



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 10

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}.$$

При каком наибольшем t могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на t ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$\text{Т.к. } ab : 2^{15} \cdot 7^{11}; \quad bc : 2^{17} \cdot 7^{18}; \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}; \quad a, b, c \in \mathbb{N},$$

то можно записать:

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \end{cases} \quad \text{тогда:}$$

$$abc \cdot \sqrt{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}} = \sqrt{2kmn} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}.$$

если $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$, то $abc : ab$, т.к. $abc : 2^{15} \cdot 7^{11}$, значит

$$abc : 2^{17} \cdot 7^{18} \quad \text{и} \quad abc : 2^{23} \cdot 7^{39}, \quad \text{т.к. } \sqrt{2kmn} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39} : 2^{17} \cdot 7^{18},$$

значит если $\sqrt{2kmn} \neq 7^5 \cdot x$ ^{т.к. степень 7 нечетная}, то $abc \neq 2^{27} \cdot 7^{39}$,

т.к. $\sqrt{2kmn} = 7^5 \cdot x$, но т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N}$, т.к.

$$\sqrt{2kmn} \in \mathbb{N}, \quad \text{т.к. } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad \text{значит } \sqrt{2kmn} = 7^5 \cdot 2 \cdot y, \quad \text{где}$$

$$y \in \mathbb{N}, \quad \text{тогда}$$

Итак $abc = 2^{27} \cdot 7^{39} \cdot 7^5 \cdot 2 \cdot y = 2^{26} \cdot 7^{35} \cdot 2^5 \cdot y \leq 2^{28} \cdot 7^{39}$, т.к.

~~abc~~ — наименее членное выражение abc равно $2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача № 2.

$\frac{a}{b}$ - не содержитсѧ по условию.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} \geq \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab-7ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

1) если $a+b:m$, то $(a+b)^2:m$, значит тогда

уровень может быть содержанием на m выше уровня

$(a+b)^2-9ab:m$, т.к. $(a+b)^2:m$, т.е. $9ab$ обуславливаеться на m .

2) если $a:m$, то $a+b:m$, т.е. в этом случае

один из чиселов является делителем исключительно

число, т.е. в другое значение обуславливается ар

также число, б) наименее чистое б) общее деление на m , то тогда $\frac{a:m}{b:m}$, т.е. $\frac{a}{b}$ - содержание n , т.е. a/m .

Аналогично $b:m$

3) если g/m , то т.к. $9ab:m$, значит $ab:m$,

получаем $\begin{cases} a+b:m \\ ab:m \end{cases}$, т.е. возможно записать: $\begin{cases} a+b=k \cdot m \\ a \cdot b = l \cdot m \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ \frac{m \cdot k}{b} + b = m \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ nk + b^2 = m \cdot n \cdot b \end{cases}, \text{ получаем } b^2:m,$$

т.е. $b:\sqrt{m}$, а значит ~~так~~

значит $g:m \Rightarrow m_{\max} = g$

Однако: g

если $\begin{cases} a+b:m \\ \sqrt{m}:\sqrt{m} \end{cases}$, то $a:\sqrt{m}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

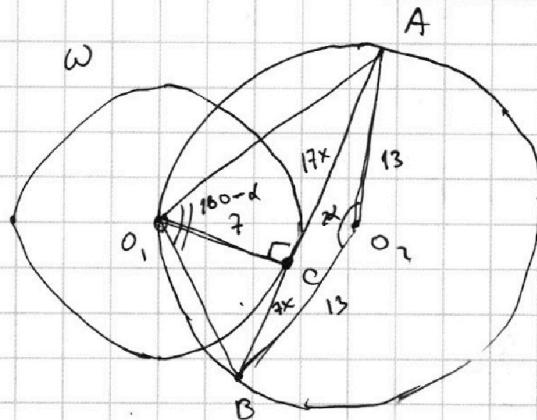


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3



Дано:

ω, Ω - окружности

O_1 - центр ω

O_2 - центр Ω

$O_1 \in \Omega$

AB - хорда Ω

$AB \cap \omega$. $\omega = C$

$AC : CB = 17 : 7$

$$R_1 = 7$$

$$R_2 = 13$$

Найти AB .

Решение:

1. $\text{Пл. к } AB$ - вклиненый в ω , то $OC \perp AB$ каск
радиус, проходящий (наш касание).

2. Пусть $\angle AOB = 2\alpha$, тогда $\angle BOC = 180^\circ - \alpha$ и так как
 $\angle ABC = 360^\circ - 2\alpha$, значит $\angle AOC = 180^\circ - \alpha$ или $\alpha = 90^\circ$,

округлое уравнение на оно же. \Rightarrow

3. Пусть x - искрп. члены., тогда $AC = 17x$, $CB = 7x$

4. По 1. Пирамида $\Rightarrow \triangle O_1CA (\angle C = 90^\circ)$, $O_1A^2 = O_1C^2 + CA^2$

По 1. Пирамида $\Rightarrow \triangle O_1BC (\angle C = 90^\circ)$: $O_1B^2 = O_1C^2 + CB^2$

5. $S_{O_1AB} = \frac{1}{2} O_1C \cdot BA = \frac{1}{2} O_1A \cdot O_1B \cdot \sin \angle O_1A$

значим $O_1C \cdot BA = O_1A \cdot O_1B \cdot \sin \angle \Rightarrow \sin^2 \frac{O_1CA}{O_1B \cdot O_1A}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. Из т. координаты ΔO_1O_2 :

$$AO_1^2 = vO_1^2 + BO_1^2 - 2 \cdot vO_1 \cdot BO_1 \cos 2\alpha$$

$$AO_1^2 = 2^2 + 13^2 - 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$AO_1^2 = 2^2 + 13^2 (1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha)$$

$$AO_1^2 = 2^2 + 13^2 \sin^2 \alpha$$

$$AO_1^2 = 2^2 + 13^2 \cdot \frac{O_1C^2 \cdot AO_2^2}{O_1B^2 \cdot OA^2}$$

$$1 = 2^2 + 13^2 \cdot \frac{7^2}{(7^2 + (7x)^2)(7^2 + (17x)^2)}$$

$$(17x^2 + 7^2)(67x^2 + 7^2) = 2^2 + 13^2 - 7^2$$

$$129x^4 + (17^2 + 7^2)x^2 = 2^2 + 13^2 - 7^2$$

$$229x^4 + 328x^2 - 627 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{229} \end{cases} \quad \text{∅}$$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$, т.к. x -координата прямой.

7) $AB = 17x + 7x = 24x = 24 \cdot 1 = 24$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 9, \text{ тогда } 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1 =$$
$$= 9 + (1 - 9x)$$

$$1 - 9x = b$$

Умножим получаем: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} = b$.

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a+b}$, возведем в квадрат с последующей разностью

$$a+b = a + 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$b = 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$\begin{cases} b=0 \\ 1=2\sqrt{a}+b \end{cases},$$

$$\begin{cases} b=0 \\ \sqrt{a}=\sqrt{a} \\ b=2\sqrt{a}+1-2\sqrt{a} \\ \sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a+2\sqrt{a}+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b=1-2\sqrt{a} \\ \sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a+2\sqrt{a}+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b=1-2\sqrt{a} \\ |\sqrt{a}-1| = 1-\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b=1-2\sqrt{a} \\ \sqrt{a} \leq 1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b=1-2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \\ a=1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пробуем.

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \end{cases}; \text{ если } \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0 \text{ - верно.}$$

$$\begin{cases} b=1-2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \sqrt{a-2\sqrt{a}+1} &= 1-\sqrt{a} \\ \sqrt{(\sqrt{a}-1)^2} &= 1-\sqrt{a} \\ |\sqrt{a}-1| &= 1-\sqrt{a} \\ 1-\sqrt{a} &= 1-\sqrt{a} \text{ - верно} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}; \quad \sqrt{2} - \sqrt{1} = 1 \text{ - не верно:}$$

$$\begin{cases} 1-9x=0 \\ 0 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-9x=1-2\sqrt{3x^2+3x+1} \\ 0 \leq 3x^2+3x+1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x=\frac{1}{9} \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x=2\sqrt{3x^2+3x+1} \quad (*) \\ 0 \leq 3x^2+3x+1 \leq 1 \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} 9x \geq 0 \\ 81x^2=4(3x^2+3x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 81x^2=12x^2+12x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 69x^2-12x+4=0; D \geq 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{9} \\ 0 \leq 3x^2+3x+1 \leq 1 \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{9}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) (x^2 + (y-1)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Изображение $ax + y - 8b = 0$ — $x^2 + y^2 = 1$.

(*) Границы: $x^2 + y^2 = 1$ — окр $(0; 0)$; $R_1 = 1$

$x^2 + (y-1)^2 = 16$ — окр $(0; 1)$; $R_2 = 4$

1) Гиперболы ~~вершины~~ точки

сама точка ~~однозначно~~ однозначно

или на границе

~~либо~~ внутри ^в большей сим

метрической окружности, т.е.

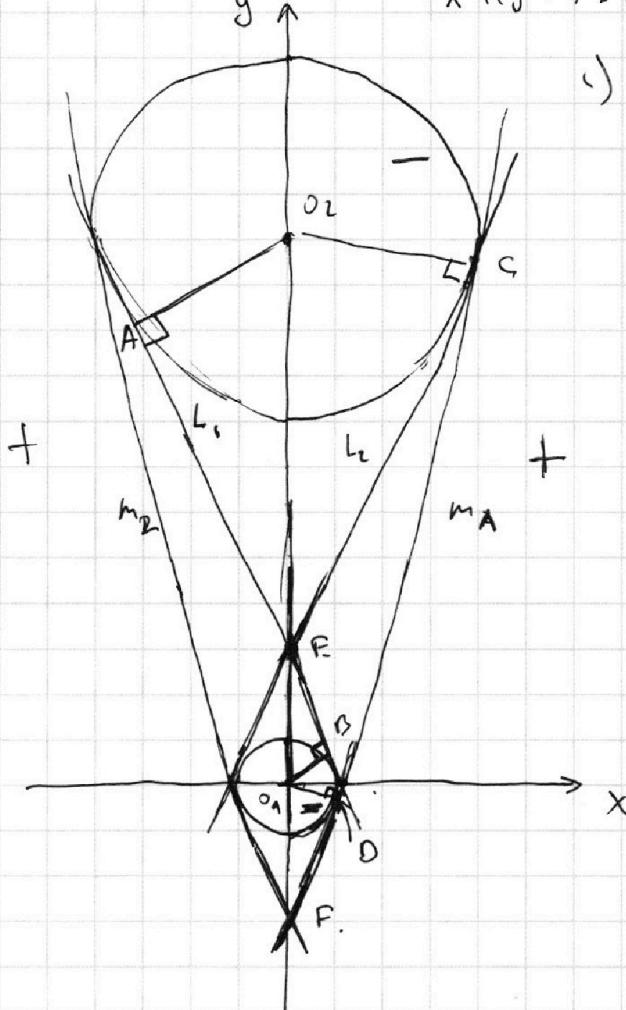
система будет иметь

вершин

ровно 2 решения $\left\{ \begin{array}{l} x_1, y_1 \\ x_2, y_2 \end{array} \right.$

уравнение $ax + y - 8b = 0$ будет

наличие общих вершин.



2) Гиперболы обладают парами и двумя общими вершинами

пересекают линию четвертей между гиперболами

точки E : ($E \in O_1, O_2$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Плана α в рассм. огн. из глуби n таких исключений

$$\text{гипотезы } L_1: \begin{aligned} L_1 \cap O_{1B}(O_2, R_2) &= A \\ L_1 \cap O_{1E}(O_1, R_1) &= B \end{aligned}, \text{ тогда}$$

$O_2A \perp L_1$ и $O_1B \perp L_1$ или радиусы, проведенные в
момент исчезновения

4) $\triangle O_2AE \sim \triangle O_1BE$ по глуби уменьш., т.к.

$\angle A = \angle B = 90^\circ$ и $\angle AEO_2 = \angle BEO_1$ как вертикальные,

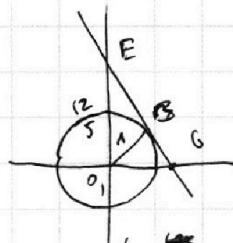
$$\text{тогда } \frac{O_2E}{O_1E} = \frac{O_2A}{O_1B} \Rightarrow \frac{4}{1} \Rightarrow O_2E = 4O_1E \text{ и}$$

$$O_2E + O_1E = 12, \text{ т.к. } O_1E + 4O_1E = n \Rightarrow O_1E = \frac{12}{5},$$

$$\text{т.к. } E(O; \frac{12}{5})$$

$$5) E \in L_1, \text{ т.к. } a \cdot 0 + \frac{12}{5} - b = 0 \Rightarrow b = \frac{12}{5} = \frac{3}{5} \cdot 2 = 0,3.$$

6)



План $L_1 \cap OX = 6$, тогда.

$$\text{До т. плоскости } EG^2 = O_1G^2 + O_2G^2$$

$$\text{т.к. } O_2G = \frac{1}{2} O_2E \cdot O_1G = \frac{1}{2} \cdot O_1B \cdot EG \Rightarrow EG = O_1G + O_2G$$

$$O_1G^2 + O_2G^2 = O_1E^2 + O_2E^2 \Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 + O_2G^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + O_1G^2 \Rightarrow O_2G = \frac{12}{5}$$

$$\text{т.к. } (O_1G + O_2G)^2 = O_1G^2 + O_2G^2 \Rightarrow 1 = 2O_1G \cdot O_2G \Rightarrow O_1G = \frac{1}{O_2G} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \frac{12}{5}} = \frac{1}{O_1G} = \frac{10}{6} \cdot \frac{5}{3}$$

$$7) G \in L_1, \text{ значит } a \cdot \frac{12}{5} + 0 - b \cdot \frac{12}{10} = 0 \Rightarrow a = \frac{12}{5} \cdot \frac{12}{10} = \frac{\sqrt{143}}{5}$$

8) III. Рассматривая вторую исчезн. плоскость L_2 как

ищущую мы $L_1 \cap L_2$ - симметр. осн. Огн.



На одной странице можно оформлять **только** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- № 43

а) значит а б это супер будем равно $\frac{5}{5}$.

г) Расчит. насыщенных m_1 и m_2 , которые пересекаются

всю пружину, определи, соединяющую
среднюю опору между $m_1, m_2 = F$; $F \neq 0$.

тогда

и) Аналогично с балансом b_1 и b_2 расчит. Тогда
насыщенных m_1 :

мысмо $m_1 \cap O_{\text{пр}}(o_2; n_2) = C$, $m_1 \cap O_{\text{пр}}(o_1; n_1) = D$.

ii) $\Delta FO_2C \sim \Delta FO_1D$ по збум умн., т.к.

$\angle C = \angle D = 90^\circ$ т.к. перпендикульры, проходящие в точке

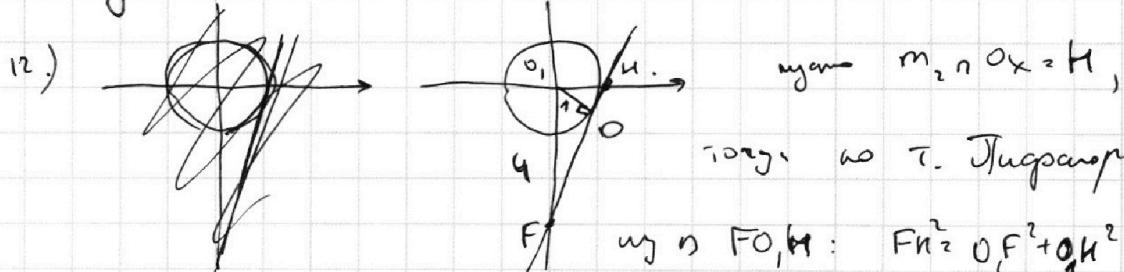
насыщенных перпендикульры расчит. по:

$$\angle F - \text{общий}, \text{тогда}: \frac{o_2F}{O_1F} = \frac{o_2C}{O_1D} = \frac{4}{1} \Rightarrow o_2F = 4O_1F$$

также $O_2F - O_1F = 12$, значит $4O_1F - O_1F = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow O_1F = 4, \text{ т.к. } F(o_1; 4); F \in m_1 \text{ значит}$$

$$O_1x + 4 = 8b \quad O_1x + 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_0 F_{O_1 K} = \frac{1}{2} O_1 D' \cdot F_K = \frac{1}{2} O_1 F \cdot O_1 H, \text{ т.е. } F_K = O_1 F \cdot O_1 H$$

$$\text{Поумните: } O_1 F^2 \cdot O_1 H^2 = O_1 F^2 + O_1 H^2$$

$$4^2 \cdot O_1 H^2 = 4^2 + O_1 H^2 \Rightarrow (4^2 - 1) O_1 H^2 = 4^2 \Rightarrow O_1 H = \sqrt{\frac{4^2}{4^2 - 1}} = \frac{4}{\sqrt{15}}, \text{ т.е.}$$

$\text{и } (0; \frac{4}{\sqrt{15}})$

$$13) \text{ Используем: } a \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} + 0 - 3 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \Rightarrow a = \sqrt{15}.$$

14) Рассматриваем числаительную m_2 и ее вспомогательные

$$l_1, l_2, \text{ это } a = -\sqrt{15}$$

$$\text{Объем: } a_2 = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}; a_1 = \pm \sqrt{15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

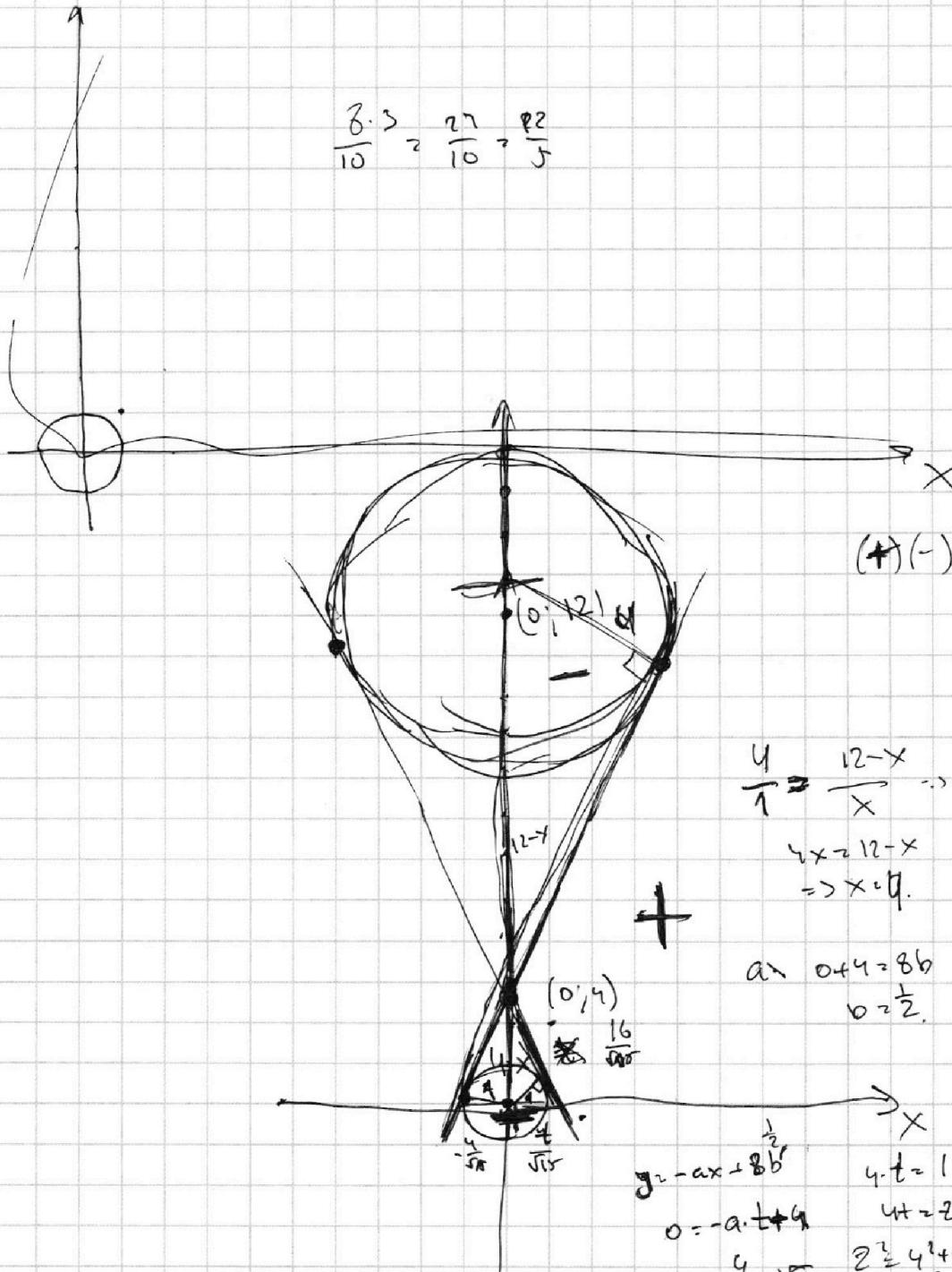
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -a \cdot t + 8$$
$$y = -\frac{4}{t} \cdot t + 8$$
$$y = -4 + 8$$
$$y = 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = t - 9x + 1 \Rightarrow t + (1 - 9x)$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a+b}$$

$$a+b = a + 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \Rightarrow b = 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$(0, 0) \quad (16, 0) \quad (0, 0) \quad (16, 0)$$

$$P(-13, 26)$$

$$Q(3, 26)$$

$$\Rightarrow b = -2\sqrt{a}$$

$$-\frac{81}{64}x^2 - 12x$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a}} - \sqrt{a} - 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$$

$$a-2\sqrt{a} = a = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$b^2 + 2\sqrt{ab} - b = 0$$

$$b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$$

$$16 + 13 = 29$$

$$x_2 > x_1$$

$$x^2 + 2y^2 \geq 14^2$$

$$-11 \leq x_2 - x_1 \leq 16$$

$$-22 \leq y_2 - y_1 \leq 26$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \approx 16$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 2 \\ y_2 - y_1 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 4 \\ y_2 - y_1 = 7 \end{cases}$$

$$a - 2\sqrt{a} + 1 =$$

$$(\sqrt{a} - 1)^2 = \frac{162}{54} = \frac{81}{108}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} - 1 = 1 - \sqrt{a} \\ \sqrt{a} - 1 = 1 - \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\sqrt{a} - 1 = \sqrt{a} - 1 = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} = 1$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1} = 0$$

$$\frac{3}{81} - \frac{54}{81} + \frac{162}{81}$$

$$181 + 27 + 3 = 211.$$

$$\frac{81}{108}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

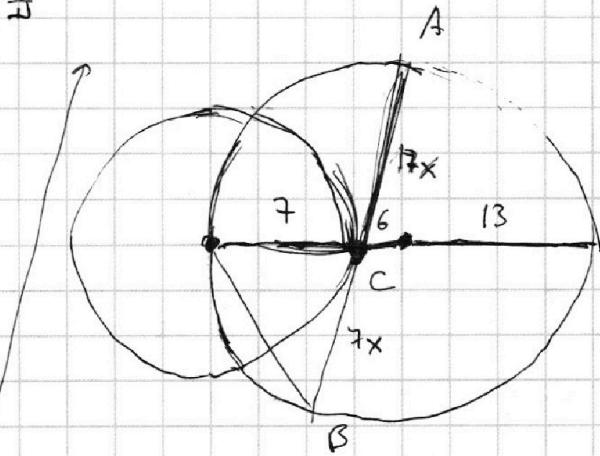


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

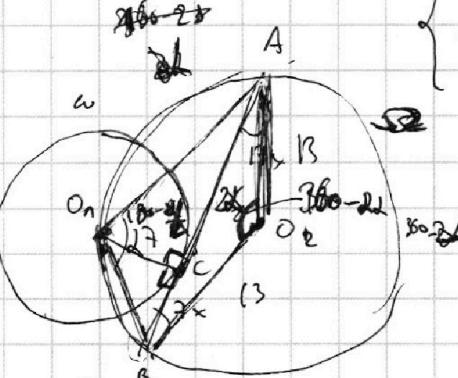
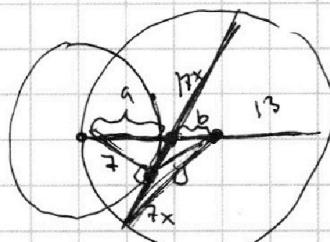
МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

17



$$(24x)^2 = 2 \cdot 124x \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2^{13^2} \cdot \\ ((17x)^2 + 7^2)((7x)^2 + 7^2) = 2 \cdot 7^2$$



$$AB^2 = \sqrt{13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 2x} - \\ \cos(180 - x) = -\sin x \quad 180 - x = 2x \quad \beta$$

$$24x \cdot 7 = \sqrt{(7x)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 7^2} \cdot \sin \beta \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 \beta$$

$$\sin \beta = \frac{24x \cdot 7}{\sqrt{(7x)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{(7x)^2 + 7^2}}$$

$$\frac{17x}{7x} = \\ 17x \cdot 7x = x \cdot 19 \\ 17x^2 = 19 \\ x = \sqrt{\frac{19}{17}} \\ 24x = 24 \sqrt{\frac{19}{17}}$$

$$\frac{17x}{7x}$$

$$17x^2 = 19 \\ x = \sqrt{\frac{19}{17}}$$

$$24x =$$

$$(289t+49)(49t+49) = 2 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 13^2 \\ 17^2 + 7^2 \cdot t + 17t \cdot 7 + 7 \cdot 7t + 7^2 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \\ (17^2 + 7^2)t + (17+7)7t + 7^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \\ 325t^2 + 168t^2 + 168t^2 + 49 \cdot 49 \cdot 169 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \\ 652t^2 + 336t^2 + 336t^2 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2$$

$$(7x+y)(17x-y)$$

$$(7x+y) \cdot 17x = a(13+b)$$

$$a = \sqrt{7^2 + y^2}$$

$$17 \cdot 7^2 + 10xy - y^2 = a(13+b) \\ a+b = 13$$

$$a^2 = 7^2 + y^2$$

$$17^2 + 7^2 + y^2 = 13^2 + y^2$$

$$17x + 7x = \sqrt{24x \cdot \frac{24x}{17}} = \sqrt{17^2}$$

$$(17x)^2 + 7^2 = AO_1^2$$

$$(7x)^2 + 7^2 = BO_1^2$$

$$AO_1^2 = AO_1^2 + BO_1^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot BO_1 \cdot \cos(180 - x)$$

$$AO_1^2$$

$$1 = \frac{2^2 \cdot 7^2 - 13^2}{((17x)^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)}$$

$$2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{(24x)^2 - 7^2}}{(17x^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)} \\ 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &= \frac{15}{k} \cdot 2 \cdot 7 \\ bc &= \frac{17}{m} \cdot 2 \cdot 7 \\ ac &= \frac{11}{n} \cdot 2 \cdot 7 \end{aligned} ; a, b, c \in \mathbb{N}$$

$\frac{84}{2} \cdot 27$

$$abc = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2 \cdot 7} = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{\frac{68}{2}}} = 2^{\frac{27}{2}} \cdot 7^{\frac{34}{2}} \cdot \sqrt{kmn2}$$

$$c_2 \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot 2^{\frac{17}{2}} \cdot 7^{\frac{18}{2}} \cdot 2^{\frac{27}{2}} \cdot 7^{\frac{35}{2}}}{k \cdot 2^{\frac{15}{2}} \cdot 7^{\frac{11}{2}}}} = \sqrt{\frac{m \cdot n}{k} \cdot 2^{\frac{25}{2}} \cdot 7^{\frac{46}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot 2}{k} \cdot 2^{\frac{12}{2}} \cdot 7^{\frac{23}{2}}} \cdot 7^{\frac{5}{2}} \cdot 2 \cdot X$$

$$abc : ac \text{ то } abc : n \cdot 2^{\frac{23}{2}} \cdot 7^{\frac{35}{2}} \text{ т.е. } 2^{\frac{27}{2}} \cdot 7^{\frac{34}{2}} \cdot \sqrt{kmn2} : n \cdot 2^{\frac{23}{2}} \cdot 7^{\frac{35}{2}}$$

$$abc = 2^{\frac{28}{2}} \cdot 7^{\frac{39}{2}} \cdot X = 2^{\frac{28}{2}} \cdot 7^{\frac{39}{2}}$$

$$c = \frac{K}{m \cdot 2^{\frac{25}{2}}}$$

$$b = \frac{n}{2^{\frac{23}{2}} \cdot 7^{\frac{35}{2}}}$$

$$\frac{2^{\frac{22}{2}} \cdot 7^{\frac{46}{2}}}{K \cdot m} = n \cdot 2^{\frac{23}{2}} \cdot 7^{\frac{35}{2}}$$

$\frac{a}{b}$ не единичное.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{\frac{a^2-7ab+b^2}{m}} = \frac{a+b}{\frac{a^2-7ab+b^2}{m}}$$

$$\frac{a-7ab+b^2}{b-7ab} ; \quad \frac{b-7ab}{a-7ab} ; \quad \frac{a-7ab}{b-7ab}$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{4}{v}$$

$$b-2=4.$$

$$\frac{2+h}{2-u \cdot 7 \cdot h + u \cdot u} = \frac{h}{2-2+h} = \frac{h}{2+u} = \frac{h}{h}$$

$$5-3=2.$$

$$\frac{h+h}{h-h \cdot h-h+h} = \frac{2}{h}.$$

$$Jab : a+b$$

$$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b} =$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1 = \frac{z^2 - 7^2 - 13^2}{(10x^2 + 7x^2 + 1^2)(2x^2 + 2^2)}$$

$$(17x^2)^2$$

$$\begin{array}{r} 448 \\ + 448 \\ \hline 996 \\ \times 1 \\ \hline 996 \end{array}$$

$$(289 + 49)(2^2 + 2^2)$$

$$338 \cdot 98 : 2$$

$$(289x^2 + 49)(2x^2 + 2^2) = 17^2 - 7^2 - x^2 \cdot x^2 + 17^2 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 7^2 \cdot 2^2 + x^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 2^2 =$$

$$= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2$$

$$12^2 \cdot 2^2 \cdot x^4 + (17^2 + 7^2) \cdot 2^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2^2 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2$$

$$289(x^2)^2 + 338x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 13^2$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 2ab} = \frac{a+b}{m}$$

$$(a+b)^2 \geq 3ab$$

$$\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 \geq ab$$

$$\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a} \cdot b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\frac{a+b}{(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})} = \frac{a+b}{a+b}$$

$$\frac{2}{2^2 - h} = \frac{2}{2-h} = \frac{2}{n} ; n.$$

a - нр.
b - рн.

$$\frac{2}{2^2 - h} = \frac{2}{2-h} = \frac{2}{n} ; n.$$

9

если $a+b \leq m$, то $(a+b)^2 \leq x$
 $m \leq a+x \leq b+x$ иначе $b > g(m)$. $i \cdot x$ т.е. $\frac{a}{b} - \text{супр.}$

$$(a+b)^2 \leq m -$$

$$- 2ab \leq m \quad \text{where}$$

$$\text{если } g/m, \text{ то } a/b \leq m, \text{ т.е. } a \leq m \cdot b$$

$$a/b \leq m \cdot n$$

$$a \leq m \cdot k$$

$$a/b \leq m \cdot n$$

$$a \leq \frac{m \cdot k}{b}$$

$$\frac{m \cdot k}{b} + b \leq m \cdot n$$

$$m \cdot k + b^2 \leq b \cdot m \cdot n$$

$$b^2 \leq m \cdot n$$

$$a + \sqrt{m} \cdot x = m y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$27^2 t^2 + (17^2 + 7^2) t = 2^2 \cdot 13^2 - 7^2$$

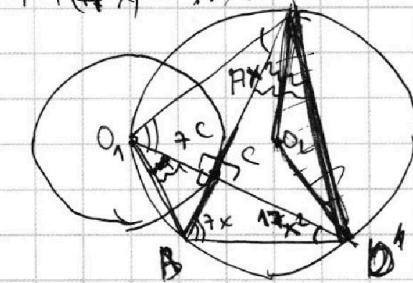
$$289t^2 + 320t - 625 = 0$$

$$\begin{array}{l} t=1-\text{неправ} \\ +239 \\ +338 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$AO =$$

$$7 + (17x)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos Z$$

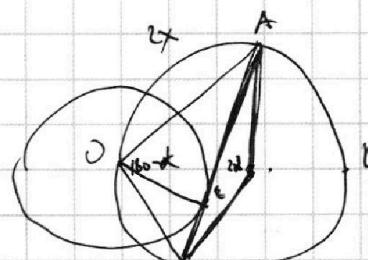
$$r.o^2 = 7^2 + (17x)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos Z$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2 + 16x^2} = 3x^2 + 3x + 1 + 1$$



$$\cos 2d = 1 - 2 \sin^2 d \quad 1 - 2 \frac{\alpha B^2 - OC^2}{\alpha O^2 + OB^2}$$

$$AB^2 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - \frac{\alpha B^2 - OC^2}{\alpha O^2 + OB^2} \right) = 1 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{7^2}{(17x)^2 + 7^2} \cdot ((7x)^2 + 7^2)$$

$$17^2 \cdot x^2 \cdot 7^2 + 17^2 \cdot 7^2 + 7^2 \cdot 7^2 \cdot x^2 + 7^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2 \quad x^2 =$$

$$17^2 \cdot x^4 + (17^2 + 7^2) \cdot x^2 + 7^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 13^2$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 7 \\ \hline 1183 \\ - 169 \\ \hline 827 \end{array}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{13-t}{t} \quad \frac{13}{t} - 1$$

$$827 \cdot \frac{y}{x} = \frac{t}{13-t} \Rightarrow y = \frac{xt}{13-t}$$

$$2^2 / \cos 2 \cos y$$

$$(17x)^2 - (7x)^2 = 605 - \cos Z = \cos S$$

$$-2 \cos \sin x + 3 \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$(\cos T + (-\cos Z)) =$$

$$17x \cdot Ax = A \cdot a$$

$$a = 17x \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \tan \frac{\pi}{8} = \frac{7x}{7} = x \\ \tan \frac{\pi}{12} = \frac{17x}{17} = x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} \\ + \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \hline 3\sqrt{2} \end{array}$$

$$AB^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 2d$$

Arcs

$$AB \cdot OC = AO \cdot OB \cdot \sin d \Rightarrow$$

$$\sin d = \frac{AB \cdot OC}{AO \cdot OB} \Rightarrow$$

=

