



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{14} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$2. \text{Заметим, что наименьшее } abc = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 6$$

Пусть b в выводит степень двойки n

тогда a выводит степень двойки $\geq 14 - n$
 c выводит степень двойки $\geq 17 - n$
 $14 - n + 17 - n \geq 20$

$$2. \text{ Если } n \geq 5 \text{ (целая часть числа } b \text{ не равна 0)}$$

$$\text{высшая степень двойки } abc \geq 14 - n + 17 - n + n = 31 - n \geq 31 - 5 = 26$$

$$\text{Итак } abc: 2^{20} \cdot 7^{37} \quad | \Rightarrow abc: 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$\min(abc) = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$3. \text{ Проверим: } b = 2^5, a = 2^{20} \cdot 2^9, c = 7^{17} \cdot 2^{12}$$

$$ab = 2^{25} \cdot 7^{14} \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} = 2^{39} \cdot 7^{24}$$

$$bc = 7^{17} \cdot 2^{17} \cdot 7^{14} \cdot 2^{14} = 7^{31} \cdot 2^{31}$$

$$ac = 7^{37} \cdot 2^{21} \cdot 7^{37} \cdot 2^{20} = 7^{74} \cdot 2^{41}$$

$$abc = \min(abc) = 7^{37} \cdot 2^{26}$$

$$\text{Ответ: } 7^{37} \cdot 2^{26}$$

$$\text{Если } n > 5, \text{ то } abc: 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^n \cdot 7^n \cdot 2^n \cdot 7^n = 2^{20+3n} \cdot 7^{37+3n}$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 7^{37} \cdot 2^{26}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \div m$$

м.к. a/b несократима

$$a+b \div m$$

$$(a+b)^2 - 8ab \div m \Rightarrow 8ab \div m$$

m

$a \div m$

a и b взаимнопросты (т.к. значит $a+b$ и любой делитель a или b (одно из делителей) не делится $\Rightarrow$ сумма не делится)

Значит: $8ab \div m$ и m взаимнопросты с a и $b \Rightarrow$ наименьшее $m = 8$
(иначе $a+b \nmid m$)

Пример: ~~а=7, b=3~~ $a=7, b=3$ $\frac{7+3}{7^2-6\cdot7\cdot3} = \frac{10}{452}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8+8}{7^2 + 3^2 - 6\cdot7\cdot3} = \frac{80}{80^2 - 8\cdot7\cdot3} = \frac{80 \div 8}{452 \div 8} = \frac{10}{569}$$

$\Rightarrow$ ответ $\div 8$

Ответ: $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$ радиусы окружности $\Rightarrow AB = 8x = 8$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA =$
 $= 90^\circ - \alpha - \beta$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA =$
 $= \beta$, $\angle OBA =$

$= \angle OOA = \alpha$

— внешние углы

Отложим отрезок $CX = OC$ на прямой OC от точки C

$BO \perp O_1B$ углы: 2α , $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \alpha$
 (высота BC падает в середину BC)

$\triangle OOA$ углы: α , $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \alpha$
 (равносторонний $\triangle OOA$ с углом 2α)

Тогда $\triangle OOA \sim \triangle XO_1B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OO_1}{AO} = \frac{O_1B}{AO} \Rightarrow \frac{2}{AO} = \frac{O_1B}{5}$$

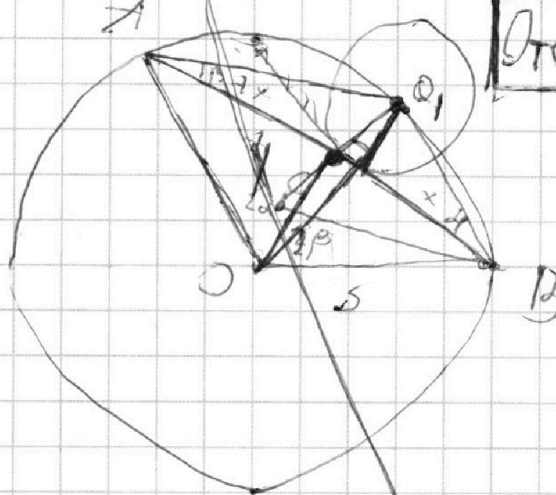
Рассмотрим $\triangle AOB$

Пусть $AB = y \Rightarrow AO = 10/y$

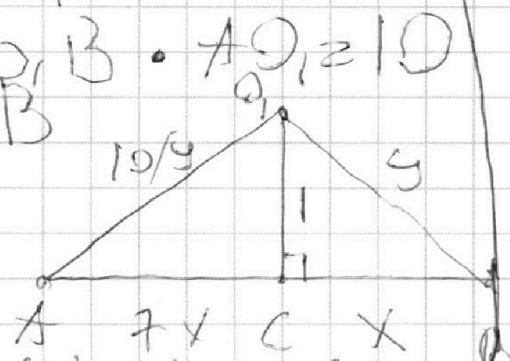
Тогда $x^2 + 1 = y^2$

$$4x^2 + 1 = \frac{100}{y^2} = \frac{100}{x^2 + 1}$$

$$(4x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100 \Rightarrow x = 1$$



Ответ: 8



(задача решена)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$1) 2x^2 - 2x + 1 \geq 0 - x - 1/2 \leq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 - x \notin (1, 5)$$

$$2) \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 2 - 7x$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 + 4x^2 + 4 - 28x + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$(7x - 2)(7x - 3) = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$-7x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$49x^2 - 42x + 9 = 4x^2 - 20x + 12$$

$$45x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 1080}}{90} = \frac{22 \pm \sqrt{-596}}{90} - \text{нет корней}$$

Значит, единственный возможный корень

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 2 - 7 \cdot \frac{2}{7}$$

$$= \sqrt{\frac{85}{7}} - \sqrt{\frac{85}{7}} = 0 = 2 - 2$$

Верно

$x = \frac{2}{7}$ подходит
(Могли получить лишний корень при возведении в квадрат)

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b \geq 0 \quad (1)$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)((x^2 + y^2 - 4)) \leq 0 \quad (2)$$

$$(2): x^2 + y^2 = 2^2$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1^2$$

подходит

2 варианта:

1 - касание на границах

2 - (x, y) внутри

одной из областей

(а сдвинутой дугой, либо
верно всегда так окруж-
ности не пересекаются)

$$(1): y = ax + 10b$$

$$a = 10b$$

$$y = 10b$$

имеет либо точку касания
либо не имеет

$$y = ax + 10b$$

$$a \neq 0$$

прямая

Если прямая не пересекает
ни одну из окружностей

- то решение

→ Как одно решение → прямая - общая
касательная к 2-м окружностям

и х у: 1) Проходит через $(2, 0)$ и $(-8, 1)$

$$\Rightarrow y = ax + 10b \Rightarrow 10b = 2$$

$$a = 1/8$$

2) Симметричная ей $a = -1/8$

3) Внутренняя касательная:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Внутренняя касательная (центр симметрии, второй диаметр).

$$y = \sqrt{4-x^2} = ax + 10b = ax + c, c = 10b$$

$$4-x^2 = a^2x^2 + 2acx + c^2$$

$$(a^2+1)x^2 + 2acx + (c^2-4) = 0$$

$$D = 4a^2c^2 - 4(a^2+1)(c^2-4) = 16a^2c^2 - 4a^2c^2 - 4c^2 + 16 = 12a^2c^2 - 4c^2 + 16 = 0$$

$$4a^2c^2 = c^2 - 16$$

$$c = \sqrt{4a^2 - 16}$$

$$y = \sqrt{1-(x+8)^2} = ax + c$$

$$1-x^2-16x-63 = a^2x^2 + 2acx + c^2$$

$$(a^2+1)x^2 + (2ac+16)x + (c^2+63) = 0$$

$$D = 21a^2c^2 + 256 + 64ac - 4a^2c^2 - 4c^2 - 252a^2 - 252 = 0$$

$$4c^2 + 252a^2 = 64ac + 4$$

$$c^2 + 63a^2 = 16ac + 1$$

$$63a^2 - 16ac + (c^2 - 1) = 0$$

$$63a^2 - 16a\sqrt{4a^2-1} - 2 = 0$$

$$63a^2 - 2 = 16a\sqrt{4a^2-1}$$

$$4489a^4 - 268a^2 + 4 = 1024a^4 - 256a^2$$

$$3049a^4 - 12a^2 + 4 = 0$$

$$a^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3049}}{2 \cdot 3049} = \frac{12 \pm 112.62}{2 \cdot 3049} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow a = \pm 1/7$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{7}; a = \pm \frac{1}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

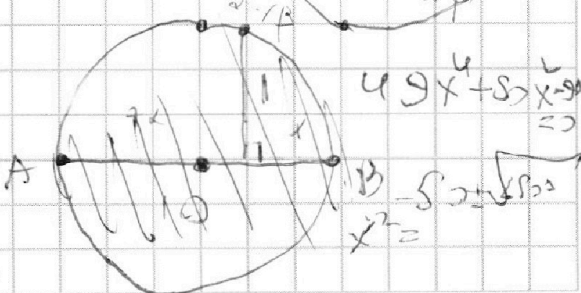
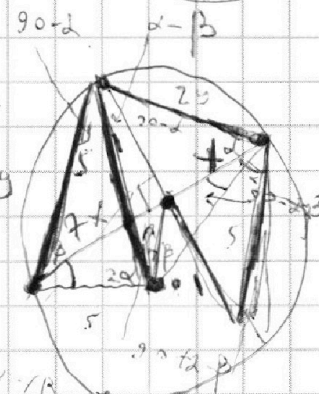
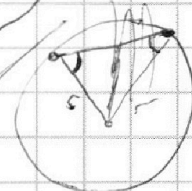
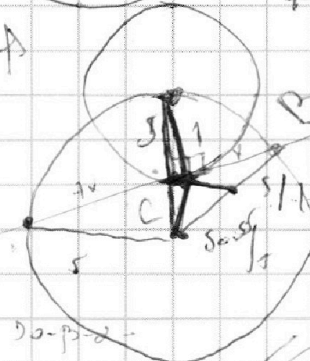
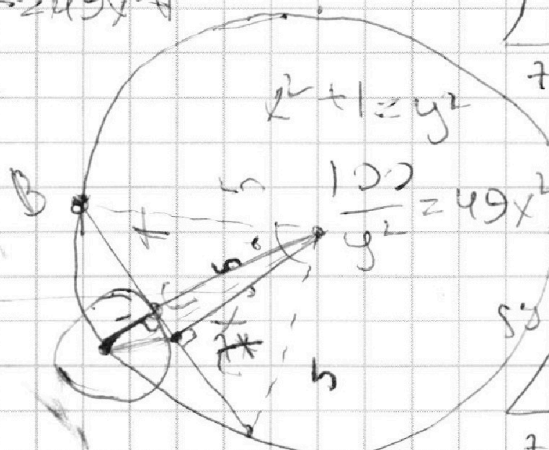
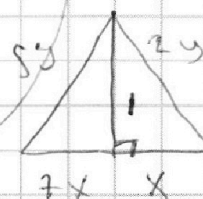
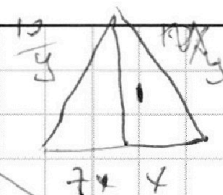
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$100 = 49x^2 + 1 \quad (x^2 + 1) \quad 100$$

$$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1 \quad + \quad x^2 + 1$$



$$x^2 =$$

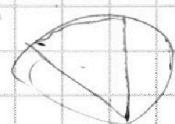
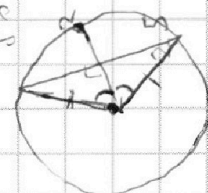
$$5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos \alpha$$

$$50(1 - \cos \alpha)$$

$$25(1 - \cos \alpha)$$

$$25 - 25 \cos \alpha$$

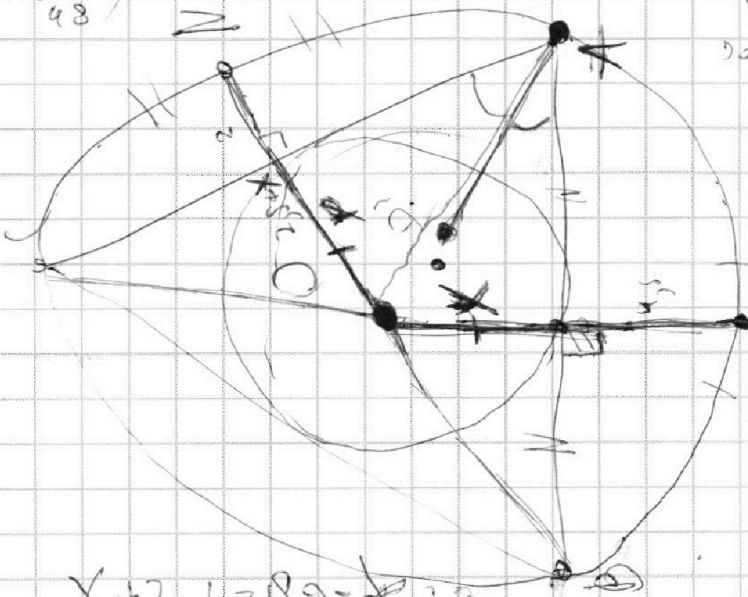
$$= 25(1 - \cos \alpha)$$



$$\frac{21}{48} \cdot 124y^2 \quad x^2 + 1 = 49y^2$$

$$48x^2 + 1 = 25y^2$$

$$129^2 \cdot \frac{141}{48} \quad 48x^2 = 21y^2$$



$$x + 2d = 180 - \alpha - 2\beta$$

$$2x + 2d = 180 - 2\beta$$

$$x + \beta + \gamma = 90$$

$$\gamma = 90 - \alpha - \beta$$

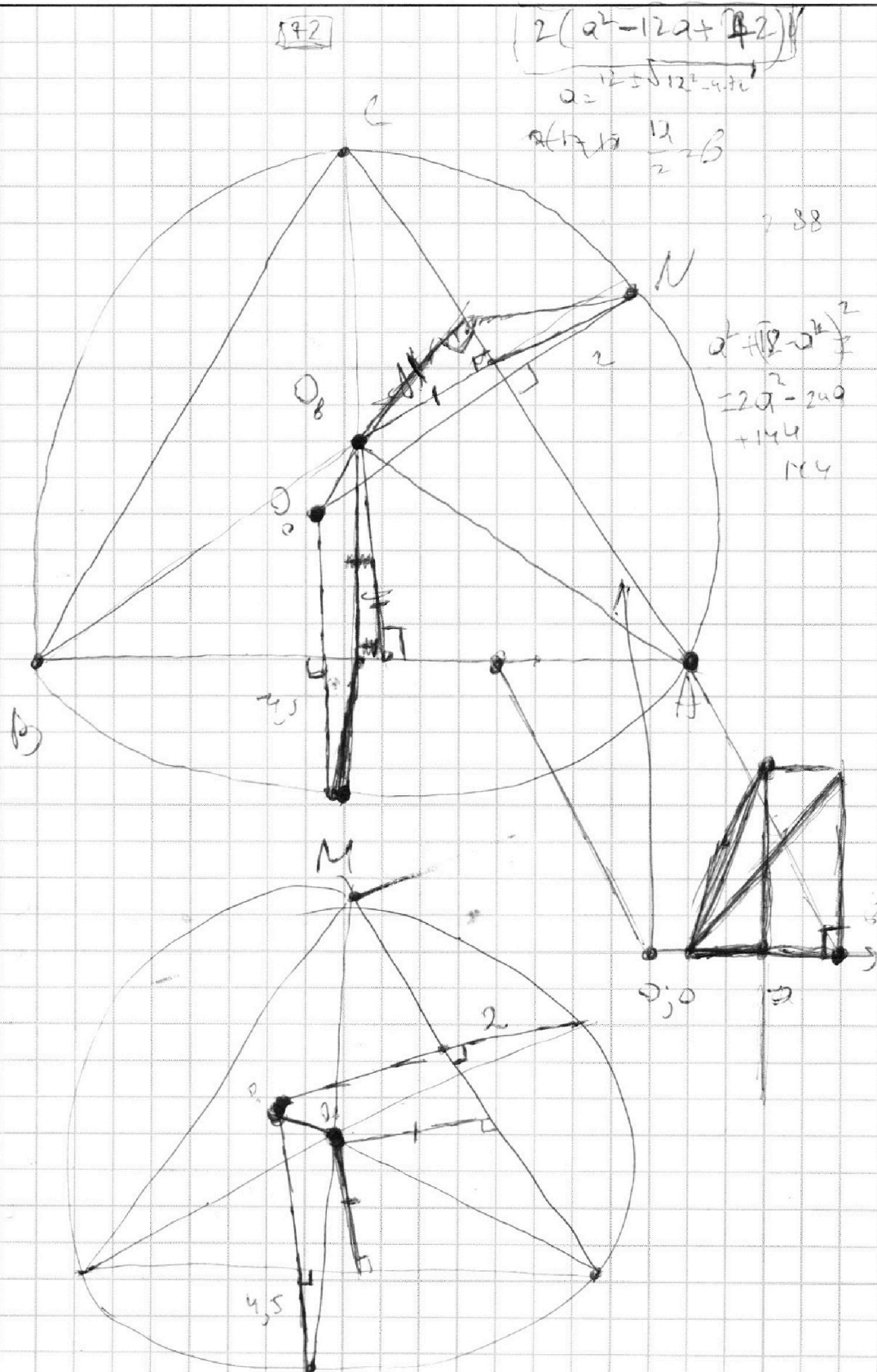
На одной странице можно оформлять **только одну задачу.**

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 **МФТИ**



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$b \cdot 2a\sqrt{a^2-1} = 12 + 62(a^2-1)$$

$$a\sqrt{a^2-1} = -31a^2 + 39$$

$$y = ax + 10b$$

$$(a^2+1)x^2 + (2a\sqrt{a^2-1}+10b)x + 100b^2 - 4 = 0$$

$$8a\sqrt{a^2-1} + 64 = 4 + 62(a^2-1)$$

$$\Delta y = [-24; 24]$$

$$\Delta x = [-26; 26]$$

$$2\Delta x + \Delta y \geq 12$$

$$a^2(4a^2-1) = 31a^2 + 39$$

$$1) b=2 \quad n(0-n; 15-n)$$

$$1 = -8 \cdot 2 \cdot k(0-k; 15-k)$$

$$8x = 1$$

$$1 = 8x + 2$$

$$a = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{y} \cdot \sqrt{1 - (x+8)^2} = ax + \frac{1}{8} = -1/8$$

$$1 - x^2 - 64 + 16x = 0$$

$$0; 6-15)$$

$$1; 0-14)$$

$$2(-1/8) \cdot 2 \cdot ax + 10b$$

$$x^2 + y^2 \geq 4$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$4 - x^2 = a^2x^2 + 16ax + 100b^2$$

$$(a^2+1)x^2 + 16ax + 100b^2 - 4 = 0$$

$$A(x_1; y_1)$$

$$B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2\Delta x + \Delta y = 12$$

$$4a^2 - c^2 + 1 = 0$$

$$4a^2 \geq c^2 - 1$$

$$AC/AB = 1$$

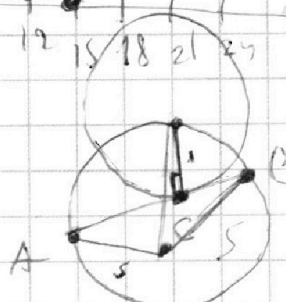
Let us find

$$y = \sqrt{4-x^2} = ax + b \quad 4a^2c^2 = 16a^2$$

$$4-x^2 =$$

$$D = 4a^2c^2 - 4a^2 + 1(c^2-4) =$$

$$= 16a^2 - 4c^2 + 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, including a geometric diagram of a circle with points and lines, and extensive algebraic calculations involving quadratic equations, square roots, and fractions.

Geometric Diagram: A circle with center O. Points A, B, C, D, E, F are marked on the circumference. Lines connect these points, forming various triangles and chords. A point X is marked outside the circle, with lines connecting it to points on the circle. There are also lines from the center O to some points on the circle.

Algebraic Calculations:

- Top left: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $x = 1$, $(2x-3)(x-1) = 0$, $x < 2/7$.
- Top right: $4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0$, $4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0$, $4(2x^2 - 5x + 3) - 25x^2 = 8x^2 - 20x + 12 - 25x^2 = -23x^2 - 20x + 12 = 0$.
- Middle left: $49x^2 - 35x + 6 = 0$, $x = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 49 \cdot 6}}{2 \cdot 49} = \frac{35 \pm 1}{98}$, $x = \frac{4}{98} = \frac{2}{49}$, $x = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$.
- Middle right: $2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$, $2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$, $5x(5-9x) = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$.
- Bottom left: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
- Bottom right: $4x^2 - 10x + 6 = 0$, $4x^2 - 10x + 6 = 0$, $4x^2 - 10x + 6 = 0$, $4x^2 - 10x + 6 = 0$.