +21 \\ 225 \end{matrix}$$
$$\frac{t}{t} = \frac{t}{t} \quad a=3^7 \quad \begin{matrix} 311 \\ +18+21 \\ (x-y) \end{matrix}$$
$$2 - 3^{15} \quad \begin{matrix} 2xy \\ 0 \\ 5\sqrt{b} \end{matrix} \quad \frac{2xy}{(x+y)(x-y)} - 1,25 \quad \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 25 \end{matrix}$$
$$yt = xt - 2xy \quad \begin{matrix} 2xy \\ 2 \\ y=-1 \end{matrix}$$
$$t(x-y) = 2xy \quad a+b - 2\sqrt{ab} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{4} \quad \begin{matrix} 125 \\ -4x+1 \\ 16+4- \end{matrix}$$
$$t = \frac{2xy}{x-y} \quad \begin{matrix} 2xy \\ a+b-2\sqrt{ab} = \frac{12-4-16}{4-6} \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{matrix}$$
$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \begin{matrix} 2x^2y \\ y(x-y) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2y^2x \\ x(y-x) \end{matrix} + 3^{625} \cdot 3^{38}$$
$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \begin{matrix} a-b = 3^4 \cdot 7^{22} \\ b = 3^4 \end{matrix}$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b/c = 3^4 \cdot 7^{16}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

**МФТИ**

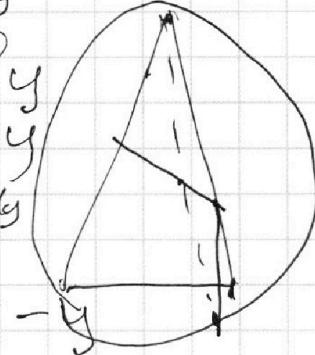
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 13x + 2y \quad | \cdot (3x + 2y)$$

$$3y(3x + 2y) + x(3x + 2y) = 2xy$$

~~8x + 8~~

$$-2y \cdot 3 + 2y \cdot$$



$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2yx = 2xy$$

$$6y^2 + 3x^2 + 9xy = 0 : 3$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = 0$$

$$D = 9y^2 - 4 \cdot 2y^2 = y^2$$

$$x_1 = \frac{-3y + y}{2} = -y$$

$$x_2 = \frac{-3y - y}{2} = -2y$$

$$3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2$$

$$\frac{12y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2}$$

$$\frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

$$\frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2}$$

$$= \frac{-2y^2}{-5y^2}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t_M = t_B - 2$$

$$\sqrt{3x^2 + 2y^2} = 2$$

$$t_M \cdot \sqrt{6+36}$$

$$\frac{t_B \cdot \sqrt{6+36}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{-3y \pm y}{3x^2 - 4y^2 - (3x + 2y)^2} = \frac{9y^2 - 4 \cdot 2y^2 - y}{2y} = \frac{y}{2y} = \frac{y}{2}$$

$$x^2 = 3xy - 2y^2$$

$$t_M \cdot \sqrt{6+36}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x^2 + 2y^2}$$

$$t_B = t_M + 2$$

$$t_M \cdot \sqrt{6+36} = t_B \cdot \sqrt{6+36} = \frac{3xy + xy}{2xy} = \frac{4}{2}$$

2

1

$$3(3xy + 2y^2) + 2(3x + 2y) = 2xy$$

$\times y$

1 2

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2\cancel{xy} = 2\cancel{y}\sqrt{6} \sqrt{2}x$$

$\cancel{3} \cdot 4$

$$3\sqrt{2} \cdot 2 \cancel{ly}$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 = 0$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} =$$

$$3x^2 + 2y^2$$

$\sqrt{2} \cdot 2$

$$(3x^2 + 3xy + 6y^2)$$

$$3x^2 + 6y^2 = 3xy : 2$$

$$x^2 + 2y^2 = 3xy$$

$$2\sqrt{2}xy = \cancel{x^2} - \cancel{3xy} / \cancel{xy}$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$9\cancel{x^2}y^2 - 4\cancel{x^2} \cdot 2y^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$Kx^2 = 3$$

$$K \frac{3}{x^2}$$

$$K^2x^2 + 2Kx^2 + x^2 = 13$$

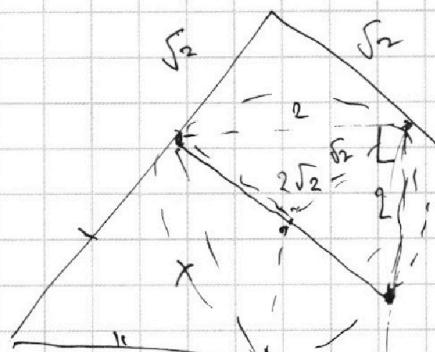
6

$$\left(\frac{3}{x^2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{x^2} \cdot x^2 + x^2 = 13$$

$$K^2 = \frac{3}{x^2}$$

$$(x^2(K^2+1)) = 13$$

$$4x^2 \frac{9}{x^4} + 6 + x^2 = 13$$



$$\frac{9}{x^2} + 6 + x^2 = 13 \quad | \cdot x^2$$

$$9 + 6x^2 + x^4 = 13x^2$$

$$x^4 - 7x^2 + 9 = 0$$

$$t^2 - 7t + 9 = 0$$

$$4t^2 - 36 = 13$$

$$K^2 + 6K + 3 = 13 \quad | \cdot K$$

$$K^2 + 6K - 7K + 3 = 0$$

$$(Kx + x)^2 = 13$$

~~Kx~~

$$Kx^2 = 3$$

$$K^2 \cdot \frac{3}{K} + 2K \cdot \frac{3}{K} + \frac{3}{K} = 13$$

$$K + 6 + \frac{3}{K} = 13 \quad | \cdot K$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$K + 6 + \frac{3}{K} = 13 \quad | \cdot K \quad 3 \quad 4$$

$$K^2 + 6K + 3 = 13K \quad K \quad 6 \quad 60 \quad m$$

$$K^2 - 7K + 3 = 0 \quad K^2 \neq K \quad 3$$

$$48 - 12 = 35$$

$$K = \frac{7 \pm \sqrt{35}}{2}$$

$$K^2 b^2 + 2Kb^2 + b^2 = 13$$

$$b^2 \cdot K(K+1) = 3$$

$$b^2 \cdot (K^2 + 2K + 1) = (a-b)^2 - 6ab$$

$$b^2 \cdot K(K+1) = 3$$

$$a+b = mK \quad \text{сравниваем с } n$$

$$(a-b)^2 - 6ab = m^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot ab = (a+b)K$$

$$\uparrow \text{ сравниваем с } a^2 \quad m^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot ab = (a+b)K$$

20

$$a : b : 2 : 5$$

$$(K+1)^2 = \frac{13}{3} \cdot K(K+1)$$

$$3K + 3 = 13K$$

$$K+1 = \frac{13}{3}K \quad | \cdot 3$$

$$3 = 10K$$

$$K = 0.3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима.

$$a^{x^b=11} \quad b^x c'' = 18 \quad a c = 3^{21} \quad 7^{38}$$

U.S.A.

$$t_{\text{m}} \approx t_b = t_m + 2$$

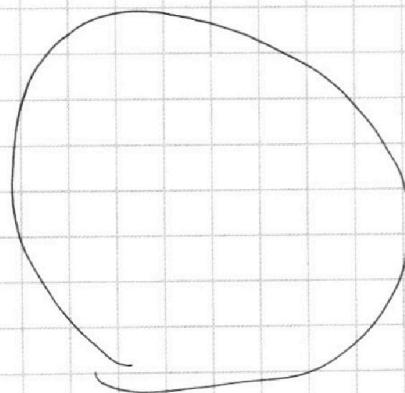
$$\begin{aligned}
 & a+b = 11x + 11y \quad b=1 \\
 & b+c = 18x + 38y \quad a+b = 11 \\
 & c+a = 21x \quad a+c = 38 \quad 18+ \\
 & (a=11-b) \quad a^2 = 11 \\
 & (a=11-b) \quad a^2 = 11 \\
 & 11-b+c = 21 \quad a=11-b \quad 18+11 \\
 & 11-11+b+c = 21 \quad a=11-b \quad 29 \\
 & c = 21 - 11 + b \quad c = 28 - 11 + b \quad 29 \\
 & c = 10 + b \quad c = 17 + b \quad 29 \\
 & C = 10x + 10y + 11x + 11y - b = 21x + 38y \quad 29 \\
 & C = 10x + 10y + 11x + 11y + b = 21x + 38y \\
 & 21x + 38y - 11x - 11y + b + b = 18x + 16y \quad -29
 \end{aligned}$$

$$2b = 18x + 16y - 21x + 38y + 11x + 11y$$

$$b = 28_{xx} - 30_{xx} \cancel{- 44}$$

$$2g_x - 1d_y$$

100



$$\begin{array}{r} 321 \\ \times 4 \\ \hline 321 \end{array}$$

