



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{11}$
 $ac : 2^{20} \cdot 7^{12} \Rightarrow abc : 2^{20} \cdot 7^{37}$

2. Заметим что наименьшее $abc = 2^{20} \cdot 7^{37} = B$

Пусть b в выводит степень двойки n

тогда a выводит степень двойки $\geq 14 - n$
 c выводит степень двойки $\geq 17 - n$

2. Если $n \geq 5$ (целое число n не может быть меньше 5)
 выводит степень двойки $abc \geq 2^{31-n} \geq 2^{31-5} = 2^{26}$

Итак $abc : 2^{20} \cdot 7^{37}$
 $abc : 2^{26}$ $\Rightarrow abc : 2^{26} \cdot 7^{37}$
 $\min(abc) = 2^{26} \cdot 7^{37}$

3. Проверим: $b = 2^5, a = 2^{20} \cdot 7^9, c = 7^{17} \cdot 2^{12}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = 7^{17} \cdot 2^{17}$
 $ac = 7^{37} \cdot 2^{20}$
 $abc = \min(abc) = 7^{37} \cdot 2^{26}$

Ответ: $7^{37} \cdot 2^{26}$

Если $n > 5$, то $abc : 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^n \cdot 7^n = 2^{20+n} \cdot 7^{37+n}$
 $\Rightarrow abc : \min(abc) = 7^{37} \cdot 2^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \div m$$

м.к. a/b несократима

$$a+b \div m$$

$$(a+b)^2 - 8ab \div m \Rightarrow 8ab \div m$$

$$a \div m$$

a и b взаимнопросты (т.к. знаменатель $a+b$ на любой делитель a или b (одно из) не делится, второе не делится \Rightarrow сумма не делится)

Значит: $8ab \div m$ но m взаимнопросто с a и b \Rightarrow несократимые $m = 8$
(иначе $a+b \div m$)

Пример: ~~а=7, в=3~~ $a=7, b=3$ $\frac{7}{8} = \frac{14}{8}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{8}{80} = \frac{80}{80^2 - 8 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{80}{4552} = \frac{10}{569}$$

\Rightarrow ответ $\div 8$

Ответ: $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

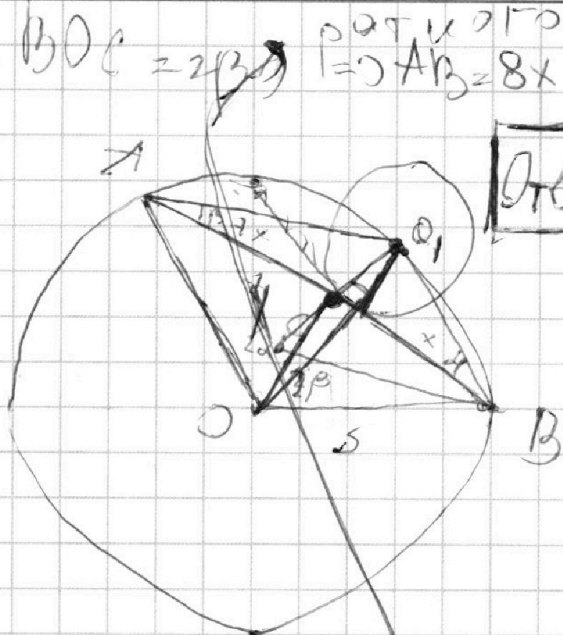
Пусть $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$ радиусы OA и OB равны $\Rightarrow AB = 8x = 8$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA =$
 $= 90 - \alpha - \beta$

Тогда $\angle OAB = \angle OBA =$
 $= \beta$, $\angle OBA =$

$= \angle OOA = \alpha$

- Внешние углы



Ответ: 8

Отрезали отрезок $CX = OC$ на прямой OC от точки C

$BO \times O_1B$ углы: 2α , $90 - \alpha$, $90 - \alpha$
 (высота BO падает в середину BC)

BO_1OA углы тоже 2α , $90 - \alpha$, $90 - \alpha$,
 (равносторонний BO_1A с углом 2α)

Тогда $\triangle O_1OA \sim \triangle XO_1B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{OO_1}{AO_1} = \frac{O_1B}{AO} \Rightarrow \frac{2}{AO_1} = \frac{O_1B}{5}$$

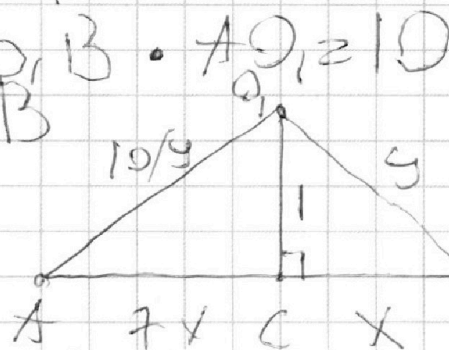
Рассмотрим $\triangle AO_1B$

Пусть $AB = y \Rightarrow AO_1 = 10/y$

Тогда $x^2 + 1 = y^2$

$$4 + 40x^2 + 1 = \frac{100}{y^2} = \frac{100}{x^2 + 1}$$

$$(40x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100 \Rightarrow x = 1$$



(записано решение кода)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

1) $2x^2 - 2x + 1 \geq 0$ — x — любое

$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ — $x \notin (1, 5)$

2) $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 2 - 7x$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 + 49x^2 + 4 - 28x + 2(7x - 2)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$49x^2 - 35x + 6 = 2(7x - 2)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$$(7x - 2)(7x - 3) = 2(7x - 2)\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$$

$x = \frac{2}{7}$

$-7x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}$

$$49x^2 - 42x + 9 = 4x^2 - 20x + 12$$

$$45x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 4 \cdot 45 \cdot (-3)}}{82} = \frac{22 \pm \sqrt{-8}}{82} \text{ — нет корней}$$

Значит, единственной возможной корень

$$\sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} - \sqrt{2 \cdot \frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{85}{7}} - \sqrt{\frac{85}{7}} = 0 = 2 - 7 \cdot \frac{2}{7}$$

Верно

$x = \frac{2}{7}$ подходит
(можно получить лиш-
ний корень и
возводить в квадрат)

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b \geq 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+8)^2 + y^2 - 1} (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2)$$

$$(2): x^2 + y^2 = 2^2 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1^2$$

подходит

2 варианта:

1 - касание на границах

2 - (x, y) внутри

одной из областей

(а сфера имеет дугу и это
верно всегда так окруж-
ности не пересекаются)

$$(1): y = ax + 10b$$

$$a = 10b$$

$$y = 10b$$

имеет либо точку касания
либо не имеет, либо

$$y = ax + 10b$$

$$a \neq 0$$

прямая

Если прямая не пересекает
ни одну из окружностей

- нет решения

\Rightarrow Как касание \Rightarrow прямая - общая
касательная к 2-м окружностям

и y : 1) Проходит через $(2, 0)$ и $(-8, 1)$

$$\Rightarrow y = ax + 10b \Rightarrow 10b = 2$$

$$a = 1/8$$

2) Симметричная ей $a = -1/8$

3) Внутренняя касательная:

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Внутренняя касательная (к эллипсу $4x^2 + y^2 = 4$), вторая симметрична.

$y = \sqrt{4-x^2} = ax + b = ax + c, c = 10b$

$4-x^2 = a^2x^2 + 2acx + c^2$

$(a^2+1)x^2 + 2acx + (c^2-4) = 0$

$D = 4a^2c^2 - 4a^2c^2 + 16a^2 - 4c^2 - 4 = 0$ квадратная формула

$4a^2 = c^2 - 1$

$c = \sqrt{4a^2 - 1}$

$y = \sqrt{1-(x+8)^2} = ax + c$

$1-x^2-16x-63 = a^2x^2 + 2acx + c^2$

$(a^2+1)x^2 + (2ac+16)x + (c^2+63) = 0$

$D = 21a^2c^2 + 256 + 64ac - 4a^2c^2 - 4c^2 - 252a^2 - 252 = 0$

$4c^2 + 252a^2 = 64ac + 4$

$c^2 + 63a^2 = 16ac + 1$

$63a^2 - 16ac + (c^2 - 4)a = 0$

$6 + a^2 - 16a\sqrt{4a^2-1} - 2 = 0$

$6 + a^2 - 2 = 16a\sqrt{4a^2-1}$

$4480a^4 - 2688a^2 + 4 = 1024a^4 - 256a^2$

$3048a^4 - 12a^2 + 4 = 0$

$a^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 3048}}{2 \cdot 3048} = \frac{12 \pm 112}{2 \cdot 3048} = \frac{62}{3048} = \frac{1}{49}$

$\Rightarrow a = \pm 1/7$

Ответ: $a = \pm 1/7; a = \pm 1/8$

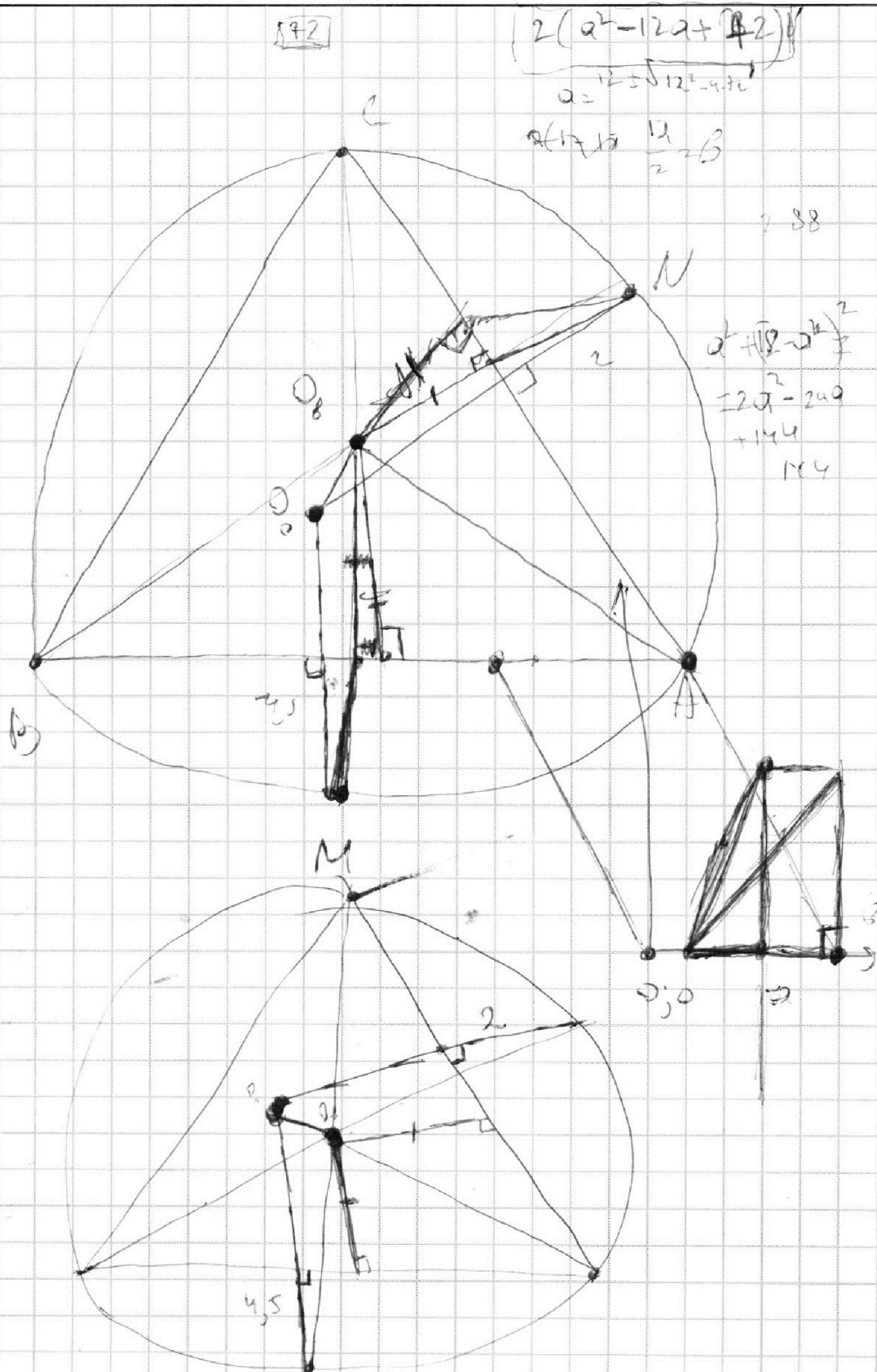


На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

$$((k+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

$$2a\sqrt{4a^2-1} = 12 + 62(a^2-1)$$

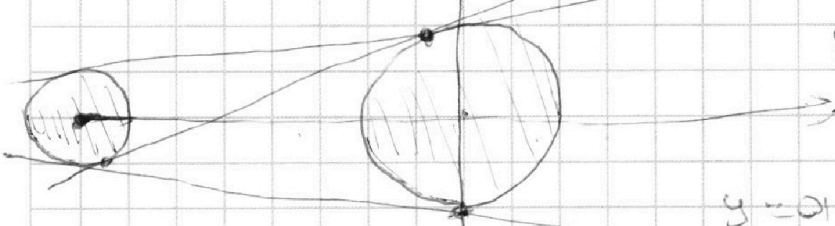
$$a\sqrt{4a^2-1} = -31a^2 + 30$$

$$y = ax + 10b$$

$$1 - x^2 - 6y + 16 = a^2x^2 + 2a\sqrt{4a^2-1}x + 4a^2 - 1$$

$$(a^2+1)x^2 + (2a\sqrt{4a^2-1} + 6)x + 4a^2 - 1 = 0$$

$$8a\sqrt{4a^2-1} + 64 = 4 + 62(a^2-1)$$



$$y = ax + b$$

$$\Delta y = \begin{cases} -24; 24 \end{cases}$$

$$\Delta x = \begin{cases} -26; 26 \end{cases}$$

$$1) b = 2 \quad n(0-n; 15-n)$$

$$1 = -8 \cdot 2 \cdot k(0-k; 15-k)$$

$$8x = 1$$

$$1 = 8x + 2$$

$$x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \sqrt{1 - (x+8)^2} = ax + \frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

$$a^2(4a^2-1) = 31a^2 + 30^2$$

- 0; (6-15)
- 1; (0-14)

$$1 - x^2 - 6y + 16 = 0$$

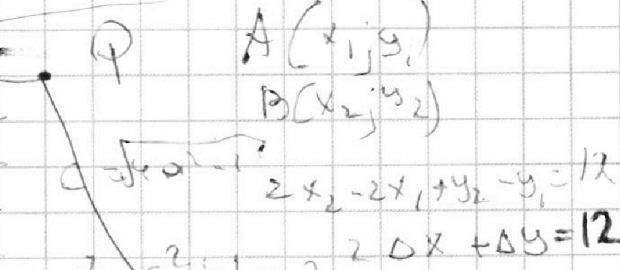
$$2(-1-y^2) \leq ax + 10b$$

$$x^2 + y^2 \geq 4$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$4 - x^2 \geq a^2x^2 + 10ax \Rightarrow 2ax$$

$$(a^2+1)x^2 + 20ax + 4(1-y^2) \leq 0$$



A(x₁, y₁)
B(x₂, y₂)

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2\Delta x + \Delta y = 12$$

$$4a^2 - c^2 + 1 = 0$$

$$4a^2 = c^2 - 1$$

A/C/OB = 1

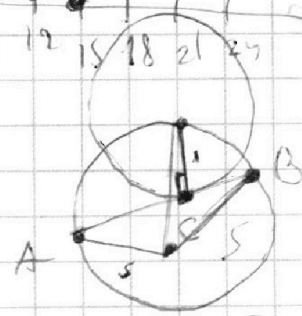
Let's find

$$y = \sqrt{4-x^2} = ax + b \Rightarrow 4a^2c^2 + 16a^2$$

$$4-x^2 =$$

$$D = 4a^2c^2 - 4(a^2+1)(c^2-4) =$$

$$= 16a^2 - 4c^2 + 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$acd: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$c = 2^{17} \cdot 7^{11}$$

$$a = 2^{20} \cdot 7^9$$

$$2^{21} = 2^6 \cdot 4552 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 25 \\ \hline 162 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4552 \\ \times 8 \\ \hline 36416 \end{array}$$

$$\min 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc$$

$$b = 2^n$$

$$a = 2^{14-n}$$

$$c = 2^{17-n}$$

$$31 - 2n = 20$$

$$2n = 11$$

$$n = 5 \cdot 2 + 1$$

$$539$$

$$\begin{array}{r} 1726 \\ \times 2 \\ \hline 3452 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1742 \\ \times 2 \\ \hline 3484 \end{array}$$

$$S = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$= 2 - 7x$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 24}$$

$$\frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1.5 \end{cases}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 2}}{4}$$

$$49x^2 - 28x + 4 = 4x^2 - 7x + 4 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$45x^2 - 25x = -2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$25x^2(9x^2 - 7x + 25) = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$25 \cdot 49x^4 - 25 \cdot 70x^3 + 25^2 x^2 = 4(4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 3)$$

$$1215x^4 - 1726x^3 + 645x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$b = 2^6$$

$$-420774983$$

$$48^2 - 5 \cdot 79 - 1 = 1$$

$$8 - 2^0 = 7$$

$$22 + 7 = 29$$

$$a + b = 19$$

$$a + c + b = 31$$

$$a + c = 20$$

$$n + k \geq 17$$

$$20 - n + k \geq 16$$

$$20 + 2k \geq 31$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. The work includes several equations and derivations:

- At the top left, there are some small calculations: $122 \times 122 = 14884$, $122 \times 244 = 29968$, $244 \times 244 = 59536$.
- Below these, there are more calculations: $122 \times 122 = 14884$, $122 \times 244 = 29968$, $244 \times 244 = 59536$.
- There are several equations involving variables x , y , z , a , b , c , d , e , f , g , h , i , j , k , l , m , n , o , p , q , r , s , t , u , v , w , x , y , z .
- One prominent equation is $x^2 - 100x + 6300 = 1$.
- Another equation is $x^2 - 100x + 6300 = 1$.
- There are also equations like $x^2 - 100x + 6300 = 1$.
- The work includes many other smaller equations and derivations, some of which are crossed out or corrected.
- At the bottom, there are some final calculations: $122 \times 122 = 14884$, $122 \times 244 = 29968$, $244 \times 244 = 59536$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = 1$$

$$(2x-3)(x-1) = 0$$

$$2x-3 < 0$$

$$x < 1.5$$

$$45x^2 - 25x = 0$$

$$5x(9x-5) = 0$$

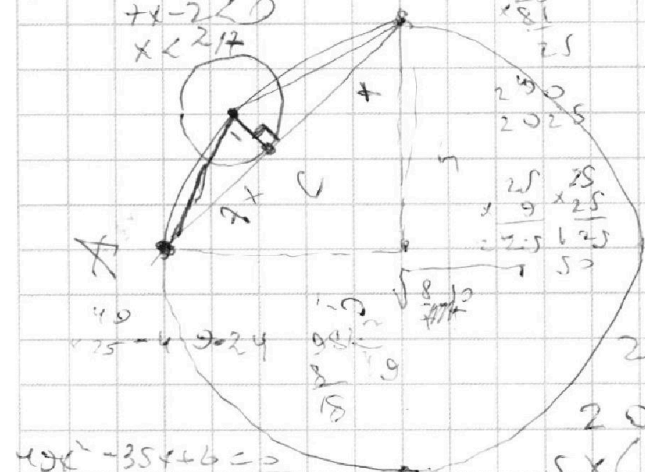
$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 49x^2 - 12x + 4$$

$$-2\sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 45x^2 - 85x + 4$$

$$4(2x^2 - 5x + 3)(4x^2 - 2x + 1) = 25x^2(81x^2 - 92x + 25)$$

$$4(8x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = 25(81x^2 - 92x + 25)$$



$$49x^2 - 35x + 6 = 0$$

$$x = 35 \pm \sqrt{1225 - 98 \cdot 6} / 98$$

$$x = \frac{35 \pm 7}{98}$$

$$x = \frac{42}{98} = \frac{3}{7}$$

$$x = \frac{28}{98} = \frac{2}{7}$$

$$63x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 756}}{126}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 756}}{126}$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$2009x^4 - 2226x^3 + 633x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$5x(5-9x) = 2\sqrt{2x^2-5x+3}\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + x - 2 = 0$$

$$= 51x^2 - 38x + 7 + (14x - 4)\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 2x^2 + 2x + 1$$

$$(4 - 14x)\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 49x^2 - 35x + 6$$

$$2(2 - 7x)\sqrt{x-1}\sqrt{2x+3} = (7x-2)(7x-3)$$

$$2\sqrt{x-1}\sqrt{2x+3} = 7(3-7x)$$

$$4x^4 - 10x + 6 = 49x^2 - 42x + 9$$

$$45x^2 - 32x + 3 = 0$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 45 \cdot 3}}{90}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 7x - 2$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 49x^2 - 28x + 4$$

$$47x^2 - 23x + 1 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 47 \cdot 1}}{94}$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{435}}{94}$$

$$x = 0, 6$$

$$x = 1/9$$