



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}, bc: 2^{17} \cdot 7^{18}, ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\Rightarrow a \cdot c \cdot b^2: 2^{32} \cdot 7^{29}$$

Т.к. $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ в может быть не кратно ни 2 ни 7. Тогда наименьшее возможное $b = 1$

$$\text{Значит } abc = ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow \text{наименьшее } abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

Пример:

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11}, c =$$

Т.к. $ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$ в может быть не кратно 4.

$$ac \cdot b^2 \geq 2^{32} \cdot 7^{39}$$

$$ac \cdot b \geq \frac{2^{32} \cdot 7^{39}}{b}$$

\Rightarrow чтобы abc было наименьшим в дроби быть наименьшим

$$ab \cdot bc \cdot ca: 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$28 \cdot 2 \geq 55, \text{ но } 27 \cdot 2 < 55 \Rightarrow$$

$$abc: 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\text{но } ac: 7^{39} \Rightarrow abc: 7^{39}$$

$$abc: 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39} - \text{минимально}$$

Пример:

$$a = 2^{11} \cdot 7^{11}, b = 2^4, c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2} = \frac{a+b}{(a^2 + 2ab + b^2) - 6ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 4ab}$$

$$a+b \div m \Rightarrow (a+b)^2 \div m$$

$$(a+b)^2 - 4ab \div m \Rightarrow 4ab \div m$$

Если a и m не взаимнопросты, то b и a тоже не взаимнопросты, т.к. $\frac{a+b}{m} \div m$,
если b и a будут взаимнопросты, то $a+b \div r$, где r - общий множитель a и m . Значит $\frac{a}{r}$ - сократима, \Rightarrow т.к. такого не может быть, a и m взаимнопросты.

Значит $4 \div m \Rightarrow 4 \geq m \Rightarrow m=4$ - максимум.

Пример: $a=4, b=5$

$$\frac{4+5}{16+25-40} = \frac{9}{-9} \text{ - сократим на } 9.$$

Ответ: $m=9$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

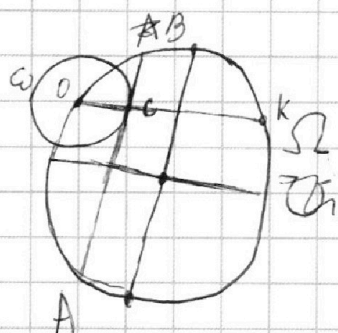
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Радиус OC из центра окружности $\omega \perp BA$ по свойству касательной.

Продлим OC до пересечения с Ω

~~Построим дугу~~

$\angle OBC = \angle OCA$ т.к. они равны на оси дуги.

$$\angle BCO = \angle KCA = 90^\circ \Rightarrow \Delta OCB \sim \Delta ACK \Rightarrow \frac{BC}{OC} = \frac{CK}{CA}$$

$$CK = \frac{17 AB^2}{242}$$

т.к. $OC \perp AB$

$$\frac{OC}{OA} = \frac{7}{17}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Заметим, что $(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = 1 - 9x$

Положим: $t = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$, $p = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$, $t \geq 0$, $p \geq 0$

Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{t^2} - \sqrt{p^2} = \frac{p^2 - t^2}{2}$$

$$t - p = t^2 - p^2$$

$$t(t-1) = p(p-1)$$

① $t = p$
 $3x^2 - 1 - 9x = 0$
 $x = \frac{1}{9}$

② допустим $p > t \Rightarrow p-1 > t-1$, если $t-1 \geq 1$, то $p(p-1) > t(t-1)$
если $t < 1$, $p > 1$

$p(p-1) > t(t-1)$
если $0 < t < 1$, $0 < p < 1$
 $p(p-1) > t(t-1) < 0$

если $0 < t < 1$, $0 < p < 1$
то чтобы $p(p-1) = t(t-1)$ $p = 1-t$, $p = t-1-p \Rightarrow t+p=1$

$$(t+p)^2 = 1$$
$$t^2 + 2tp + p^2 = 1$$
$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = -2tp < 0$$
$$6x^2 - 3x + 2 < 0$$

$D = 9 - 48 < 0$, ветви направлены вверх \Rightarrow решений нет.

если $t=0$
 $p(p-1) = 0 \Rightarrow p-1=0$, т.к. $p > t=0$, $\Rightarrow p=1 \Rightarrow t^2=0, p^2=1$

аналогично, если $t > 0$
 $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 0$
 $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 \pm 82\sqrt{3}}{6} \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow$ решений нет
см. след. шаг

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

аналогично, допустим, что $t > p$,
решение возможно лишь при $p^2 = 0, t^2 = 1,$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 12 = -3 < 0 \Rightarrow \text{решений нет}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

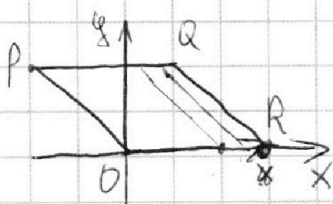
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$PO: y = -2x$$

$$QR: y = -2x + 32$$

$$\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq -2x + 32 \\ y \geq 0 \\ y \leq 26 \end{cases}$$

\Rightarrow условия для точки в пар-ме.

$$y \quad 0 \leq y + 2x \leq 32$$

Т.к. все значения ^{искомые} целочисленные, то $y + 2x$ - целое.

$y_1 + 2x_1 - y_2 - 2x_2 = 14 \Rightarrow$ разность двух целых чисел в интервале $[0, 32]$ \neq равна 14.

$32 - 14 = 8 \Rightarrow$ существует 9 различных пар $(y_2 + 2x_2)$

и $y_1 + 2x_1$ в разности дающих 14.

$$y + 2x = b$$

$y = b - 2x \Rightarrow$ искомые значения лежат на прямой \parallel

сторонам пар-ма. Т.к. b - целое, при $y \in [0, 26]$,

y и x оба будут целыми в 13 точках на прямой $y = b - 2x$.

\Rightarrow 9 пар прямых. В каждой паре прямых можем выбрать 1 из 13 точек на одной и 1 из 13 на другой $\Rightarrow 13^2$ точек. можем выбрать между парой прямых $\Rightarrow 9 \cdot 13^2$ точек.

Ответ: $9 \cdot 13^2$ точек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

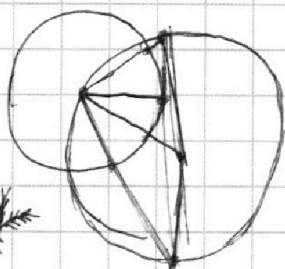
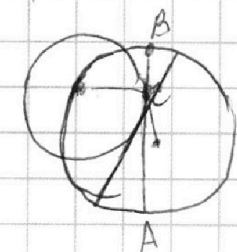
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

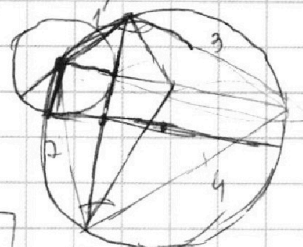
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c, ab; 2^{15}, 7^{11}$ $bc; 2^{17}, 7^{18}$, $ac; 2^{23}, 7^{39}$

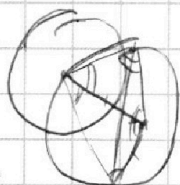
① $b^2, ac; 2^{22}, 7^{29} \Rightarrow b$ может быть вообще не кратно 7 из $2^{23}, 7^{39}$ - наименьшие



$17 + 7 = 24$
 ~~$\frac{49}{24} AB$~~

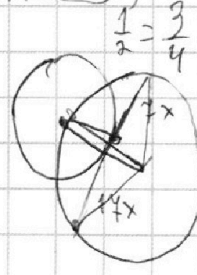


$\sqrt{49 + \frac{49^2}{24^2} AB^2}$



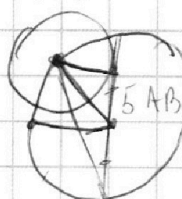
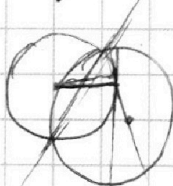
~~1~~

$\frac{49}{24^2} AB^2 = 49 + \frac{49}{24} AB - 49$
 $\sqrt{49 + \frac{196}{24^2} AB}$



$\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ $\frac{1}{3} = \frac{2}{4}$

$180 = 360 - \frac{1}{2}x$
 $360 - x = 2$



$t + p = 21$

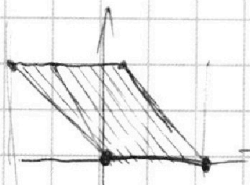
$AB = \frac{13}{k \cdot 13} = k - 1$

$\frac{4}{k \cdot 13} = \frac{(1-k) \cdot 13}{4}$

$O(0;0)$

$P(-13;26)$ $Q(3;26)$ $R(16;0)$

$49 = 13^2$ $6x^2 - 3x + 2 = -$
 $\frac{49}{13^2}$ $D = 36 - 24 = 12$
 $2 \cdot 3$



$\begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq 26 \\ y \geq 0 \\ y \geq -2x \\ y \leq -2x + 32 \end{cases}$

$y + 2x \leq 32$
 $2x \leq 32$
 $x \leq 16$

14 0 32
15 1
16 2
14 3
14 4
19 .

$0 = kx + b$
 $b = 0$
 $26 = k(-13) + 32 \Rightarrow y + 2x \geq 0$
 $32 - 14 = k = -2$
 $0 = -2 \cdot 16 + b$
 $b = +32$

$\frac{1}{24} - \frac{2}{3} + 2$
 $\frac{54 + 1 - 18}{24} =$

$32 - 14 = 8$

$y_1 + 2x_1$ $y_2 + 2x_2$

$y_1 + 2x_1 = 32$

$32 \geq y_1 + 2x_1 \geq 0$
 ~~$32 \geq -y_2 - 2x_2 \geq -32$~~
 $32 \geq -$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = 8b - ax$$

$$x^2 + (8b - ax)^2 - 1$$

$$x^2 + 64b^2 - 16abx + a^2x^2 - 1$$

$$x^2(1+a^2) - 16abx + 64b^2 - 1$$

$$D=0 = 864 \cdot 4a^2b^2 - 4(64b^2-1)(a^2+1) = 64 \cdot 4a^2b^2 - 4 \cdot 64b^2a^2 + 4a^2 - 4 \cdot 64b^2 + 4$$

$$4a^2 - 4 \cdot 64b^2 + 4 = 0$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 = x^2 + a^2x^2 - 2(8b-12)ax + (8b-12)^2 - 16$$

$$D=0 = 4(8b-12)^2a^2 - 4(a^2+1)(8b-12)^2 = 4a^2 \cdot 64b^2 - 2 \cdot 4a^2 \cdot 12 \cdot 8b +$$

$$4 \cdot 144 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 \cdot 864 + 4(8b-12)^2(a^2+1) + 4(a^2+1)16$$

$$= 4(8b-12)^2 + 4a^2 \cdot 16 + 4 \cdot 16 = 4 \cdot 8b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 12b + 4 \cdot 3^2 + 4a^2 \cdot 16 + 4 \cdot 16 = 0$$

$$24 \cdot 8^2 b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 12b + 4^2 \cdot 3^2 + 4a^2 \cdot 16 + 4 \cdot 16 = 0$$

$$4b^2 - 12b$$

$$x \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1 - 18x + 9x^2$$

$$6x^2 - 3x + 2 + 18x - 9x^2 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

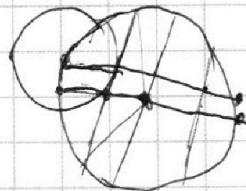
$$3x^2 - 6x + 2$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3$$

$$t = 3x$$

$$\sqrt{t^2/3 - 2t + 2} - \sqrt{1/3 t^2 + 3t + 1} = 1 - 3t$$



2

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{a+b}{-9ab}$$

$\frac{a}{b} \cdot m$
 $\frac{b}{a} \cdot m \Rightarrow 9 \frac{a}{b} \cdot m$ 9 - наибольшее

$$\frac{4+5 \cdot 9}{9^2 - 9 \cdot 20} = \frac{1}{2-11}$$

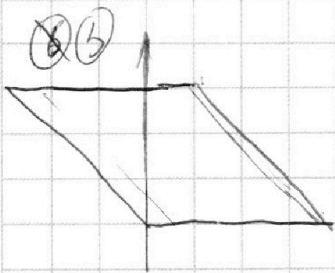
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



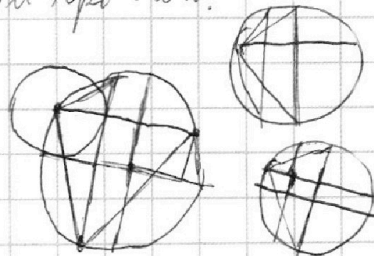
$$y = 2x_1 \times b - 2x_1$$

1, 2, 4, 5, 3

$$x = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} b$$

13 - чисел под каждой прямой.

$$13^2 \cdot 8$$



$$\frac{\pi AB}{24x} = \frac{\pi 24}{14 AB}$$

$$A \quad x = \frac{AB^2 \cdot 14}{24^2}$$

$$R = \frac{26 - AB^2 \cdot \frac{14}{24^2}}{2} = \frac{h}{h}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3(x^2 - 2x + 1)^2 + 1} - \sqrt{3(x+1)^2 + 2 - 3x}$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 + 3x + 1 = 1 - 9x$$

$$\sqrt{t} - \sqrt{p} = t - p$$

$$t - 2\sqrt{pt} + p = t - p$$

$$2p = +2\sqrt{pt}$$

$$4p^2 = pt$$

$$p = t \quad \text{или} \quad p = 0$$

$$t - 2\sqrt{pt} + p = t^2 - 2pt$$

$$\frac{AB}{BK} = \frac{Ac}{BC - BK}$$

$$\frac{TK}{AT} = \frac{BK}{AB} = \frac{BC - BK}{AC}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = -3$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$1 - 9x = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$y = 8b - ax$$

$$t > p \Rightarrow t - 1 > p - 1 \quad t - 1 = 0 \quad p = 0 \quad t$$

$$t - 1 \geq 0 \quad * p - 1 \geq 0$$

$$t(t-1) > p(p-1)$$

$$p - 1 \leq 0$$

$$t \cdot p = t^2 - p^2 \Rightarrow t = p$$

$$t(t-p) = p(p-1)$$

иначе стони
то или

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 8b - ax$$

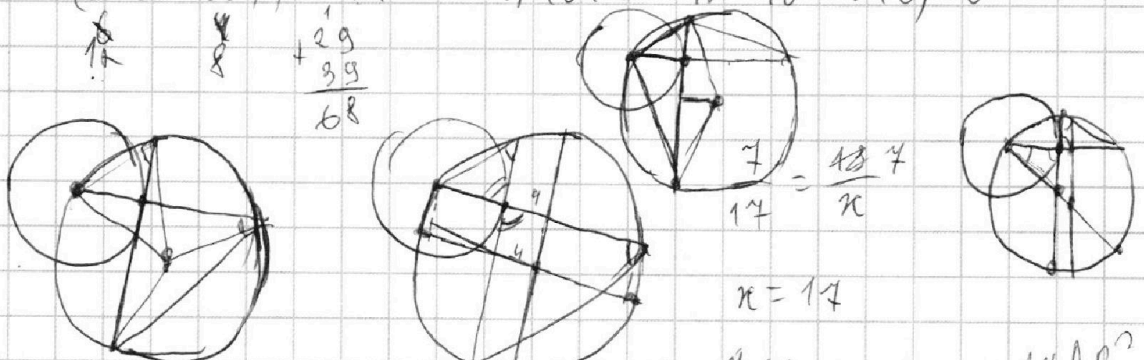
$$x^2 + (8b - ax)^2 - 1 = x^2 + a^2 x^2 - 16abx + 64b^2 - 1$$

$$D = 0 = 16^2 a^2 b^2 - 4 \cdot a^2 b^2 a^4 (64b^2 - 1)(a^2 + 1) = 16a^2 b^2 - 4 \cdot 64 \cdot b^2 a^2 - 4a^2 + 4 \cdot 64b^2 - 4 = 0$$

$$64b^2 - a^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (8b - 12 - ax)^2 - 16 = x^2 + 8^2 b^2 + 12^2 + a^2 x^2 + 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot ax + 2 \cdot 12 \cdot ax - 2 \cdot 12b - 16 = x^2(a^2 + 1) + x(24a - 16ba) + 64b^2 + 12^2 - 16 - 24b$$

$$D = (24a - 16b)^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 + 12^2 - 16 - 24b) = 0$$



$$2R \cdot 32 - 28 = 11$$

$$b = 2^4$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^{11}$$

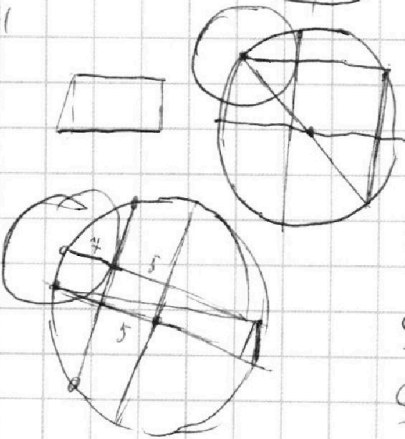
$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$15 + 14 + 23 = 52$$

$$11, 18, 39$$

$$55$$

$$468$$



$$\frac{4 \cdot 24}{4 \cdot 4 AB} = \frac{14}{14}$$

$$\frac{14 AB^2}{24}$$

$$\frac{2 \cdot 24}{26} = \frac{4 \cdot 24}{5 AB} = \frac{4 AB}{24 AB}$$

$$\frac{2 \cdot 24}{2} - 4 = 12 - 4 = 8$$

$$S = \frac{24 + 26}{2} \cdot h$$

$$S_a = \frac{abc}{R}$$

$$\frac{7 AB}{24 R} = \frac{4 \cdot 24 AB}{14}$$

$$\frac{h}{1} = \frac{25}{h}$$

$$h^2 = 25$$

$$h = 5$$

$$p < 1, t < 1$$

$$3x + 3x + 1 < 1$$

$$3x^2 + 3x < 0$$

$$x^2 + x < 0$$

$$x(x+1) < 0$$

$$D = 89$$

$$c = \sqrt{h^2 + R^2}$$

$$b = \sqrt{4h^2 + 25^2}$$

$$\frac{2 \cdot 24 + 26}{2} \cdot h = \frac{(24 + 26)(h^2 + 1)(h^2 + 25^2)}{13}$$

$$p^2 - p \quad t^2 - t$$