МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ \left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

Задача №1

Т.к. $ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$, $bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$, $ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$, $a,b,c \in N$,

То можно записать: $\begin{cases} ab = k\cdot 2^{15}\cdot 7^{11} \\ bc = m\cdot 2^{17}\cdot 7^{18} \\ ac = n\cdot 2^{23}\cdot 7^{33} \end{cases}$, тогда:

$abc = \sqrt{k\cdot 2^{15}\cdot 7^{11}\cdot m\cdot 2^{17}\cdot 7^{18}\cdot n\cdot 2^{23}\cdot 7^{39}} = \sqrt{2kmn}\cdot 2^{27}\cdot 7^{34}$.

если $ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$, а $abc \vdots ab$, то $abc \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$, аналогично $abc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$ и $abc \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$, т.е. $\sqrt{2kmn}\cdot 2^{27}\cdot 7^{34} \vdots 2^{27}\cdot 7^{39}$,

значит если $\sqrt{2kmn} \neq 7^{5}\cdot x$, т.е. степень 7 меньше 5 ~~разложения~~, то $abc \not\vdots 2^{27}\cdot 7^{39}$,

т.е. $\sqrt{2kmn} = 7^{5}\cdot x$, но т.к. $a,b,c \in N$, то $abc \in N$, т.е.

$\sqrt{2kmn} \in N$, т.е. $\begin{cases} k \vdots 2 \\ m \vdots 2 \\ n \vdots 2 \end{cases}$, значит $\sqrt{2kmn} = 7^{5}\cdot 2\cdot y$, где

$y \in N$, ~~тогда~~

Итого $abc = 2^{27}\cdot 7^{34}\cdot 7^{5}\cdot 2\cdot y = 2^{28}\cdot 7^{39}\cdot y \leq 2^{28}\cdot 7^{39}$, т.е.

~~abc — наим~~ наименьшее значение abc равно $2^{28}\cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2.

$\frac{a}{b}$ - не сокращается по условию.

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab-7ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

1) если $a+b \vdots m$, то $(a+b)^2 \vdots m$, значит чтобы дробь можно было сократить ~~на m~~ нужно чтобы $(a+b)^2-9ab \vdots m$, т.к $(a+b)^2 \vdots m$, то $9ab$ обязано делиться на m.

2) если $a \vdots m$, то тогда $\underset{\vdots m}{a}+b \vdots m$, т.е ~~$b \vdots m$~~ если в ~~сумме~~ одно из слагаемых ~~делится~~ делится на какое-то число, то и другое слагаемое обязано делится на это число, в нашем случае b должно делится на m, но тогда $\begin{matrix} a \vdots m \\ b \vdots m \end{matrix}$, т.е $\frac{a}{b}$ -сократима ?, т.е $a \not\vdots m$.

Аналогично $b \not\vdots m$

3) если $9 \not\vdots m$, то т.к $9ab \vdots m$, значит $ab \vdots m$,

получаем $\begin{cases} a+b \vdots m \\ ab \vdots m \end{cases}$, т.е можно записать: $\begin{cases} a+b = n \cdot m \\ a \cdot b = k \cdot m \end{cases}$ =>

$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ \frac{mk}{b}+b = m \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ \underset{\vdots m}{mk}+b^2 = \underset{\vdots m}{m \cdot n \cdot b} \end{cases}$, получается $b^2 \vdots m$,

т.е $b \vdots \sqrt{m}$, а значит ~~т.к~~ если $\underset{\vdots \sqrt{m}}{a}+\underset{\vdots \sqrt{m}}{b} \vdots m$, то $a \vdots \sqrt{m}$

значит $9 \vdots m \Rightarrow m_{max} = 9$

Ответ: 9

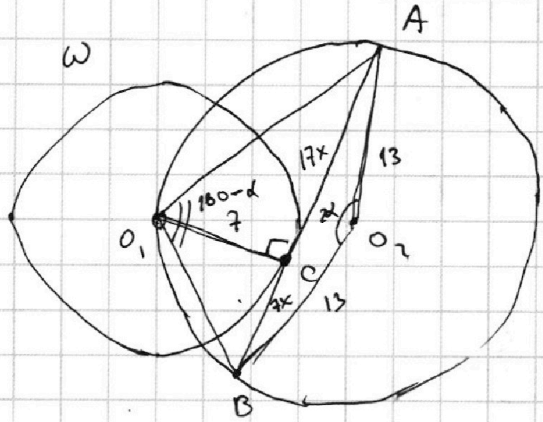
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №3



Дано:

ω, Ω - окружности

O_1 - центр ω

O_2 - центр Ω

$O_1 \in \Omega$

AB - хорда Ω

AB кас. $\omega = C$

$AC : CB = 17 : 7$

$R_1 = 7$

$R_2 = 13$

Найти: AB.

Решение:

1. Т.к AB - касательная к ω, то $O_1C \perp AB$ как радиус, проведённый в точку касания.

2. Пусть $\angle AO_2B = 2\alpha$, тогда $\cup BO_1A = 2\alpha$,

$\cup AB = 360° - 2\alpha$, значит $\angle AO_1B = 180° - \alpha$ как вписанный, опирающийся на эту дугу.

3. Пусть x - коэфф. пропорц., тогда $AC = 17x$, $CB = 7x$

4. По т. Пифагора из $\triangle O_1CA$ ($\angle C = 90°$): $O_1A^2 = O_1C^2 + CA^2$

По т. Пифагора из $\triangle O_1BC$ ($\angle C = 90°$): $O_1B^2 = O_1C^2 + CB^2$

5. $S_{\triangle O_1AB} = \frac{1}{2} O_1C \cdot BA = \frac{1}{2} O_1A \cdot O_1B \cdot \sin\angle BO_1A$

значит $O_1C \cdot BA = O_1A \cdot O_1B \cdot \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{O_1C \cdot AB}{O_1B \cdot O_1A}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

6. По т. косинусов из △ AO_2B:

$$AB^2 = AO_2^2 + BO_2^2 - 2\cdot AO_2\cdot BO_2\cdot \cos 2\alpha$$

$$AB^2 = 2\cdot 13^2 - 2\cdot 13^2\cdot(1-2\sin^2\alpha)$$

$$AB^2 = 2\cdot 13^2(1-1+2\sin^2\alpha)$$

$$AB^2 = 2^2\cdot 13^2 \sin^2\alpha$$

$$AB^2 = 2^2\cdot 13^2\cdot \frac{O_1C^2\cdot AB^2}{O_1B^2\cdot OA^2}$$

$$1 = 2^2\cdot 13^2\cdot \frac{7^2}{(7^2+(17x)^2)(7^2+(17x)^2)}$$

$$(17^2x^2+7^2)(17^2x^2+7^2) = 2^2\cdot 13^2\cdot 7^2$$

$$17^2\cdot 7^2\cdot x^4 + 17^2\cdot x^2\cdot \cancel{7^2} + 7^2\cdot 7^2\cdot x^2 + 7^2\cdot \cancel{7^2} = 2^2\cdot 13^2\cdot \cancel{7^2}$$

$$289x^4 + (17^2+7^2)x^2 = 2^2\cdot 13^2 - 7^2$$

$$289x^4 + 328x^2 - 627 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} \quad \varnothing \end{array}\right.$$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, т.к. x - коэфф пропорц.

7) $AB = 17x + 7x = 24x = 24\cdot 1 = 24$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №4.

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

$3x^2+3x+1=a$, тогда $3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1-9x+1 =$

$= a + (1-9x)$

$1-9x = b$

Итого получаем: $\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$.

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+b$, возведём в квадрат с последующей проверкой

$a+b = a+2\sqrt{a}b+b^2$

$b = 2\sqrt{a}b+b^2$

$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ 1=2\sqrt{a}+b \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ \sqrt{a}=\sqrt{a} \end{cases} \\ \begin{cases} b=1-2\sqrt{a} \\ \sqrt{a-2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}-2\sqrt{a}+1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1-2\sqrt{a} \\ \sqrt{(\sqrt{a}-1)^2}=1-\sqrt{a} \end{cases} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1-2\sqrt{a} \\ |\sqrt{a}-1|=1-\sqrt{a} \end{cases} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1-2\sqrt{a} \\ \left[\begin{array}{l} a\leq 1 \\ a=1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1-2\sqrt{a} \\ 0\leq a\leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Проверка.

$\begin{cases} b=0 \\ a\ge 0 \end{cases}$; $\cancel{a\ge 0}$ $\sqrt{a}-\sqrt{a}=0$ — верно.

$\begin{cases} b=1-2\sqrt{a} \\ 0\le a\le 1 \end{cases}$ $\quad \sqrt{a-2\sqrt{a}+1}=1-\sqrt{a}$

$\sqrt{(\sqrt{a}-1)^2}=1-\sqrt{a}$

$|\sqrt{a}-1|=1-\sqrt{a}$

$1-\sqrt{a}=1-\sqrt{a}$ — верно

$\begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}$; $\sqrt{2}-\sqrt{1}=1$ — не верно.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-9x=0 \\ \cancel{a\ge 0}\ 3x^2+3x+1\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-9x=1-2\sqrt{3x^2+3x+1} \\ 0\le 3x^2+3x+1\le 1 \end{cases} \end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{1}{9} \\ 3x^2+3x+1\ge 0 \text{ — верно} \end{cases} \\ \begin{cases} 9x=2\sqrt{3x^2+3x+1} \quad (*) \\ 0\le 3x^2+3x+1\le 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(*)$ $\begin{cases} 9x\ge 0 \\ 81x^2=4(3x^2+3x+1) \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge 0 \\ 81x^2=12x^2+12x+4 \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge 0 \\ 69x^2-12x+4=0 \end{cases}$, $D<0$ $\varnothing$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9} \\ \begin{cases} \varnothing \\ 0\le 3x^2+3x+1\le 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x=\frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

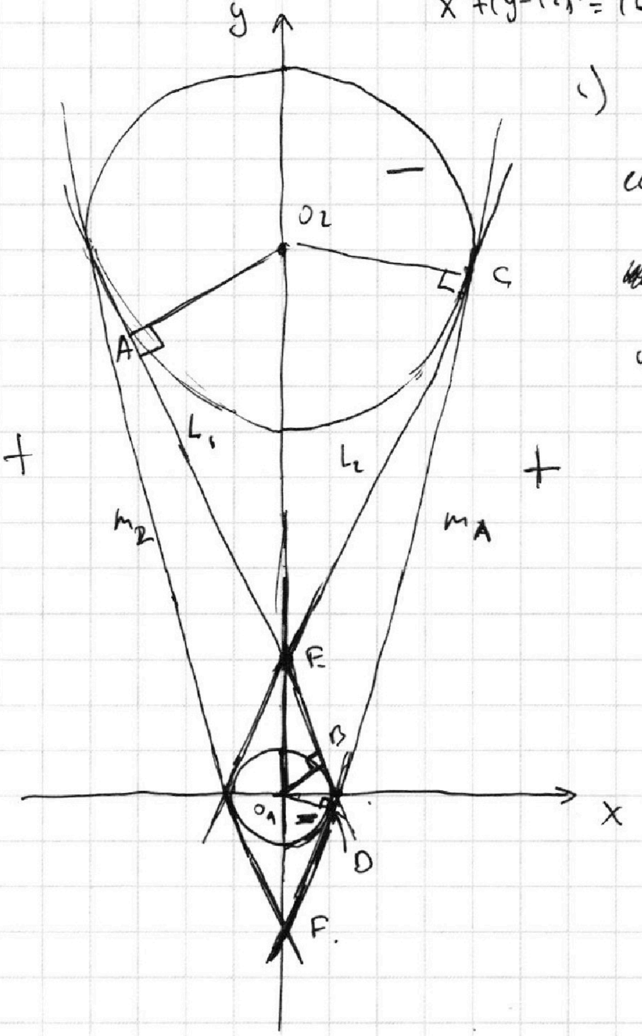
Задача №6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \quad (*) \end{cases}$$

~~Изобразим $ax+y-8b=0$ x^2+y^2-1~~.

(*) Граница: $x^2+y^2=1$ – окр $(\overset{O_1}{(0;0)}; R_1=1)$

$x^2+(y-12)^2=16$ – окр $(\underset{O_2}{(0;12)}; R_2=4)$



1) Неравенство ~~верно~~ только если точки ~~о~~ лежат ~~на~~ внутри или на границе большей или меньшей окружности, тогда система будет иметь ровно 2 решения тогда, когда прямая $ax+y-8b=0$ будет касательной обеих окружностей.

2) Пусть общая касательная к двум окружностям пересекает линию центров между двумя окр в точке E. ($E \in O_1O_2$)

3) Тогда ~~...~~ в рассм. одну из двух наших касательных

допустим L_1: $L_1 \cap Окр(O_2; R_2) = A$, тогда
$L_1 \cap Окр(O_1; R_1) = B$

$O_2A \perp L_1$ и $O_1B \perp L_1$ как радиусы, проведённые в точку касания

4) $\triangle O_2AE \sim \triangle O_1BE$ по двум углам, т.к

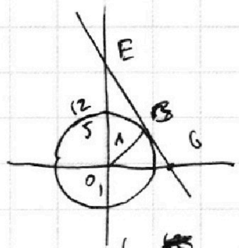
$\angle A = \angle B = 90^\circ$ и $\angle AEO_2 = BEO_1$ как вертикальные,

тогда $\frac{O_2E}{O_1E} = \frac{O_2A}{O_1B} = \frac{4}{1} \Rightarrow O_2E = 4O_1E$ и

$O_2E + O_1E = 12$, т.е $O_1E + 4O_1E = 12 \Rightarrow O_1E = \frac{12}{5}$,

т.е $E\left(0; \frac{12}{5}\right)$

5) $E \in L_1$, т.е $a \cdot 0 + \frac{12}{5} - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{12}{5 \cdot 8} = \frac{3}{5 \cdot 2} = 0,3$.

6) 

Пусть $L_1 \cap Ox = G$, тогда.

По т. Пифагора $EG^2 = O_1G^2 + O_1E^2$

$S_{\triangle O_1EG} = \frac{1}{2} O_1E \cdot O_1G = \frac{1}{2} \cdot \underset{1}{O_1B} \cdot EG \Rightarrow EG = O_1E \cdot O_1G$

$O_1E^2 \cdot O_1G^2 = O_1E^2 + O_1G^2 \Rightarrow \frac{12^2}{5^2} \cdot O_1G^2 = \frac{12^2}{5^2} + O_1G^2 \Rightarrow$

~~т.е $(O_1E \cdot O_1G)^2 = O_1G^2 + O_1E^2 \Rightarrow 1 = 2O_1G \cdot O_1E \Rightarrow O_1G = \frac{1}{2O_1E} = \frac{1}{2 \cdot 0,3} = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$~~

$\Rightarrow \frac{12^2 - 1}{5^2} O_1G^2 = \frac{12^2}{5^2} \Rightarrow O_1G = \sqrt{\frac{144}{143}} = \frac{12}{\sqrt{143}}$

7) $G \in L_1$ значит $a \cdot \frac{12}{\sqrt{143}} + 0 - 8 \cdot \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow a = \frac{12}{5} : \frac{12}{\sqrt{143}} = \frac{\sqrt{143}}{5}$

8) ~~Так~~ Рассматривая вторую касат L_2 ~~...~~ мы видим что L_1 и L_2 – симметр. отн. Oy

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а значит a в этом ~~сл~~ случае будет равно $-\frac{\sqrt{143}}{5}$.

9) Рассм. касательные m_1 и m_2, которые пересекаются за пределами отрезка, соединяющего середины окружностей, т.е. $m_1 \cap m_2 = F$, $F \notin O_1O_2$

~~Тогда пу~~

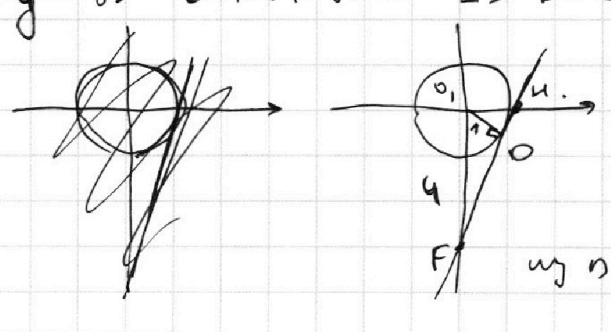
10) Аналогично с ~~касат.~~ l_1 и l_2 рассм. только касательную m_1:

пусть $m_1 \cap Окр(O_2; R_2) = C$, $m_1 \cap Окр(O_1; R_1) = D$.

11) $\triangle FO_2C \sim \triangle FO_1D$ по двум углам, т.к $\angle C = \angle D = 90°$ т.к радиусы, проведённые в ~~точку~~ точки касания перпендикулярны касательной, и $\angle F$ - общий, тогда: $\frac{O_2F}{O_1F} = \frac{O_2C}{O_1D} = \frac{4}{1} \Rightarrow O_2F = 4O_1F$

Также $O_2F - O_1F = 12$, значит $4O_1F - O_1F = 12 \Rightarrow O_1F = 4$, т.е $F(0;4)$, $F \in m_1$, значит

~~$ax+y-8b$~~ $0\cdot x + 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

12.) 

пусть $m_2 \cap Ox = H$, тогда по т. Пифагора из $\triangle FO_1H$: $FH^2 = O_1F^2 + O_1H^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$S_\Delta\ FO_1K = \frac{1}{2} O_1O \cdot FK = \frac{1}{2} O_1F \cdot O_1K$, т.е $FK = O_1F \cdot O_1K$

Получаем: $O_1F^2 \cdot O_1K^2 = O_1F^2 + O_1K^2$

$4^2 \cdot O_1K^2 = 4^2 + O_1K^2 \Rightarrow (4^2-1)\, O_1K^2 = 4^2 \Rightarrow O_1K = \sqrt{\frac{4^2}{4^2-1}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$, т.е $K\left(0; \frac{4}{\sqrt{15}}\right)$

13) $K \in m_1$, значит: $a \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} + 0 - 8 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{15}$.

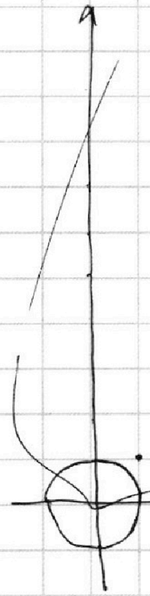
14) Рассматривая касательную m_2 мы получим аналогично l_1 и l_2, что $a = -\sqrt{15}$

Ответ: $a = \pm\frac{\sqrt{143}}{5}$; $a = \pm\sqrt{15}$

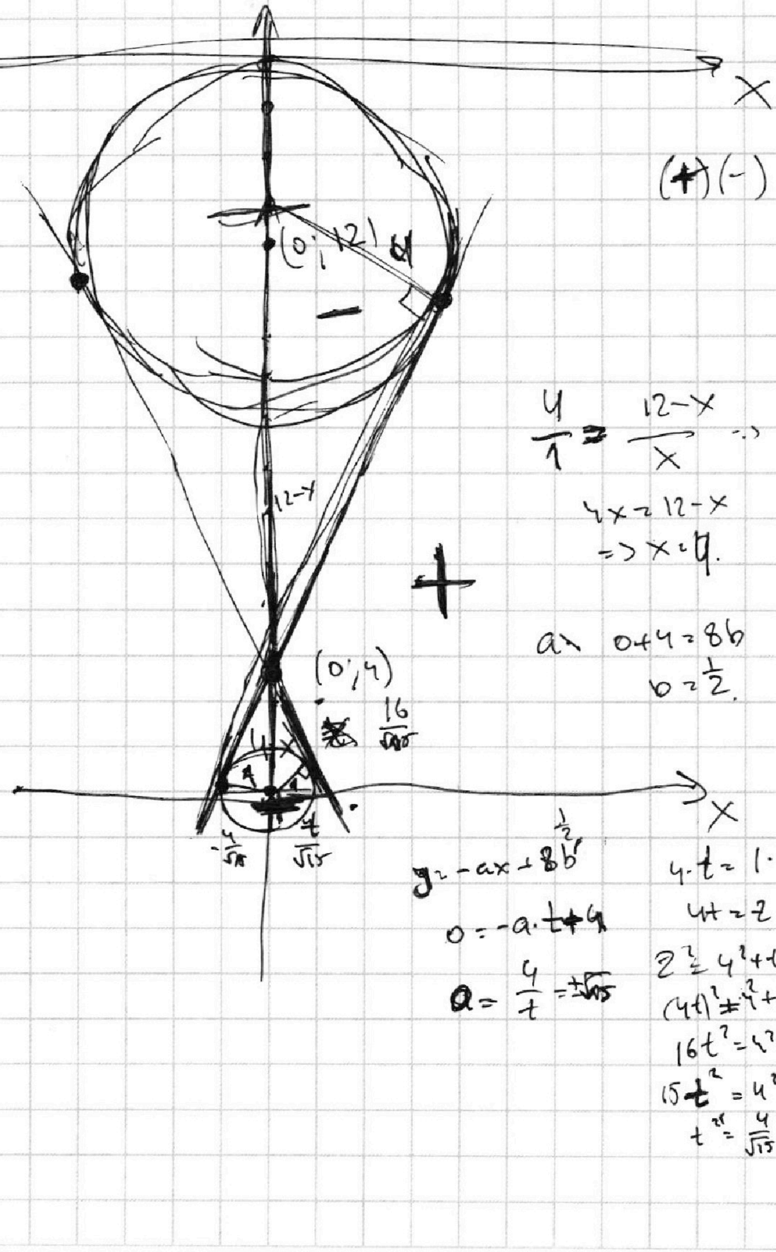
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{8\cdot 3}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$



(+)(-)

$\frac{4}{1} = \frac{12-x}{x} \Rightarrow$

$4x = 12 - x$

$\Rightarrow x = 4.$

+

$a \searrow$ $0 + 4 = 8b$

$b = \frac{1}{2}.$

$y = -ax + 8b^{\frac{1}{2}}$

$0 = -a\cdot t + 4$

$a = \frac{4}{t} = \pm\sqrt{15}$

$4\cdot t = 1\cdot z$

$4t = z$

$z^2 = 4^2 + 1^2$

$(4t)^2 = 4^2 + 1^2 = 0$

$16t^2 = 4^2 + 1^2$

$15t^2 = 4^2$

$t = \frac{4}{\sqrt{15}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3x^2+3x+1=a$ $\qquad (1-9x)=b$

$3x^2-6x+2=t-9x+1=t+(1-9x)$

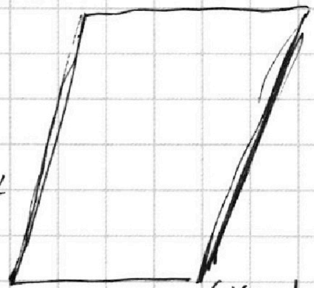
$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+b.$

$a+b=a+2\sqrt{a}b+b^2$

$\sqrt{a+b}-\sqrt{a}=b.$ $\quad \cancel{b}=2\sqrt{a}\cancel{b}+b^2$

$2\sqrt{a}+b=0$

(0,0) (16;0)



(0;0) (16;0)

$\Rightarrow b=-2\sqrt{a}.$

$\sqrt{a-2\sqrt{a}}=\sqrt{a}-2\sqrt{a}$

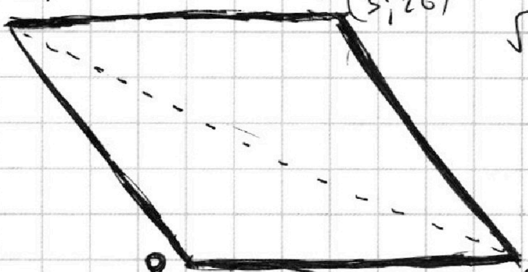
$\underbrace{\sqrt{a-2\sqrt{a}}}_{\geq 0}=\underbrace{-\sqrt{a}}_{\leq 0}$

$a-2\sqrt{a}=a=0$

$\boxed{\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}}$

$81x^2-12x$ ·10

$-\frac{12}{69}$



P (−13;26) Q (3;26) R (16;0) O (0;0)

$b^2+2\sqrt{a}b-b=0$

$b+2\sqrt{a}-1=$

$16+13=29$

$X_2>X_1$

$26^2+29^2\geq 14^2$

$-1\leq X_2-X_1\leq 16$

$2|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=14$

$4\leq y_2-y_1\leq 26$

$a-2\sqrt{a}+1=$

$(\sqrt{a}-1)^2$

$\begin{cases} x_2-x_1=1 \\ y_2-y_1=12 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_2-x_1=3 \\ y_2-y_1=8 \end{cases}$

$\begin{cases} x_2-x_1=2 \\ y_2-y_1=10 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_2-x_1=4 \\ y_2-y_1= \end{cases}$

$81 \times 2 = 162$

$162-54=108$, $108+3=111$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{a}-1=1-\sqrt{a} \\ \sqrt{a}-1=1-\sqrt{a} \end{array}\right.$

$\sqrt{a}-1=\sqrt{a}-1=1-\sqrt{a}$

$\sqrt{a}=1$

$\sqrt{a}\geq 0$

$\sqrt{\frac{3}{81}-\frac{6}{9}+2}-\sqrt{\frac{3}{81}+\frac{3}{9}+1}=0$

$\frac{3}{81}-\frac{54}{81}+\frac{162}{81}$

$(81+27+3)=93.$

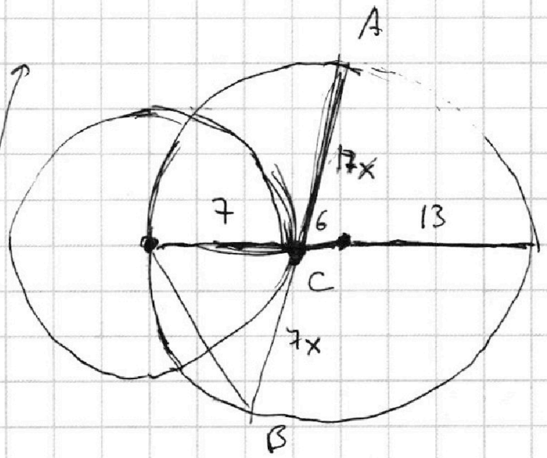
$81+27=108$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{17x}{7x}$

$17x \cdot 7x = x \cdot 19$

$17x^2 = 19$

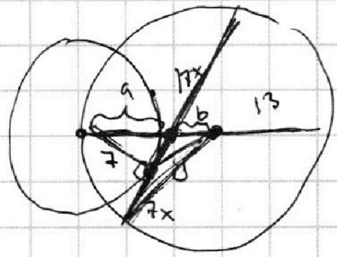
$x = \sqrt{\frac{19}{17}}$

$24x = \boxed{24\sqrt{\frac{19}{17}}}$

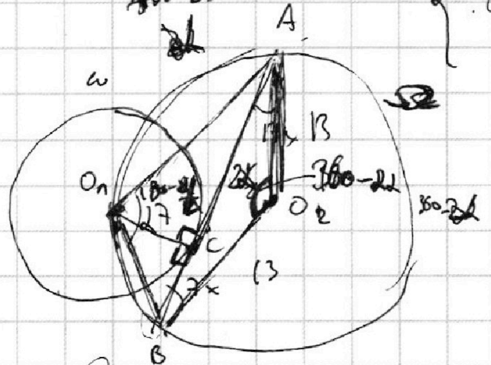
$(7x+y)(17x-y)$

$\cancel{(7x+y)}\,17x = a(13+b)$

$\cancel{a = \sqrt{7^2+y^2}}$



$$\begin{cases} 17\cdot 7x^2 + 10xy - y^2 = a(13+b) \\ a+b = 13 \\ a^2 = 7^2 + y^2 \end{cases}$$



$17x + 7x = 24x$

$(17x)^2 + 7^2 = AO_1^2$

$(7x)^2 + 7^2 = BO_1^2$

$AB^2 = \sqrt{AO_1^2 + BO_1^2 - 2\cdot AO_1 \cdot BO_1 \cdot \cos(180-\gamma)}$

$AB^2 = \sqrt{13^2 + 13^2 - 2\cdot 13\cdot 13\cdot \cos 2\gamma}$

$\cancel{\cos(180-x) = -\sin x}$ $180 - x = \alpha + \beta$

$24x \cdot 7 = \sqrt{(17x)^2+7^2} \cdot \sqrt{(7x)^2+7^2} \cdot \sin\gamma$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin\gamma = \frac{24x\cdot 7}{\sqrt{((17x)^2+7^2)((7x)^2+7^2)}}$

$1 = \frac{2^2\cdot 7^2 \cdot 13^2}{((17x)^2+7^2)((7x)^2+7^2)}$

$(24x)^2 = \left(2\cdot 13^2 - 2\cdot 13^2 \cdot \frac{(24x)^2\cdot 7^2}{((17x)^2+7^2)((7x)^2+7^2)}\right)$

$\frac{(24x)^2}{((17x)^2+7^2)((7x)^2+7^2)} = 2\cdot(24x)^2\cdot 7^2 \cdot 2\cdot 13^2$

$((17x)^2+7^2)((7x^2)+7^2) = 2\cdot 7^2$

$x^2 = t$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$; $a, b, c \in N$

$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$

$ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$

$\frac{54}{2} = 27$

$abc = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39}} = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{kmn2}$

$c = \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}}{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}} = \sqrt{\frac{m \cdot n}{k} \cdot 2^{25} \cdot 7^{46}} = \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot 2}{k}} \cdot 2^{12} \cdot 7^{23}$

$7^5 \cdot 2 \cdot X$

$abc \vdots ac$, то $abc \vdots n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$ т.к. $2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{kmn2} \vdots n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$.

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot X = \boxed{2^{28} \cdot 7^{39}}$

$c = \frac{2^{13} \cdot 7^{28}}{k}$

$\frac{2^{22} \cdot 7^{46}}{k \cdot m} = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$

$b = \frac{7^{0} \cdot 2^{5}}{n}$

$a = \frac{2^{11} \cdot 7^{18}}{m}$

$\frac{a}{b}$ не сократимая

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{\frac{a+b}{m}}{\frac{a^2-7ab+b^2}{m}}$

a - чёт, b - нечёт ; b - нечет, a - чёт ; a - нечет, b - нечет

$a+b = u$

$ab = v$

$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-9ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{u}{u^2-9v}$

$8-2=4$.

$\frac{2+н}{2-н \cdot 2 \cdot н+нч} = \frac{н}{2-2+н} = \frac{н}{2+н} = \frac{н}{ч}$

$5-3=2$.

$\frac{н+н}{н-н \cdot н \cdot н+н} = \frac{2}{н-н+н} = \frac{2}{ч}$.

$9ab \vdots a+b$

$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b} =$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$1 = \frac{2^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2}{(\cancel{10x^2+7x^2}+7^2)(7x^2+7^2)}$

$(17x)^2$

$(17x)^2 =$

$48 + 49 = 98$, $98 \cdot 2 = 196$

$x = 1$.

$(289+49)(7^2+7^2)$

$338 \cdot 98 = 2$

$(17^2x^2+7^2)(7^2x^2+7^2) = 17^2 \cdot 7^2 \cdot x^2 \cdot x^2 + 17^2 \cdot 7^2 \cdot x^2 + 7^2 \cdot 7^2 \cdot x^2 + 7^2 \cdot 7^2 =$

$= 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2$

$17^2 \cdot \cancel{7^2} \cdot x^4 + (17^2+7^2) \cdot \cancel{7^2} \cdot x^2 + 2 \cdot \cancel{7^2} = 2^2 \cdot \cancel{7^2} \cdot 13^2$

$289(x^2)^2 + 338x^2 + 2 = 2 \cdot 13^2$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-9ab} =$

$a+b \equiv m$

$(a+b)^2 \geq 9ab$

$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 \geq ab$

$\frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})} =$

$= \frac{a+b}{}$

$\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a} \cdot b = (\sqrt{a}^2 + \sqrt{b})^2$

a - нч
b - чет.
a - нч.
b - нч.

$\frac{2}{2^2 - n} = \frac{2}{2-n} = \frac{2}{n} \vdots n$.

9

a+b

если $a+b \vdots m$, то $(a+b)^2 \vdots x$
но $a \vdots x$ и ~~b~~ иначе b должн. $\vdots x$, т.е $\frac{a}{b}$ - сокр.

$(a+b)^2 \vdots m$ -
$-9ab \vdots m$ иначе

если $9 \not\vdots m$, то $a \cdot b \vdots m$, т.е $a \cdot b \vdots mk$
$a+b \vdots m$ $a+b \vdots m \cdot n$.
$a = \frac{mk}{b}$.
$\frac{mk}{b} + b = m \cdot n$.
$mk + b^2 = b \cdot m \cdot n$
$b^2 \vdots m$.

$a+b \vdots m$
$b \vdots \sqrt{m}$.
$a + \sqrt{m} \cdot x = my$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

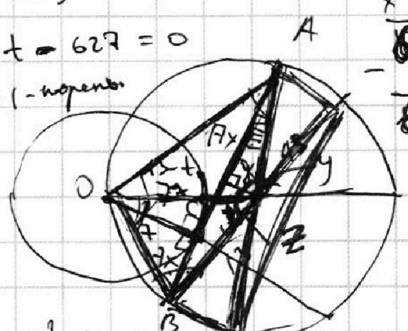
$17^2t^2+(17^2+7^2)t=2^2\cdot13^2-7^2$

$289t^2+338t-627=0$

$t=1$ - корень

$289+338-7$

$169\cdot4=676$, $676-49=627$



$\frac{7}{y}=\frac{13-t}{t}=\frac{13}{t}-1$

$\frac{y}{7}=\frac{t}{13-t} \Rightarrow y=\frac{7t}{13-t}$

$26\cdot26=156+52=676$, $676-49=627$

$(17x)^2-(7x)^2=\cos y-\cos z=$

$=\cos$

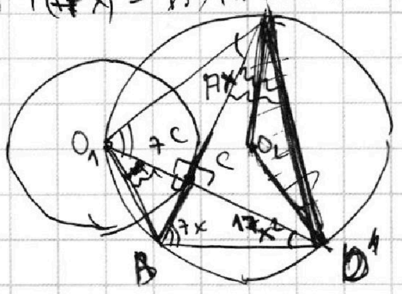
$-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

$AO^2=7^2+(17x)^2=13^2+13^2-2\cdot13\cdot13\cdot\cos y$

$AO^2=7^2+(17x)^2=13^2+13^2-2\cdot13\cdot13\cdot\cos z$

$17x\cdot7x=7\cdot a$

$a=17x^2$



$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{7x}{7}=x$

$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{17x^2}{17}=x$

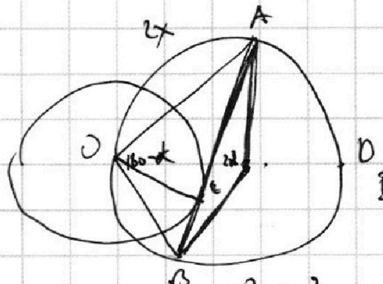
$17\cdot17=289$, $289+49=338$

$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$

$\sqrt{3x^2-6x+2}+9x=\sqrt{3x^2+3x+1}+1$

$\cancel{3x^2}-6x+\cancel{2}+18x\sqrt{3x^2-6x+2}+81x^2=\cancel{3x^2}+3x+\cancel{1}+\sqrt{3x^2+3x+1}+\cancel{1}$

$AB^2=2\cdot13^2-2\cdot13^2\cdot\cos2\alpha$



$180-2x$

$AB\cdot OC=AO\cdot OB\cdot\sin\alpha \Rightarrow$

$\sin\alpha=\frac{AB\cdot OC}{AO\cdot OD} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\frac{AB^2\cdot OC^2}{AO^2\cdot OD^2}$

$AB^2=2\cdot13^2\left(\cancel{1}-\cancel{1}+2\frac{AB^2\cdot OC^2}{AO^2\cdot OD^2}\right)=$

$1=2^2\cdot13^2\cdot\frac{7^2}{((17x)^2+7^2)((7x)^2+7^2)}$

$17^2x^2\cdot7^2\cdot x^2+17x^2\cdot7^2+7^2\cdot7^2x^2+7^2\cdot7^2=2^2\cdot13^2\cdot7^2$

$x^2=t$

$17^2\cdot x^4+(17^2+7^2)x^2+7^2=2^2\cdot13^2$