



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^4 \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{10} \cdot 7^{37}$$

Заметим, что если в произведении abc присутствуют какие-то множители, кроме 2^a и 7^b , то такое произведение не будет наименьшим, т.к. данные множители не входят в делители, но факторизацией произведения $abc = 2^a \cdot 7^b$

$B \geq 37$, т.к. $ac: 7^{37}$. Пусть $a = 2^k \cdot 7^e$, $b = 2^m \cdot 7^f$, $c = 2^n \cdot 7^d$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+m \geq 14 \\ m+n \geq 17 \\ k+n \geq 20 \end{cases}$$

$2m+k+n \geq 31$ Попробуем минимизировать $k+m+n$, т.е.

$$\begin{cases} k+m=14 \\ m+n=17 \\ k+n=20 \end{cases} \quad \begin{cases} 2m+k+n=31 \\ 2m=14, \text{ но } m \text{ четок, но если } m=5, \text{ не подходит,} \\ \text{а значит минимальным будет } m=6 \end{cases}$$

вспомогательная система из 1-го уравнения увеличиваем на 1 и попробуем решить систему линейных уравнений: (возможно пока система имеет решение $m+n+k$, но увеличиваем пока можно)

$$\begin{cases} k+m=15 \\ m+n=17 \\ k+n=20 \end{cases} \quad \begin{cases} 2m+k+n=32 \\ 2m=12 \\ m=6, k=9, n=11. \end{cases} \quad m+n+k=26$$

Получим при $a = 2^9 \cdot 7^{10}$, $b = 2^6$, $c = 2^{11} \cdot 7^{17}$ которая удовлетворяет условиям задачи.

т.е. m, n, abc ~~≥ 37~~ ~~$\geq m+n+k$~~ ~~не~~ ~~выполняются~~, т.е.

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

возможна и она будет ~~то~~ ~~минимальной~~.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{a}{b} \text{ несократима} \Rightarrow (a, b) = 1$$

Поскольку $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ можно сократить на $m \Rightarrow a+b : m$ и

$$(a+b)^2 - 8ab : m$$

т.к. $a+b : m \Rightarrow (a+b)^2 : m \Rightarrow 8ab : m$. Но т.к. $(a, b) = 1$ ни один из чисел

числителя из m не содержится и в a , и в b , а

также в a или в b они тоже содержаться не могут, иначе

в сумме $a+b$ a делится на m , а b нет, значит в b

сумма не делится на этот множитель, значит в a сумма не

делится и на m . Получается все ^{числитель} множители из m

содержатся в 8 ($8 : m$) $\Rightarrow 8 \geq m$. Пример при

$$m=8 \quad a=1, b=7 \quad (1,7)=1 \quad \frac{1+7}{1-42+49} = \frac{8}{8} = \frac{1}{1}$$

$$\text{Ответ: } m=8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Заметим, что $2x^2-5x+3 - (2x^2+2x+1) = -7x+2 = 2-7x$

Поэтому $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2x^2-5x+3 - (2x^2+2x+1)$

Положим $a = 2x^2-5x+3$ $b = 2x^2+2x+1$

$$a-b = a^2-b^2 \quad a^2-b^2 - (a-b) = 0 \quad (a-b)(a+b+1) = 0$$

$$\begin{cases} a=b \\ a+b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \end{cases}$$

$$2x^2-5x+3 \geq 0 \quad \text{и} \quad 2x^2+2x+1 \geq 0$$

$$(x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$D \geq 0 \quad z \geq 0 \Rightarrow \text{при любых } x$$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

$(-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$ ← корни в этом промежутке

$$-7x+2=0$$

$$2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 + 2\sqrt{4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2-16x+3} = 1$$

$$x = -\frac{2}{7}$$

$$4x^2-3x+3 + 2\sqrt{4x^4-6x^3-2x^2+x+3} = 0$$

$$16x^4+9x^2+9-24x^3-18x+24x^2 = 16x^4-24x^3-8x^2+4x+12$$

$$41x^2-22x-3 = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82}$$

$$x = \frac{41 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

Поэтому при рассмотрении корней:

$$x = -\frac{2}{7}$$

$$x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$$

$$x = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 16161} \\ \underline{976} \\ 6401 \\ \underline{640} \\ 5801 \\ \underline{580} \\ 492 \end{array}$$

$$2\sqrt{61} < 8$$

$$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} < \frac{11+2\sqrt{61}}{41} < \frac{11+16}{41} < 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \\ 160ab - 100b^2 - 63a^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$67a^2 - 160ab + 3 = 0$$

Решив это уравнение для a относительно b
мы найдем все нужные значения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{MF}{MA} = \sin \angle C = \frac{DA}{AN} \quad \sin \angle C = \frac{2.5}{11} = \frac{V}{11}$$

$$\frac{NG}{AN} = \sin \angle A = \frac{DA}{AM} \quad \sin \angle A = \frac{2}{11} = \frac{V}{1}$$

Получим $\frac{9}{1 \cdot 11} = \frac{V^2}{1 \cdot 11} \Rightarrow V = 3 \Rightarrow AQ = 3 \Rightarrow AI = 6$

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

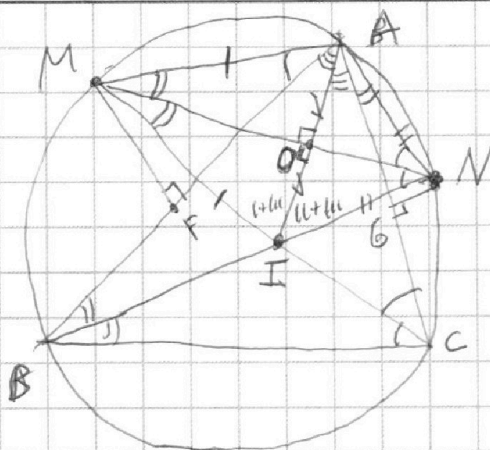
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$BM = MA \Rightarrow \angle MCB = \angle MCA \Rightarrow MC - \text{бис. } \angle BCA$
 $AN = NC \Rightarrow \angle ABN = \angle NBC \Rightarrow BN - \text{бис. } \angle ABC$
 Точка I - точка пересечения бис. CM и BN (I) - центр вписанной окружности
 $\triangle ABC$ (CM и BN биссектрисы $\angle C$ и $\angle B$)
 Тогда AI - бис. угла BAC:
 $\angle BAI = \angle CAI$

$MF = 4,5$ $NG = 2$ $\angle MAB$ опирается на дугу MB \Rightarrow

$\angle MAB = \angle MCB = \angle MCA$. $\angle NAC$ опирается на дугу NC \Rightarrow

$\angle NAC = \angle NBC = \angle NBA$. $\angle MIA = \angle IAC + \angle ICA$ (внешний) =

$= (\alpha + \alpha) \Rightarrow \angle MIA = \angle MAI \Rightarrow \triangle IMA$ равнобедр. и

$MI = IA$. $\angle AIN = \angle BAI + \angle ABI = \alpha + \alpha \Rightarrow \angle AIN = \angle IAN \Rightarrow$

$\triangle ANI$ равнобедр. и $AN = NI$. ~~$\triangle AMI \cong \triangle INI$ (3 стороны)~~

$\angle CMA$ опирается на дугу AC $\Rightarrow \angle CMA = \angle ABC \Rightarrow \frac{\angle CMA}{2} = \frac{\angle ABC}{2} = (\alpha)$

$\angle ANB$ опирается на дугу AB $\Rightarrow \angle ANB = \angle BCA \Rightarrow \frac{\angle ANB}{2} = \frac{\angle BCA}{2} = (\alpha)$

$\triangle MAN = \triangle MIN$ (3 стороны) $\Rightarrow \angle AMN = \angle IMN$ и $\angle ANM = \angle INM$

т.е. MN - бис. углов AMI и ANI. Тогда $\angle AMN = \angle IMN =$

$= \frac{\angle AMI}{2} = (\alpha)$. $\angle ANM = \angle INM = \frac{\angle ANI}{2} = (\alpha)$. MO - высота

в $\triangle AMI$ (он равнобедр. и MO - бис.) он и $\triangle ANI$ (аналогично)

т.е. $MN \perp AI$. Также $AP = OI$ (MO и ON высоты в равнобедр. $\triangle AMI$ и $\triangle ANI$).

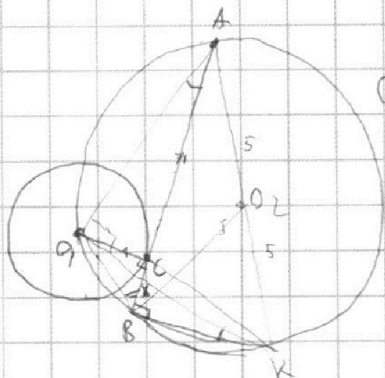
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$BK = \sqrt{25 - 84x^2}$$

$$O_1B = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$O_1A = \sqrt{45x^2 + 1}$$

$$\frac{O_1A}{\sin 2\alpha} = \frac{O_1B}{\sin \alpha}$$

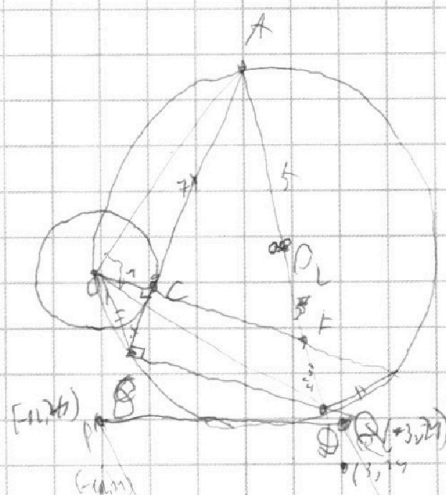
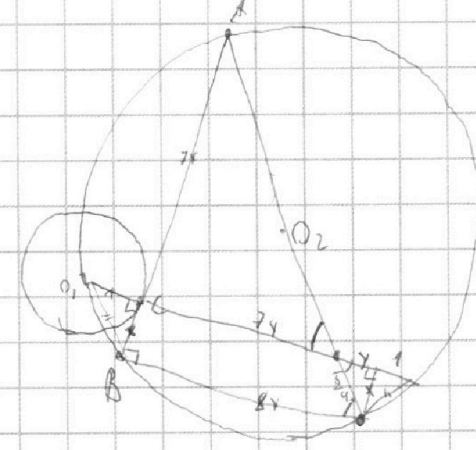
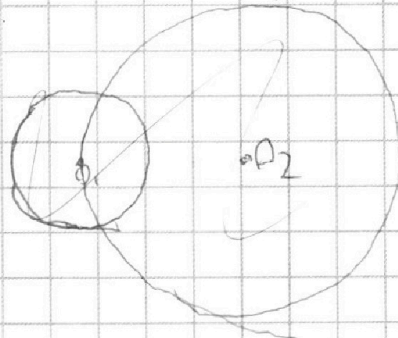
$$\frac{7x}{\frac{3x}{5}} = \frac{3x}{5}$$

$$\frac{4x}{5} = \frac{3x}{5}$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

$$\sin \alpha = \frac{7x}{5} = \frac{x \cdot 4}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{16x^2}{25}} = \frac{3x}{5}$$



$$\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AP} = \frac{CK}{BK} = \frac{7}{8}$$

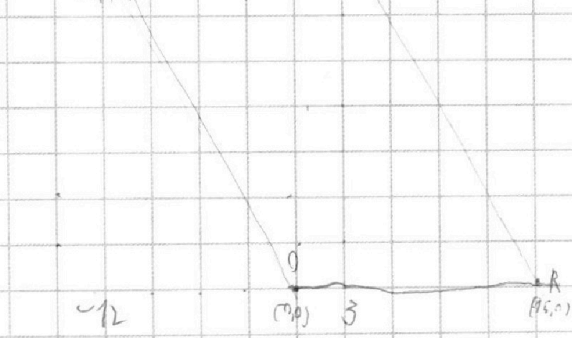
$$\frac{AF}{70} \quad AF = \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$$

$$EP = \frac{5}{4}$$

$$\frac{9}{16}x^2 + x^2 = \frac{8}{16} \cdot 25$$

$$x^2 \cdot \frac{25}{16} = \frac{8}{16} \cdot \frac{25}{16}$$

$$x^2 = 1$$



$$y_2^2 + 2x_2^2 = y_1^2 + 2x_1^2 + 12$$

$$y_2^2 - y_1^2 = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 12$$

$$2x_2^2 - 2x_1^2 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_2^2 - 2x_1^2 = 12 - y_2 + y_1$$

$$RK \quad y = -2x + 30$$

$$QP \quad y = -2x$$

$$(x_1, y_1)$$

$$(x_2, y_2)$$

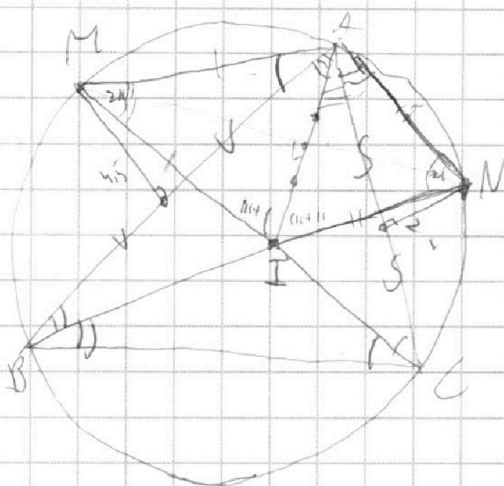
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{\sin l} = 1$$

$$\frac{2}{\sin l} = 1$$

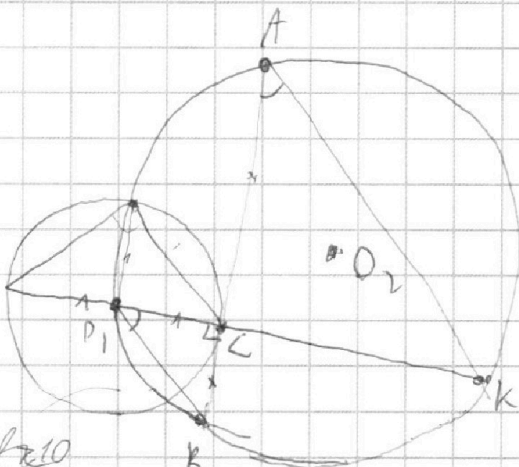
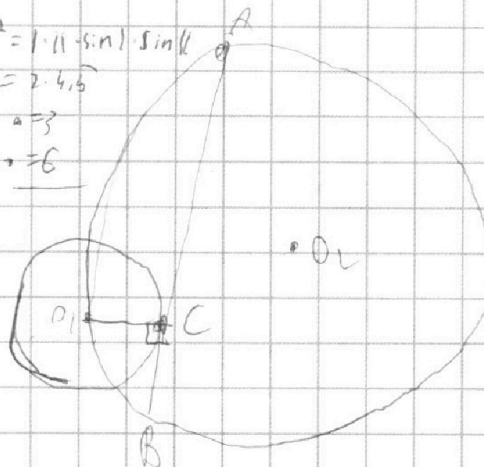
$$\frac{4.5}{\sin l} = 1$$

$$a^2 = 1 \cdot (1 - \sin l) \cdot \sin l$$

$$= 2 \cdot 4.5$$

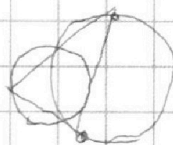
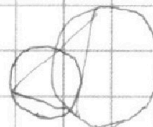
$$a = 3$$

$$2a = 6$$



$$\frac{1}{2x} = \frac{x}{CK}$$

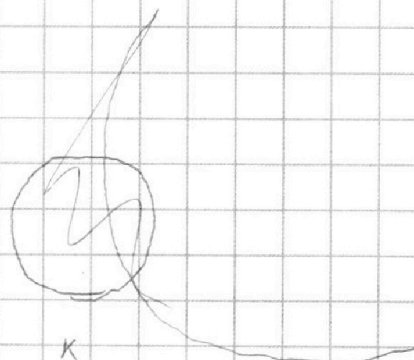
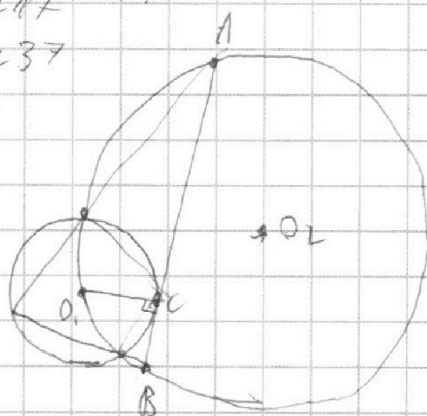
$$CK = 7x^2$$



7+6=13
8+4=12
1+8=9
9+4=13

37
37

2...7



$$a = 2^k$$

$$b = 2^m$$

$$c = 2^h$$

$$k+m = 14$$

$$m+n = 17$$

$$k+n = 20$$

$$2n = 37 - 14 = 23$$

$$2m = 31 - 14 = 17$$

$$2h = 20 - 14 = 6$$

$$m = 8.5$$

$$h = 3$$

10 8 8 12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 + 2\sqrt{4x^4-6x^3-2x^2+x+3} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 3 = -2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3}$$

$$16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 18x + 24x^2 = 16x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 1$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 484 + 492 = 976$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ -22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 884 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ +41 \\ \hline 82 \\ 82 \\ \hline 164 \\ +192 \\ \hline 356 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 984 \\ 186 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$

$$x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

$$\left[\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \right]$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 1156} \\ 976 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 722} \\ 48 \\ \hline 242 \end{array}$$

$$x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$$

Р
A
(-1, 24)

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

(3, 24)

O (0, 0) R (15, 0)

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

OR: $y = 2x + 24$

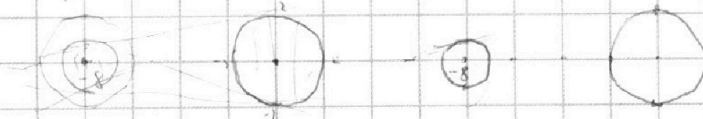
QR: $\begin{cases} 24 = 3k + b \\ 0 = 15k + b \end{cases}$ $y = -2x + 30$

$k = -2$ $b = 30$

OP: $\begin{cases} 24 = -2k + b \\ 0 = 0k + b \end{cases}$ $k = -2$ $b = 0$ $y = -2x$

Р(12, 24)

$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \\ ax - by + 19ab = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = ax + 19ab \\ y = -2x \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^{1+1} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &: 2^{59} \cdot 7^{64} \\ abc &: 2^{26} \cdot 7^{32} \end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$\frac{1+7}{8^2 - 8 \cdot 7} = \frac{1}{8-7}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a \geq 2^{10} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{aligned} a &: 2^8 \cdot 7^{20} \\ b &: 2^6 \cdot 7^0 \\ c &: 2^{12} \cdot 7^{17} \\ &: 2^{26} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

$$r+ab : m$$

$$g : m$$

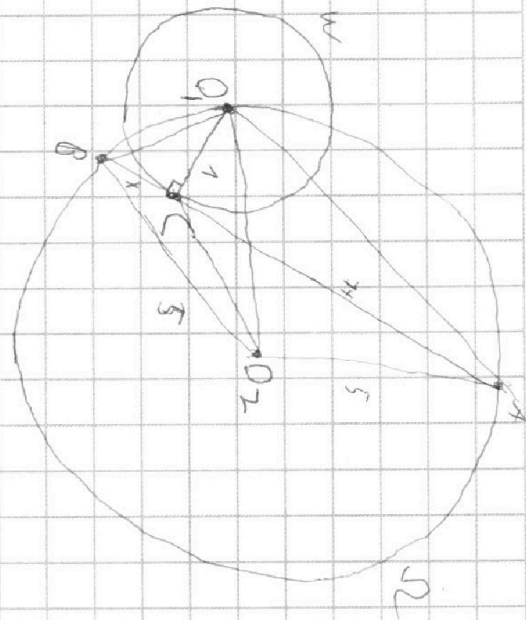
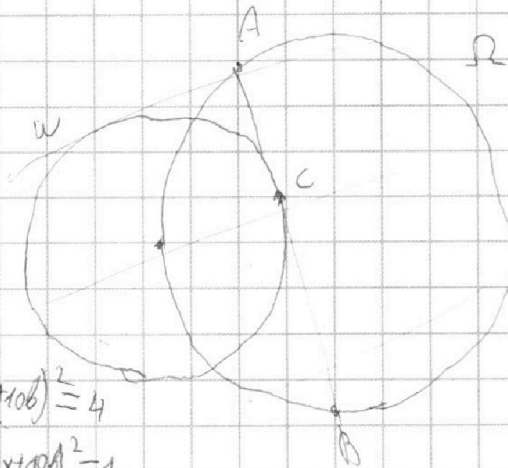
$$g \geq m$$

$$\frac{a}{b} \quad (a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$a+b : m$$

$$a^2 - 6ab + b^2 : m$$



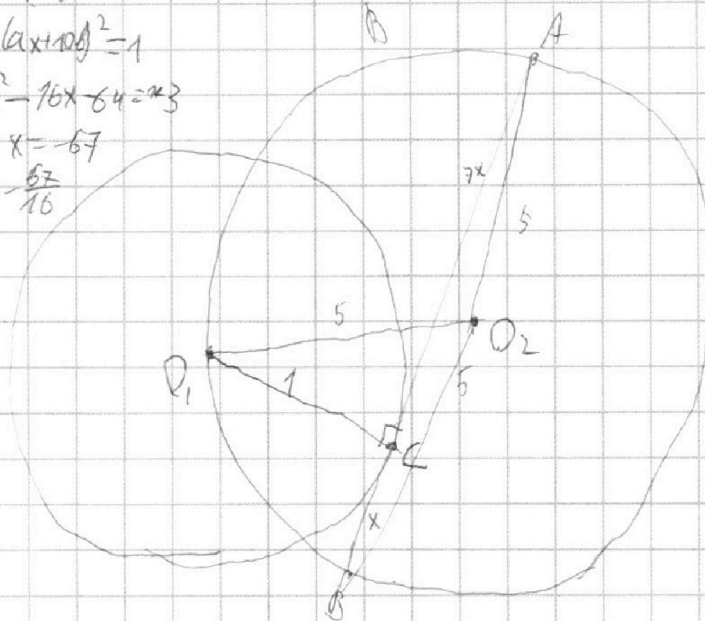
$$\begin{cases} x^2 + (ax+10b)^2 = 4 \\ (x+5)^2 + (ax+10b)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (ax+10b)^2 = 4 \\ (x+5)^2 + (ax+10b)^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 - x^2 - 16x - 64 = -3$$

$$16x = -67$$

$$x = -\frac{67}{16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$D=25-4=1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$D=98$$

$$2x^2=5x+1$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = 2-7x + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$(3/5) \cdot 24$$

$$D = 849x^2 - 21x + 2 + (4-14x)\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2x^2-5x+3 + 2x^2+2x+1 - 2\sqrt{4x^4+4x^3+2x^2} = 4-28x+49x^2$$

$$2\sqrt{4x^4-6x^3-2x^2+x+3} = -45x^2 + 25x$$

$$4x^4 - 24x^3 - 8x^2 + 4x + 12 = 625x^2 - 2025x^4 - 2250x^3$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 634x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} \geq \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2x^2-5x+3 \geq 2x^2+2x+1 \geq 0$$

$$-7x+2 \geq 0$$

$$2-7x \geq 0$$

$$x \leq \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$x^2 = 2-7x$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2-2x-1 = 2-7x$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2x^2-5x+3 - (2x^2+2x+1)$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} - 1 = 0$$

$$a-b = a^2-b^2$$

$$(a-b)(a+b) - (a-b) = 0$$

$$(a-b)(a+b-1) = 0$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$