



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{11}$
 $ac : 2^{20} \cdot 7^{12} \Rightarrow abc : 2^{20} \cdot 7^{37}$

2. Заметим что наименьшее $abc = 2^{20} \cdot 7^{37} = B$

Пусть b в выводит степень двойки n

тогда a выводит степень двойки $\geq 14 - n$
 c выводит степень двойки $\geq 17 - n$

2. Если $n \geq 5$ (целое число n не может быть меньше 5)
 выводит степень двойки $abc \geq 2^{14-n} \cdot 2^{17-n} \cdot 7^{37} = 2^{31-n} \cdot 7^{37} \geq 2^{31-5} \cdot 7^{37} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Итак $abc : 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $abc : 2^{26} \Rightarrow abc : 2^{26} \cdot 7^{37}$
 $\min(abc) = 2^{26} \cdot 7^{37}$

3. Проверим: $b = 2^5, a = 2^{20} \cdot 7^9, c = 7^{17} \cdot 2^{12}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = 7^{17} \cdot 2^{17}$
 $ac = 7^{37} \cdot 2^{20}$
 $abc = \min(abc) = 7^{37} \cdot 2^{26}$

Ответ: $7^{37} \cdot 2^{26}$

Если $n > 5$, то $abc : 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^n \cdot 7^n = 2^{20+n} \cdot 7^{37+n}$
 $\Rightarrow abc : \min(abc) = 7^{37} \cdot 2^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \div m$$

м.к. a/b несократима

$$a+b \div m$$

$$(a+b)^2 - 8ab \div m \Rightarrow 8ab \div m$$

$$a \div m$$

a и b взаимнопросты (т.к. знаменатель $a+b$ на любой делитель a или b (одно из) не делится, второе не делится \Rightarrow сумма не делится)

Значит: $8ab \div m$ но m взаимнопросто с a и b \Rightarrow несократимые $m = 8$
(иначе $a+b \div m$)

Пример: ~~$a=7, b=3$~~ $a=7, b=3$ $\frac{7}{8} = \frac{14}{8}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{80} = \frac{80}{80^2 - 8 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{80}{4552} = \frac{10}{569}$$

\Rightarrow ответ $\div 8$

Ответ: $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

ЛМФТИ

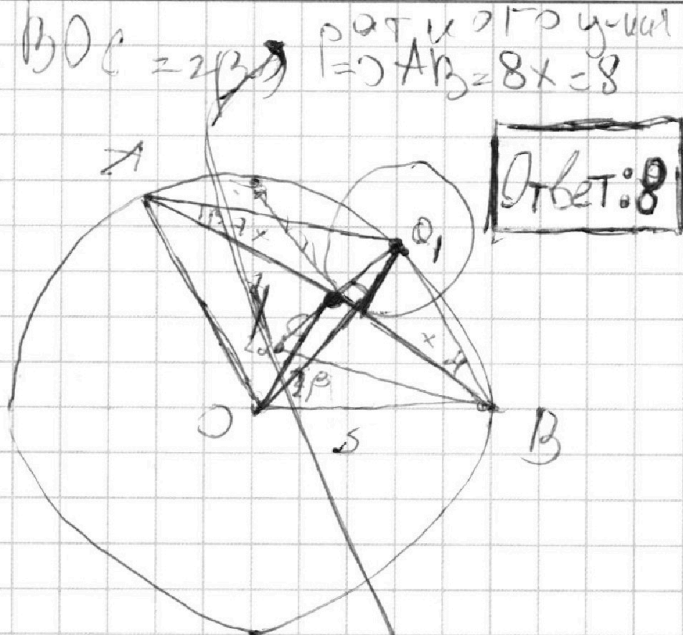
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$ радиусы окружности $\Rightarrow AB = 8x = 8$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA = 90 - \alpha - \beta$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA = \beta$, $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$

— Внешние углы



Отрезали отрезок $CX = O_1C$ на прямой O_1C от точки C

$\angle O_1CB$ углы: 2α , $90 - \alpha$, $90 - \alpha$
(высота BO_1 падает в середину BC)

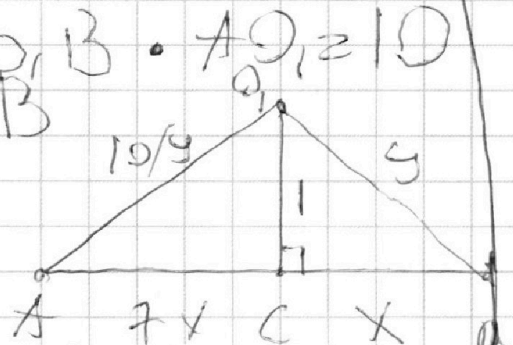
$\angle O_1OA$ углы также 2α , $90 - \alpha$, $90 - \alpha$
(равносторонний $\triangle O_1CB$ и $\triangle O_1OA$)

Тогда $\triangle O_1OA \sim \triangle XO_1B \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{OO_1}{AO_1} = \frac{O_1B}{AO} \Rightarrow \frac{2}{AO_1} = \frac{O_1B}{5}$

Рассмотрим $\triangle AO_1B$ $O_1B \cdot AO_1 = 10$

Пусть $O_1B = y \Rightarrow AO_1 = 10/y$

Тогда $x^2 + 1 = y^2$
 $4 + 4x^2 + 1 = \frac{100}{y^2} = \frac{100}{x^2 + 1}$



$(4 + 4x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100 \Rightarrow x = 1$ (записи в решении кванта)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$1) 2x^2 - 2x + 1 \geq 0 - x \in \mathbb{R}$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0 - x \notin (x_1, x_2)$$

$$2) \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 2 - 7x$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 + 49x^2 + 4 - 28x + 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$(7x - 2)(7x - 3) = 2(2 - 7x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$-7x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$49x^2 - 42x + 9 = 4x^2 - 20x + 12$$

$$45x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 4 \cdot 45 \cdot (-3)}}{82} = \frac{22 \pm \sqrt{-8}}{82} - \text{нет корней}$$

Значит, единственной возможной корень

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{85}{7}} - \sqrt{\frac{85}{7}} = 0 = 2 - 7 \cdot \frac{2}{7}$$

Верно

$x = \frac{2}{7}$ подходит
(можно получить лиш-
ний корень при
возведении в квадрат)

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b \geq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+8)^2 + y^2 - 1} (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2)$$

$$(2): \begin{cases} x^2 + y^2 = 2^2 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1^2 \end{cases}$$

подходит

2 варианта:

1 - касание на границах

2 - (x, y) внутри

одной из областей

(а старшего круга и в это
верно всегда так окруж-
ности не пересекаются)

$$(1): y = ax + 10b$$

$$a = \frac{10b}{0}$$

$$y = 10b$$

имеет либо точку касания
либо не имеет, либо

$$y = ax + 10b$$

$$a \neq 0$$

прямая

Если прямая не пересекает
ни одну из окружностей

- нет решения

\Rightarrow Как касание \Rightarrow прямая - общая
касательная к 2-м окружностям

и y : 1) Проходит через $(2, 0)$ и $(-8, 1)$

$$\Rightarrow y = ax + 10b \Rightarrow 10b = 2$$

$$a = 1/8$$

2) Симметричная ей $a = -1/8$

3) Внутренняя касательная:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Внутренняя касательная (к окружностям O_1 и O_2), вторая симметричная.

• $y = \sqrt{4-x^2} = ax + b = ax + c, c = 10b$

$$4-x^2 = a^2x^2 + 2acx + c^2$$

$$(a^2+1)x^2 + 2acx + (c^2-4) = 0$$

$$D = 4a^2c^2 - 4a^2c^2 + 16a^2 - 4c^2 - 4 = 0$$

$$4a^2 = c^2 - 1$$

$$c = \sqrt{4a^2 - 1}$$

Квадратная формула

• $y = \sqrt{1-(x+8)^2} = ax + c$

$$1-x^2-16x-63 = a^2x^2 + 2acx + c^2$$

$$(a^2+1)x^2 + (2ac+16)x + (c^2+63) = 0$$

$$D = 21a^2c^2 + 256 + 64ac - 4a^2c^2 - 4c^2 - 252a^2 - 252 = 0$$

$$4c^2 + 252a^2 = 64ac + 4$$

$$c^2 + 63a^2 = 16ac + 1$$

$$63a^2 - 16ac + (c^2 - 1) = 0$$

$$63a^2 - 16a\sqrt{4a^2-1} - 2 = 0$$

$$63a^2 - 2 = 16a\sqrt{4a^2-1}$$

$$4489a^4 - 268a^2 + 4 = 1024a^4 - 256a^2$$

$$3049a^4 - 12a^2 + 4 = 0$$

$$a^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 3049}}{2 \cdot 3049} = \frac{12 \pm 112.62}{2 \cdot 3049} = \frac{1}{3049}$$

$$\Rightarrow a = \pm 1/7$$

Ответы: $a = \pm \frac{1}{7}; a = \pm \frac{1}{8}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$100 = 49x^2 + 1 \quad (x^2 + 1) \quad 100$$

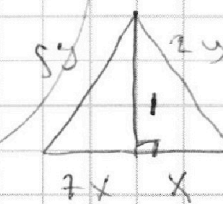
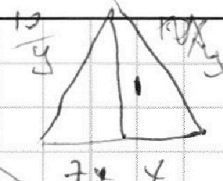
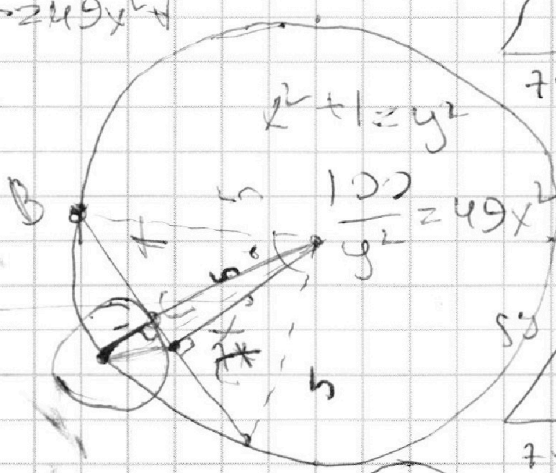
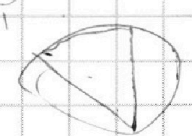
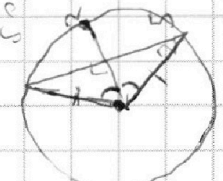
$$100 = 49x^2 + 50x^2 + 1 \quad x^2 + 1$$

$$5^2 + 5^2 = 2 \cdot 25 \cos \alpha$$

$$50(1 - \cos \alpha) =$$

$$25(1 - \cos \alpha) = 25 + 25 \cos \alpha$$

$$= \sqrt{2} \cdot 50 \sin \alpha = 50 \sqrt{2} \sin \alpha$$



$$\frac{21z}{48} + 12y^2 = x^2 + 1 = 4y^2$$

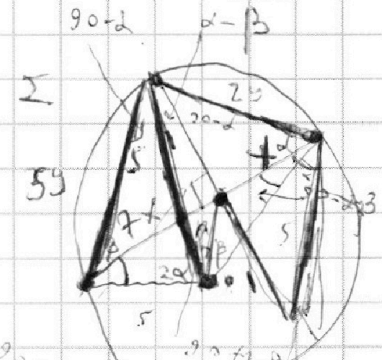
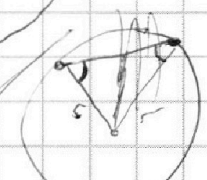
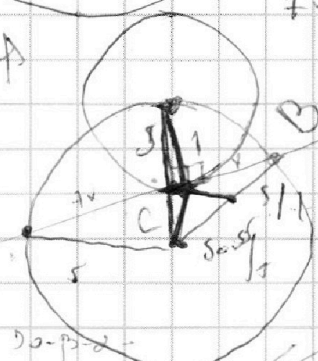
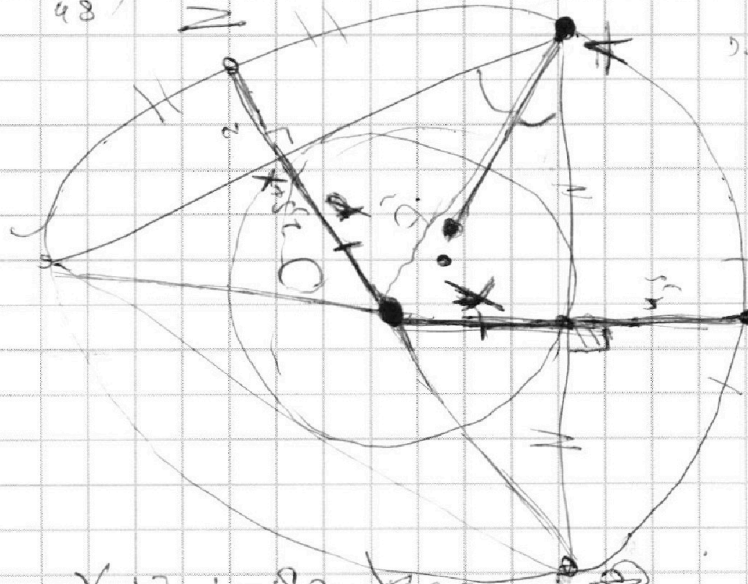
$$49x^2 + 1 = 225y^2$$

$$48x^2 = 21y^2$$

$$\frac{48}{14} = \frac{98}{21}$$

$$\frac{192}{21} = \frac{14}{1}$$

$$12y^2 \cdot \frac{141}{48}$$

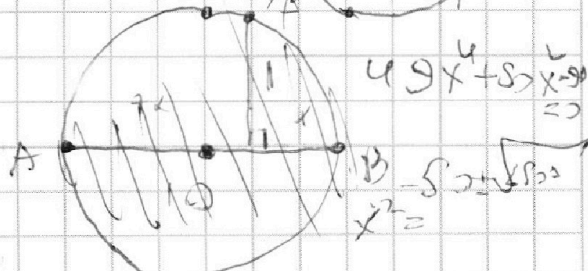


$$\alpha + 2\beta = 180 - \beta - 2\beta$$

$$2\alpha + 2\beta = 180 - 3\beta$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90$$

$$\gamma = 90 - \alpha - \beta$$



$$49x^2 + 50x^2 = 100$$

$$99x^2 = 100$$

$$x^2 = \frac{100}{99}$$

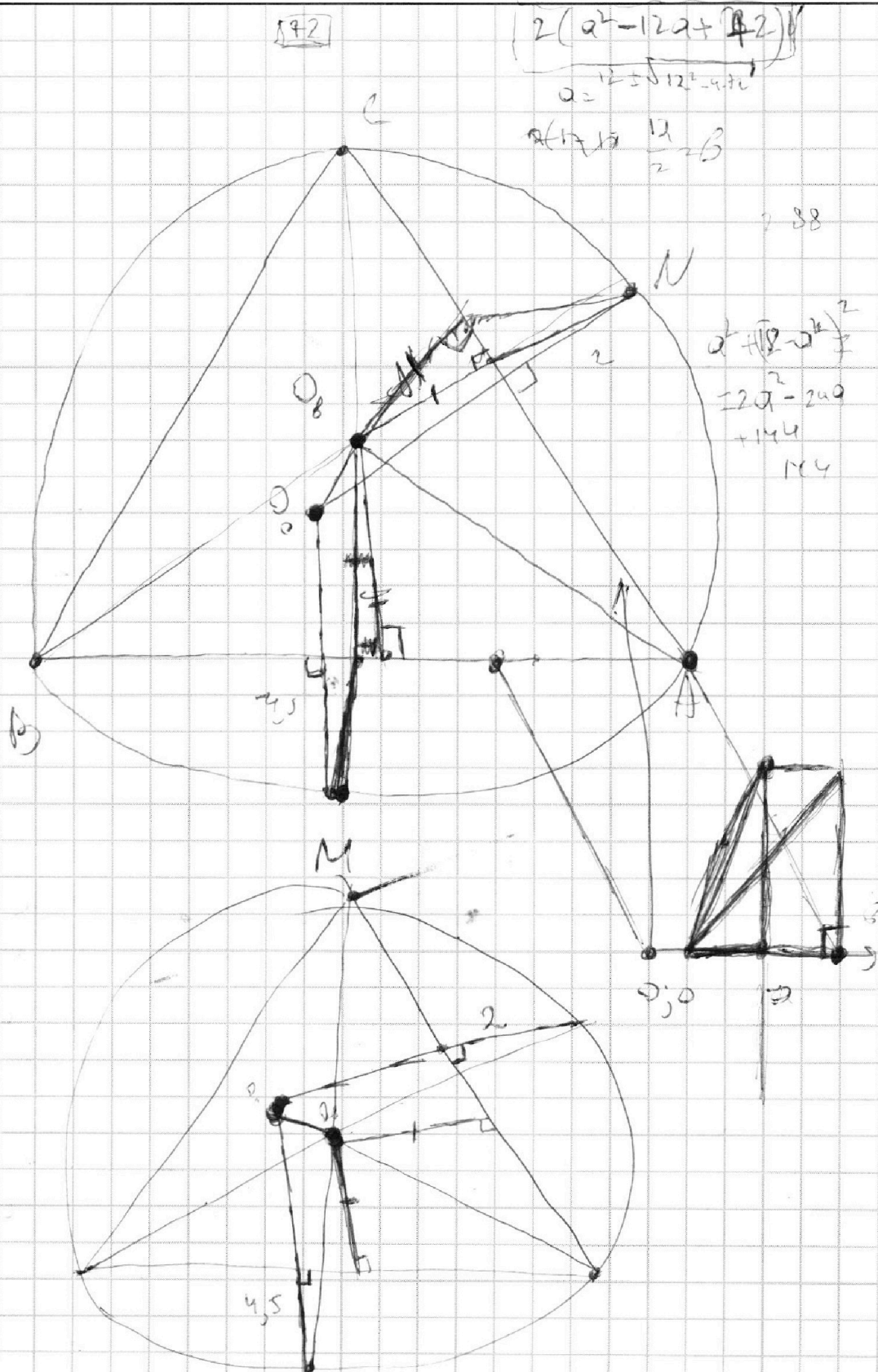


На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

$$((k+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$2a\sqrt{4a^2-1} = 12 + 62(a^2-1)$$

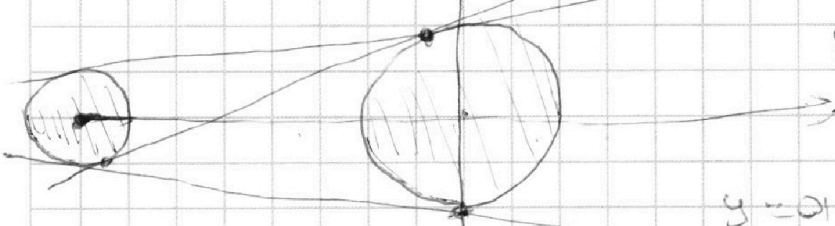
$$a\sqrt{4a^2-1} = -31a^2 + 30$$

$$y = ax + 10b$$

$$1 - x^2 - 6y + 16 = a^2x^2 + 2a\sqrt{4a^2-1}x + 4a^2 - 1$$

$$(a^2+1)x^2 + (2a\sqrt{4a^2-1} + 6)x + 4a^2 - 1 = 0$$

$$8a\sqrt{4a^2-1} + 64 = 4 + 62(a^2-1)$$



$$y = ax + b$$

$$\Delta y = \begin{cases} -24; 24 \end{cases}$$

$$\Delta x = \begin{cases} -26; 26 \end{cases}$$

$$1) b = 2 \quad n(0-n; 15-n)$$

$$1 = -8 \cdot 2 \cdot k(0-k; 15-k)$$

$$8x = 1$$

$$1 = 8x + 2$$

$$a = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{y} \sqrt{1 - (k+8)^2} = a \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$a^2(4a^2-1) = 31a^2 + 30^2$$

- 0; (6-15)
- 1; (0-14)

$$1 - x^2 - 6y + 16x = 0$$

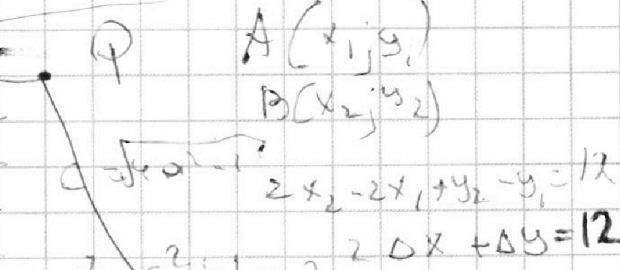
$$2(-1-y^2) \cdot (ax + 10b)$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$(k+8)^2 + y^2 = 1$$

$$4 - x^2 = a^2x^2 + 10a^2y + 20a^2b$$

$$(a^2+1)x^2 + 20a^2x + 4(10a^2b - 1) = 0$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2\Delta x + \Delta y = 12$$

$$4a^2 - c^2 + 1 = 0$$

$$4a^2 = c^2 - 1$$

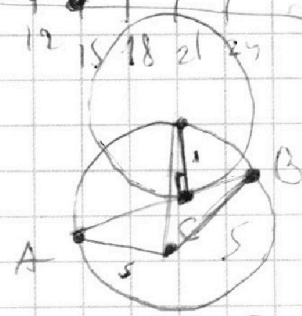
$\Delta C / \Delta B = 1$

$$y = \sqrt{4 - x^2} = ax + b$$

$$4 - x^2 = a^2x^2 + 2axb + b^2$$

$$(a^2+1)x^2 + 2abx + (b^2-4) = 0$$

$$D = 4a^2b^2 - 4(a^2+1)(b^2-4) = 16a^2b^2 - 4a^2b^2 - 4b^2 + 16 = 12a^2b^2 - 4b^2 + 16 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ca: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$c = 2^{17} \cdot 7^{11}$$

$$a = 2^{20} \cdot 7^9$$

$$2^{21} = 2^6 \cdot 4552 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 25 \\ \hline 162 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4552 \\ \times 8 \\ \hline 36416 \end{array}$$

$$\min 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc$$

$$b = 2^n$$

$$a = 2^{14-n}$$

$$c = 2^{17-n}$$

$$31 - 2n = 20$$

$$2n = 11$$

$$n = 5 \cdot 2 + 1$$

$$5 \cdot 3 \cdot 9$$

$$1726$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$1742$$

$$a+b$$

$$a^2 - 6ab + b^2$$

$$a+b$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$a+b$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$8ab$$

$$a+b$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$8ab$$

$$a+b$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$8ab$$

$$a+b$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$8ab$$

$$a+b$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$8ab$$

$$a+b$$

$$\frac{1400}{1848} = \frac{175}{231}$$

$$\frac{175}{231} \cdot 24 = \frac{1400}{1848} \cdot 24 = \frac{1400 \cdot 24}{1848} = \frac{1400 \cdot 2}{154} = \frac{1400}{77} = 18 \frac{2}{7}$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 77 = \frac{1400 \cdot 77}{1848} = \frac{1400 \cdot 7}{154} = \frac{1400}{11} = 127 \frac{3}{11}$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 168 = \frac{1400 \cdot 168}{1848} = \frac{1400 \cdot 14}{154} = \frac{1400}{11} = 127 \frac{3}{11}$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$\frac{1400}{1848} \cdot 1848 = 1400$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1.5 \end{cases}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 2}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$49x^2 - 28x + 4 = 4x^2 - 7x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$45x^2 - 25x = -2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$25x^2(81x^2 - 7x + 25) = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 70x^3 + 25^2 x^2 = 4(4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 3)$$

$$1215x^4 - 1726x^3 + 641x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{20} \quad a+b=19 \quad a+c+b=31$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{17} \quad 7a^2 - 6ab + b^2 = c^2 \Rightarrow 17$$

$$b = 2^6 \quad -8000 = 4200 \quad a+c=20$$

$$-420774983 \quad 48^2 - 5 \cdot 79 - 1 = 1 \quad 20 - n + k = 16 \quad k \geq 8$$

$$= 77 \quad 3 \quad 20 + 2k \geq 31$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Algebraic equations: $x^2 - 10x + 16 = 0$, $x^2 - 10x + 16 = 0$, $x^2 - 10x + 16 = 0$
- Quadratic equations: $4x^2 - 20x + 25 = 0$, $4x^2 - 20x + 25 = 0$
- Linear equations: $2x + 3 = 0$, $2x + 3 = 0$
- Calculus: $y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$, $y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$
- Trigonometry: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Geometry: $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$
- Complex numbers: $z^2 + 1 = 0$, $z^2 + 1 = 0$
- Integration: $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$, $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$
- Differentiation: $\frac{d}{dx} \sqrt{1 - x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\frac{d}{dx} \sqrt{1 - x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

