



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Т.к. $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$; $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$; $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$; $a, b, c \in \mathbb{N}$,

то можно записать:

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \quad \text{тогда:}$$

$$abc = \sqrt{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}} = \sqrt{2kmn} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}.$$

если $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$, то $abc: ab$, то $abc: 2^{15} \cdot 7^{11}$, аналогично

$abc: 2^{17} \cdot 7^{18}$ и $abc: 2^{23} \cdot 7^{39}$, т.е. $\sqrt{2kmn} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39} : 2^{27} \cdot 7^{39}$,

значит если $\sqrt{2kmn} \neq 7^5 \cdot x$, то $abc \neq 2^{27} \cdot 7^{39}$, т.е. степень 7 меньше 5

т.е. $\sqrt{2kmn} = 7^5 \cdot x$, то т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N}$, т.е.

$\sqrt{2kmn} \in \mathbb{N}$, т.е. $\begin{cases} k: 2 \\ m: 2 \\ n: 2 \end{cases}$, значит $\sqrt{2kmn} = 7^5 \cdot 2 \cdot y$, где

$y \in \mathbb{N}$, тогда

$$\text{Умно } abc = 2^{27} \cdot 7^{39} \cdot 7^5 \cdot 2 \cdot y = 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot y \leq 2^{28} \cdot 7^{39}, \text{ т.е.}$$

abc — ~~мысли~~ наименьшее значение abc равно $2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ — несократимая дробь.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab-7ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

1) если $a+b \div m$, то $(a+b)^2 \div m$, значит можно

узнать можно было сократить как на какое число

$(a+b)^2-9ab \div m$, т.к. $(a+b)^2 \div m$, то $9ab$ должно делиться на m .

2) если $a \div m$, то тогда $\frac{a+b}{m} \div m$, т.е. $b \div m$ если b

делится одно из чисел, значит делится и второе — то

и то, и другое сократится должно делиться на

это число, в нашем случае должно делиться на

m , то тогда $\frac{a}{m} \div m$, т.е. $\frac{a}{b}$ — несократима, т.е. $a \div m$.

Аналогично $b \div m$

3) если $9 \div m$, то т.к. $9ab \div m$, значит $ab \div m$,

$$\text{получаем } \begin{cases} a+b \div m \\ ab \div m \end{cases}$$

т.е. можно записать:

$$\begin{cases} a+b = k \cdot m \\ a \cdot b = k \cdot m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ \frac{m \cdot k}{b} + b = m \cdot n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ nk + b^2 = \frac{m \cdot n \cdot b}{n} \end{cases}$$

получаем $b^2 \div m$,

т.е. $b \div \sqrt{m}$, а значит $\sqrt{m} \mid a$, значит $9 \div m \Rightarrow m_{\max} = 9$

Ответ: 9

$$\frac{a+b}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{m}} \div \sqrt{m} \Rightarrow a \div \sqrt{m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. По т. косинусов $\angle O_1 O_2$:

$$AO_2^2 = AO_1^2 + BO_1^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot BO_1 \cdot \cos 2\alpha$$

$$AO_2^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$AO_2^2 = 2 \cdot 13^2 (1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha)$$

$$AO_2^2 = 2 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha$$

$$AO_2^2 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{O_1 B^2 \cdot AO_1^2}{O_1 B^2 \cdot O_1 A^2}$$

$$1 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{7^2}{(7^2 + 17^2)(7^2 + 17^2 \cdot 1^2)}$$

$$(17^2 x^2 + 7^2)(17^2 x^2 + 7^2) = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$17^2 \cdot 7^2 \cdot x^4 + 17^2 \cdot x^2 \cdot 7^2 + 7^2 \cdot 7^2 \cdot x^2 + 7^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$289x^4 + (17^2 + 7^2)x^2 = 2^2 \cdot 13^2 - 7^2$$

$$289x^4 + 328x^2 - 627 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} \end{cases} \quad \emptyset$$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, т.к. x - коэффициент при x^2 .

$$7) AB = 17x + 7x = 24x = 24 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 9, \text{ тогда } 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1 =$$

$$= 2 + (1 - 9x)$$

$$1 - 9x = b$$

Умножаем: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$.

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$, возведем в квадрат с помощью формулы

$$a+b = a + 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$b = 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$\begin{cases} b=0 \\ 1=2\sqrt{a}+b \end{cases},$$

$$\begin{cases} b=0 \\ \sqrt{a}=\sqrt{a} \\ b=1-2\sqrt{a} \\ \sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+2\sqrt{a}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b=1-2\sqrt{a} \\ \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = 1+\sqrt{a} \end{cases},$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b=1-2\sqrt{a} \\ |\sqrt{a}-1| = 1-\sqrt{a} \end{cases},$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b=1-2\sqrt{a} \\ a \leq 1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b=1-2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \\ b=1 \\ a=1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пробуем.

$$\begin{cases} b=0; & a \neq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0 \quad - \text{верно.}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \sqrt{a - 2\sqrt{a} + 1} &= 1 - \sqrt{a} \\ \sqrt{(\sqrt{a} - 1)^2} &= 1 - \sqrt{a} \\ |\sqrt{a} - 1| &= 1 - \sqrt{a} \\ 1 - \sqrt{a} &= 1 - \sqrt{a} \quad - \text{верно} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases} \quad \sqrt{2} - \sqrt{1} = 1 \quad - \text{не верно.}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 1 - 9x \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} & \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - 9x = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} & \begin{cases} 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (*) \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} 9x \geq 0 \\ 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 61x^2 = 12x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 61x^2 - 12x + 4 = 0 \end{cases} \quad D < 0 \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

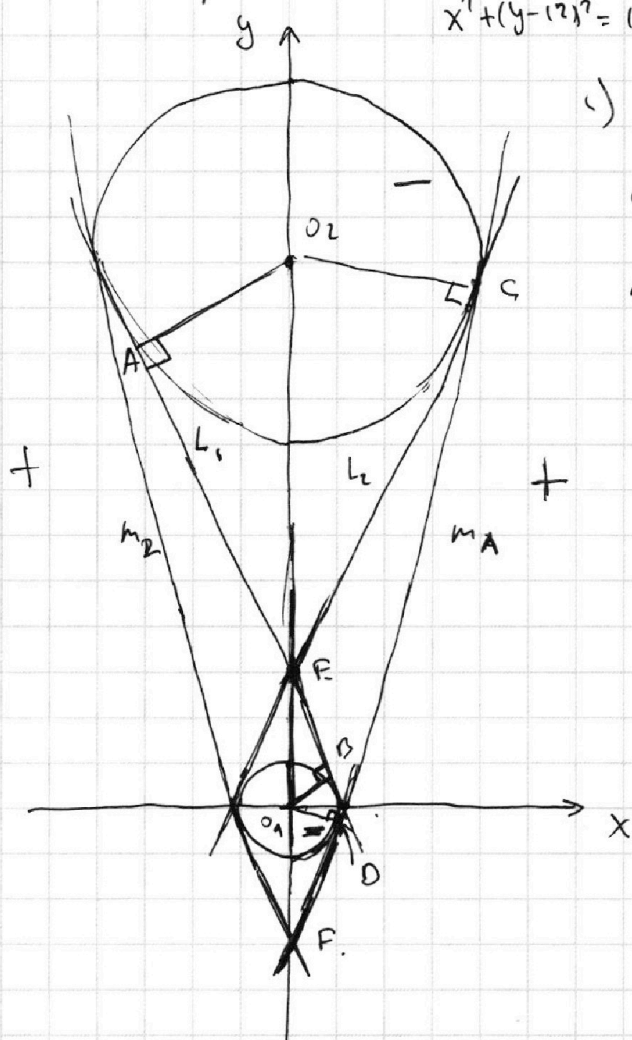


Задача №6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \quad (*) \end{cases}$$

Изобразим ~~$ax+y-8b=0$~~ $x^2+y^2=1$.

(*) Траектория: $x^2+y^2=1$ — окружность $O_1(0;0); R_1=1$
 $x^2+(y-12)^2=16$ — окружность $O_2(0;12); R_2=4$



1) Прямая ~~верно~~ только

или точки ~~или на границе~~ или внутри $\sqrt{}$ большей или

меньшей окружности, тогда

система будет иметь ^{только} ровно 2 решения $\sqrt{}$ тогда, когда

прямая $ax+y-8b=0$ будет касаться обеих окружностей.

2) Пусть общие касательные к двум окружностям

пересекются только внутри между двумя окружностями
 Точка E. ($E \in O_1 O_2$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) Тогда из рис. окруж. из двух точек касания

горизонт. L_1 : $L_1 \cap \text{Окр}(O_2, R_2) = A$, тогда
 $L_1 \cap \text{Окр}(O_1, R_1) = B$

$O_2A \perp L_1$ и $O_1B \perp L_1$ или радиусы, проведенные к
 точке касания

4) $\triangle O_2AE \sim \triangle O_1BE$ по двум углам, т.к.

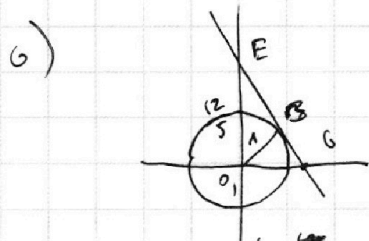
$\angle A = \angle B = 90^\circ$ и $\angle AEO_2 = \angle BEO_1$ как вертикальные,

тогда $\frac{O_1E}{O_1B} = \frac{O_2A}{O_2E} \Rightarrow \frac{4}{1} \Rightarrow O_2E = 4O_1E$ и

$O_2E + O_1E = 12$, т.к. $O_1E + 4O_1E = 12 \Rightarrow O_1E = \frac{12}{5}$,

т.к. $E(0; \frac{12}{5})$

5) $E \in L_1$, т.к. $a \cdot 0 + \frac{12}{5} - 3b = 0 \Rightarrow b = \frac{12}{5 \cdot 8} = \frac{3}{5} = 0,6$.



Прямая $L_1 \cap O_x = G$, тогда.

По т. Пифагора $EG^2 = O_1G^2 + O_1E^2$

$S \triangle O_1EG = \frac{1}{2} \cdot O_1E \cdot O_1G = \frac{1}{2} \cdot O_1G \cdot EG \Rightarrow EG = O_1E + O_1G$

$O_1E^2 + O_1G^2 = O_1E^2 + O_1G^2 \Rightarrow \frac{12^2}{5^2} + O_1G^2 = \frac{12^2}{5^2} + O_1G^2 \Rightarrow \frac{144}{25}$

т.к. $(O_1E + O_1G)^2 = O_1E^2 + O_1G^2 + 2 \cdot O_1E \cdot O_1G \Rightarrow \frac{144}{25} = \frac{144}{25} + 2 \cdot \frac{12}{5} \cdot O_1G \Rightarrow \frac{144}{25} - \frac{144}{25} = 2 \cdot \frac{12}{5} \cdot O_1G \Rightarrow 0 = 2 \cdot \frac{12}{5} \cdot O_1G \Rightarrow O_1G = 0$

2) $G \in L_1$, значит $a \cdot \frac{12}{5} + 0 - 8 \cdot \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow a = \frac{12 \cdot 12}{5 \cdot 143} = \frac{144}{715}$

8) Эти касательные вторую касат. L_2 как
 по двум т. L_1 и L_2 - симметр. озн. Оу

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) значит a в этом случае будет равно $\frac{\sqrt{143}}{5}$

г) Расм. касательных m_1 и m_2 , которые пересекаются за пределами, отрезки, соединяющие центры окружностей, т.е. $m_1, m_2 \perp F$; $F \notin O_1O_2$

Тогда m_1

10) Аналогично с касам. b_1 и b_2 расм. Тогда касательная m_1 :

мысли $m_1 \cap \text{Окр}(O_1; r_1) = C$, $m_1 \cap \text{Окр}(O_2; r_2) = D$.

н) $\triangle FO_1C \sim \triangle FO_2D$ по двум углам, т.к.

$\angle C = \angle D = 90^\circ$ т.к. радиусы, проведенные к ~~кас.~~ кас.

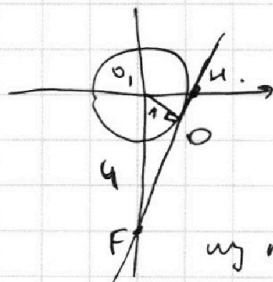
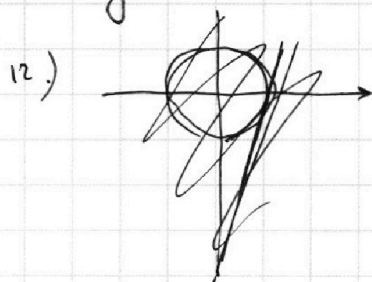
касания перпендикулярны касательной

$\angle F$ - общий, тогда: $\frac{O_2F}{O_1F} = \frac{O_2C}{O_1D} = \frac{4}{1} \Rightarrow O_2F = 4O_1F$

Также $O_2F - O_1F = 12$, значит $4O_1F - O_1F = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1F = 4$, т.е. $F(O_1; 4)$; $F \in m_1$, значит

$$0 \cdot x + 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$



мысли $m_2 \cap O_2H = H$,

тогда по т. Пифагора

$$FH^2 = O_1F^2 + O_1H^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{So } F_{O,H} = \frac{1}{2} \vec{O,F} \cdot \vec{O,H} = \frac{1}{2} O,F \cdot O,H, \text{ т.е. } F_H = O,F \cdot O,H$$

Получается: $O,F^2 \cdot O,H^2 = O,F^2 + O,H^2$

$$4^2 \cdot O,H^2 = 4^2 + O,H^2 \Rightarrow (4^2 - 1) O,H^2 = 4^2 \Rightarrow O,H = \sqrt{\frac{4^2}{4^2 - 1}} = \frac{4}{\sqrt{15}}, \text{ т.е. } H(0; \frac{4}{\sqrt{15}})$$

13) $H \in m_1$, значит: $a \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} + 0 - 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \Rightarrow a = \sqrt{15}$.

14) Рассматриваем кася перпендикуляра m_2 к l_1 и l_2 с помощью l_1, l_2 , то $a = -\sqrt{15}$

Ответ: $a = \pm \frac{\sqrt{143}}{5}$; $a = \pm \sqrt{15}$



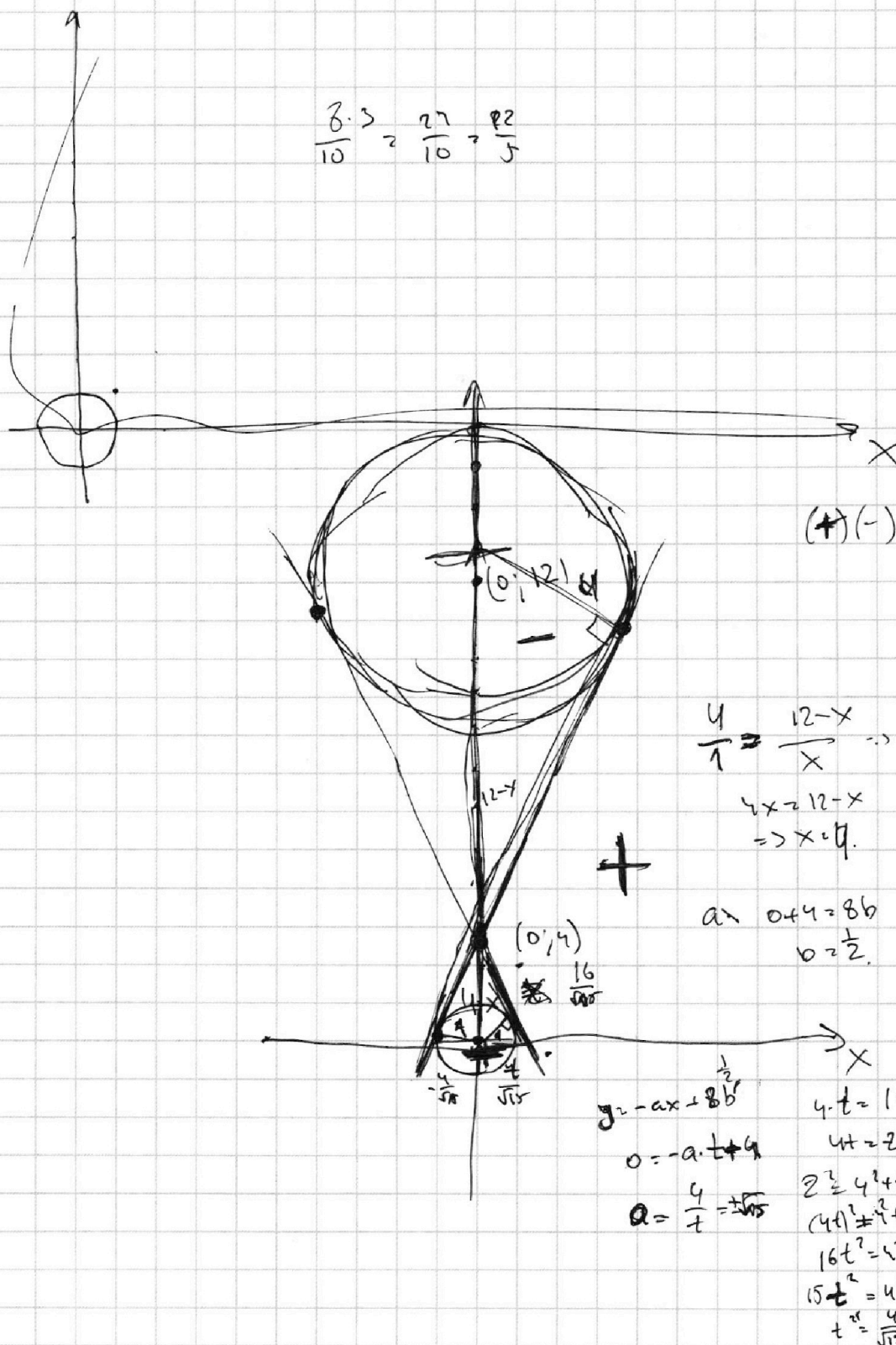
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(1-9x)=b$$

$$3x^2 - 6x + 2 = t - 3x + 1 = t + (1-9x)$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a+b = a + 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$b = 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$2\sqrt{a} + b = 0$$

$$(0; 0)$$

$$(16; 0)$$

$$(0; 0)$$

$$(16; 0)$$

$$P(-13; 26)$$

$$Q(3; 26)$$

$$\Rightarrow b = -2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a}} = \sqrt{a} - 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$$

$$a-2\sqrt{a} = a = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$b^2 + 2\sqrt{ab} - b = 0$$

$$b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$$

$$16 + 13 = 29$$

$$20^2 + 29^2 \geq 14^2$$

$$2|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 14$$

$$-1 \leq x_2 - x_1 \leq 16$$

$$-4 \leq y_2 - y_1 \leq 26$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 2 \\ y_2 - y_1 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 4 \\ y_2 - y_1 = 6 \end{cases}$$

$$a - 2\sqrt{a} + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} -10 \\ 81x^2 - 12x - 12 \\ \hline 6.9 \end{array}$$

$$\sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-1} = \sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} = 1$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1} = 0$$

$$\frac{3}{81} - \frac{54}{81} + \frac{162}{81}$$

$$181 + 29 + 3 = 213$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ + 22 \\ \hline 103 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &= k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &= m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac &= n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned} \quad ; a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\frac{84}{7} = 27$$

$$abc = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39}} = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{kmn2}$$

$$c = \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot 2^{17+18+23} \cdot 7^{27+39}}{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}} = \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot 2^{58} \cdot 7^{66}}{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}} = \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot 2^{43} \cdot 7^{55}}{k}}$$

$$abc : ac \text{ то } abc : n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \text{ т.е. } 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{kmn2} : n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot X = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$c = \frac{2^{28} \cdot 7^{39}}{2^{23} \cdot 7^{39}} = \frac{2^5}{k}$$

$$b = \frac{n \cdot 2^5}{m \cdot 2^5} = \frac{n}{m}$$

$\frac{a}{b}$ - др. - сократимся.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{a^2-7ab+b^2}{m}}$$

$a = 2^m$; $b = 7^m$; $a = 7^m$; $b = 2^m$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{4}{u^2-9v}$$

$$8-2=4.$$

$$\frac{2+n}{2-n \cdot 7 \cdot n+n} = \frac{2}{2-2+n} = \frac{2}{n} = \frac{n}{4}$$

$$\frac{n+n}{n-n \cdot n \cdot n+n} = \frac{2}{n-n^3+n} = \frac{2}{1-n^3}$$

$$5-3=2.$$

$$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b}$$

$$2ab : a+b$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1 = \frac{2^2 - 2^2 - 13^2}{(10x^2 + 2x^2 + 2^2)(17x^2 + 2^2)}$$

$$x = 1$$

$$(289 + 4)(2^2 + 2^2) = 338 \cdot 98 = 2$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ \times 2 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$(289x^2 + 4)(17x^2 + 2) = 17^2 \cdot 2^2 \cdot x^4 + 17^2 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 17^2 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 2^2 \cdot 2^2 = 17^2 \cdot 2^2 \cdot x^4 + (17^2 + 2^2) \cdot 2^2 \cdot x^2 + 2^2 \cdot 2^2 = 289x^4 + 338x^2 + 2 = 2 \cdot 13^2$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-2ab} =$$

$$a+b \equiv m$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b+3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})} = \frac{a+b}{(a+b)^2+6\sqrt{ab}(a+b)+9ab}$$

$$\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\begin{array}{l} a - \text{rem} \\ b - \text{rem} \\ a - \text{rem} \\ b - \text{rem} \end{array}$$

$$\frac{2}{2^2 - h} = \frac{2}{2 - h} = \frac{2}{h} \cdot h$$

g



$$a+b$$

$$a+b$$

same

$$a+b \equiv m, \text{ to } (a+b)^2 \equiv x$$

$$\Rightarrow a \equiv x \text{ and } b \equiv x \text{ where } b \text{ given. } \equiv x, \text{ i.e. } \frac{a}{b} - \text{comp.}$$

$$(a+b)^2 \equiv m$$

$$- 2ab \equiv m \text{ where}$$

$$\text{can } g \nmid m, \text{ to } a \cdot b \equiv m, \text{ i.e. } a+b \equiv m$$

$$a \cdot b \equiv mk$$

$$a+b \equiv m \cdot n$$

$$a = \frac{mk}{b}$$

$$\frac{mk}{b} + b \equiv m \cdot n$$

$$mk + b^2 = b \cdot m \cdot n$$

$$b^2 \equiv m$$

$$a+b \equiv m$$

$$b \equiv \sqrt{m}$$

$$a + \sqrt{m} \cdot x = m \cdot y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

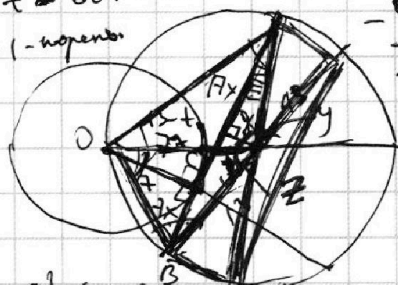


$$27^2 + 1^2 + (17^2 + 7^2)t = 2^2 \cdot 13^2 - 7^2$$

$$285 \cdot 1^2 + 378t = 627 = 0$$

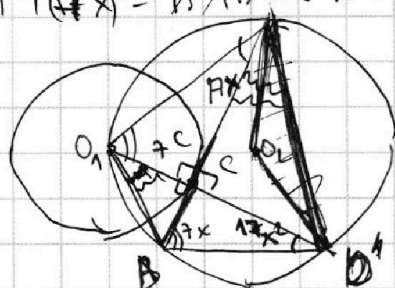
$$\begin{array}{r} 285 \\ + 378 \\ \hline 663 \end{array}$$

$t = 1$ - корень



$$AO^2 = 7^2 + (17x)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 2\gamma$$

$$AO^2 = 7^2 + (17x)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 2\gamma$$



$$\frac{7}{y} = \frac{13-t}{t} \quad \frac{13}{t} - 1$$

$$\frac{y}{7} = \frac{t}{13-t} \Rightarrow y = \frac{7t}{13-t}$$

$$(17x)^2 - (7x)^2 = \cos 2\gamma - \cos 2\gamma = \cos$$

$$17x \cdot 17x = A \cdot a$$

$$a = 17x$$

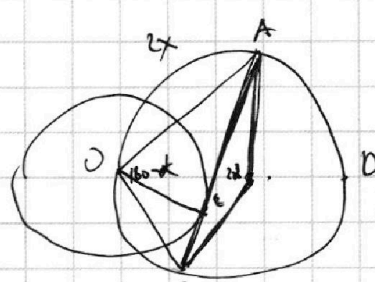
$$\frac{7x}{7} = x$$

$$\frac{17x}{17} = x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 9x + 1} = 4 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 9x + 1} + 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 16x^2 = 3x^2 + 9x + 1 + 10x\sqrt{3x^2 + 9x + 1} + 1$$



$$AB^2 = 273^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 2\alpha$$

Ans

$$AB \cdot OC = AO \cdot OB \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{AB \cdot OC}{AO \cdot OB} \Rightarrow$$

=>

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \frac{AB^2 \cdot OC^2}{AO^2 \cdot OB^2}$$

$$AB^2 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - 1 + 2 \frac{AB^2 \cdot OC^2}{AO^2 \cdot OB^2} \right) = 1 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{7^2}{((17x)^2 + 7^2)(17x^2 + 7^2)}$$

$$17^2 x^2 \cdot 7^2 x^2 + 17x^2 \cdot 7^2 + 7^2 \cdot 17x^2 + 7^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$17^2 x^4 + (17^2 + 7^2)x^2 + 7^2 = 2^2 \cdot 13^2$$

$$x^2 = 1$$