



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot k_a$ ;  $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot k_b$ ;  $c = 2^{\delta_1} \cdot 3^{\delta_2} \cdot 5^{\delta_3} \cdot k_c$ , где  $k_a \not\vdots 2$ ;  $k_a \not\vdots 3$ ;  $k_a \not\vdots 5$ . Аналогично  $k_b$  и  $k_c$  не делится на 2; 3; 5.

Т.к.  $abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\delta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\delta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\delta_3} \cdot k_a \cdot k_b \cdot k_c \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ , тогда

(1a)  $\alpha_1+\beta_1 \geq 9$ ;  $\alpha_2+\beta_2 \geq 10$ ;  $\alpha_3+\beta_3 \geq 10$ .

Аналогично для приведения  $bc$  и  $ac$ :

(2a)  $\beta_1+\delta_1 \geq 14$ ;  $\beta_2+\delta_2 \geq 13$ ;  $\beta_3+\delta_3 \geq 13$

(3a)  $\alpha_1+\delta_1 \geq 19$ ;  $\alpha_2+\delta_2 \geq 18$ ;  $\alpha_3+\delta_3 \geq 30$ .

Сложим неравенства (1a); (2a); (3a) и разделим их обе части на 2:  $\alpha_1+\beta_1+\delta_1 \geq 21$ .

Сложим неравенства (1a); (1b); (3b) и разделим их обе части на 2:  $\alpha_2+\beta_2+\delta_2 \geq 20,5$

Сложим Аналогично для неравенств (1b); (2b); (3b):

$\alpha_3+\beta_3+\delta_3 \geq 26,5$ .

Т.к.  $a, b, c$  - натуральные числа, то  $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \alpha_2, \beta_2, \delta_2, \alpha_3, \beta_3, \delta_3$  не отрицательные целые.

$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\delta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\delta_2} \cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\delta_3} \cdot k_a \cdot k_b \cdot k_c \geq 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$ .

$(\alpha_2+\beta_2+\delta_2) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_2+\beta_2+\delta_2 \geq 21$ ; аналогично  $\alpha_3+\beta_3+\delta_3 \geq 27$

Тогда  $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$ . Но т.к.  $ac \geq 5^{30}$ , то  $\alpha_3+\beta_3+\delta_3 \geq 30$ ;  $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

При этом равенство достигается при  $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$ ;

$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^5$ ;  $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$

Ответ: наименьшее  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

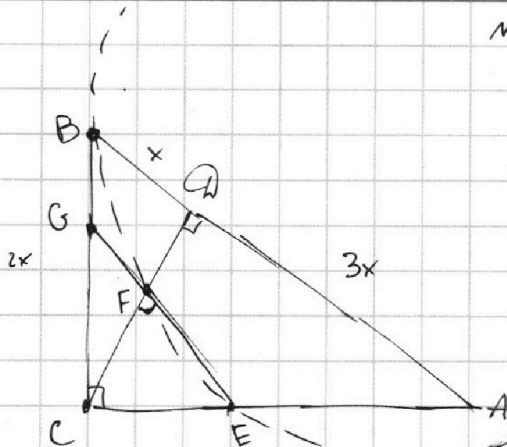
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2



Пусть  $BD = x$ , тогда  $AD = 3x$ .  
 $GD$  - высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, тогда  $GD = \sqrt{BD \cdot AD}$   
 $GD = x\sqrt{3}$ .

По теореме Пифагора из  $\triangle BAC$ :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$   
 $BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$

Пусть  $G = FE \cap BC$ , тогда  $\triangle GCE \sim \triangle BCA$  т.к.  $FE \parallel AB$  ( $\angle BCA$  - общий;  $\angle CEG = \angle CAB$  как соответств. при  $FE \parallel AB$ , секущей  $AC$ ). ~~В~~  $\frac{GC}{BC} = \frac{GE}{AB} = \frac{CE}{AC} = d$ .

Аналогично  $\triangle CFG \sim \triangle CBA$  ( $\angle C$  - общий;  $\angle CFG = \angle CBA$ ), тогда  $d = \frac{CF}{CA} = \frac{CG}{CB} = \frac{GF}{BA}$ . Тогда  $GF = BA \cdot d = 4xd$ ;  $GE = BA \cdot d = 4xd$ .  
 $GB = CB - GC = 2x - 2xd = 2x(1-d)$

Степень  $\gamma$ .  $G$  относительно окр., касающейся  $BC$  в  $\gamma$ .  $B$ ; проходящей через  $F$  и  $E$ :  $GB^2 = GF \cdot GE$ .

$$4x^2(1-d)^2 = 4xd \cdot 4xd$$

$$d^2 - 2d + 1 = d^2; \quad d = \frac{1}{2}$$

Т.к.  $\triangle CFE \sim \triangle CAB$   $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$ ;  $S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE = \frac{1}{2} CF \cdot 3x$ .  
 По теореме Пифагора из  $\triangle ABC$ :  $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}$

$$CE = AC \cdot d = x\sqrt{3}; \quad FE = 3x \cdot d = 1,5x$$

По теореме Пифагора из  $\triangle CFE$  ( $\angle CFE = \angle CBA = 90^\circ$  как соответственные при  $FE \parallel AB$ , секущей  $CA$ ):  $CF = \sqrt{CE^2 - FE^2} =$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{9}{4}x^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AC}{\frac{1}{2} CF \cdot FE} = \frac{2x \cdot 2x\sqrt{3}}{\frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}x} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

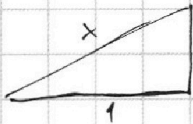
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

1)  ~~$\cos x \geq 0$~~ . 1)  $\cos x \geq 0$ ; ~~к этому~~

Рассмотрим прямоугольный ~~треугольник~~ <sup>с катетом</sup> ~~с катетом~~ <sup>с катетом</sup> 1 и гипотенузой  $x$ :



$$\arcsin(\cos x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$5\sqrt{x^2 - 1} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$25x^2 - 25 = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

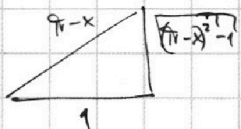
$$24x^2 - \pi x - 25 - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48}; \quad x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400}}{48}$$

Ответ:  ~~$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48}$~~

2)  $\cos x \leq 0$ ;

Рассмотрим ~~прямоуг.~~ <sup>прямоуг.</sup> ~~треугольник~~ <sup>треугольник</sup> с катетом 1 и гипотенузой  $\pi - x$



$$\arcsin(\cos x) = \sqrt{(\pi - x)^2 - 1}$$

$$5\sqrt{(\pi - x)^2 - 1} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$25\pi^2 + 25x^2 - 50\pi x - 25 = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

$$24x^2 - 51\pi x - 25 + 25\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{51\pi \pm \sqrt{2601\pi^2 + 2400 - 2400\pi^2 + 24\pi^2}}{48}$$

$$x = \frac{51\pi \pm \sqrt{225\pi^2 + 2400}}{48}; \quad x = \frac{57\pi \pm 5\sqrt{\pi^2 + 96}}{48}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi \pm 5\sqrt{\pi^2 + 96}}{48}; \quad x = \frac{51\pi \pm 5\sqrt{9\pi^2 + 96}}{48}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

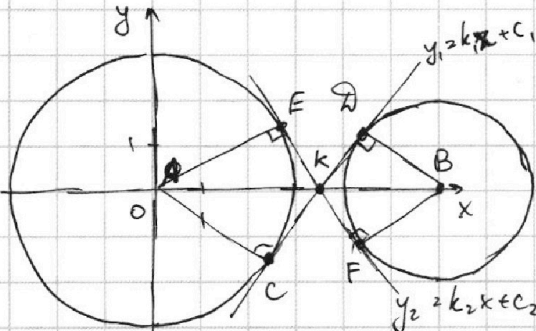


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нч

$$\begin{cases} ax + by - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 1,56 - \frac{a}{2}x \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$



Решением совокупности является 2 окружности. А - центр окр.  $x^2 + y^2 = 9$ , В - центр окр.  $(x-6)^2 + y^2 = 4$ . Проведём их общие внутренние касательные  $y_1 = k_1x + c_1$  и  $y_2 = k_2x + c_2$ .

Пусть С и D - т. касания  $y_1 = k_1x + c_1$  с  $\odot A$  окружностями, заданными уравнениями  $x^2 + y^2 = 9$  и  $(x-6)^2 + y^2 = 4$ . Т. Е и F - аналогичные для прямой  $y_2 = k_2x + c_2$ . Т. К - т. пересечения  $Ox$  и  $y_1 = k_1x + c_1$ .

Заметим, что если  $k_1 > 0$ , при этом, если  $-\frac{a}{2} \geq k_1$ , то система уравнений не может иметь больше 2-х решений. Если  $k_1 > -\frac{a}{2} \geq 0$ , то система уравнений может иметь 4 решения.

Рассмотрим  $\triangle AЕК \sim \triangle КВВ$  по двум углам ( $\angle АКЕ = \angle ВКВ$  как вертикальные, а  $\angle АЕК = \angle КВВ = 90^\circ$  как углы между касательной и радиусами, проведёнными в т. касания)

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BV} = \frac{3}{2}. \quad AB = 6, \text{ тогда } AK = 3,6; KB = 2,4.$$

$$k_1 = \operatorname{tg} \angle KBV = \frac{3}{2,4} = \frac{5}{6}. \quad K(3,6; 0); D(2,4; \frac{5}{6})$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leq \frac{5}{6} \\ -\frac{a}{2} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} a > -\frac{5}{3} \\ a \leq 0 \end{cases}; \quad a \in [-\frac{5}{3}; 0].$$

В силу симметрии  $y_2 = k_2x + c_2$  пересекает  $Ox$  в т. К.

$$\triangle AЕК \sim \triangle ВFK. \quad k_2 = -\operatorname{tg} \angle АКЕ = -\frac{3}{3,6} = -\frac{5}{6}.$$

При  $-\frac{a}{2} \leq k_2$  система не может иметь более 2-х решений, тогда  $-\frac{a}{2} \geq k_2$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} < 0 \\ -\frac{a}{2} > -\frac{5}{6} \end{cases} \begin{cases} a > 0 \\ a \leq \frac{5}{3} \end{cases}. \quad a \in (0; \frac{5}{3}].$$

Т.е. при  $a \in [-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}]$  найдётся такое  $b$ , что система имеет 4 решения.

Ответ:  $a \in [-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}]$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 x = 2,5 \log_x 3 - 6 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x = -3,5 \log_x 3 - 8 \quad (1)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y} (3^{11}) - 8$$

$$\log_3^4(5y) = -2 \log_{5y} 3 + 5,5 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) = 3,5 \log_{5y} 3 - 8 \quad (2)$$

Рассмотрим разность (1) - (2):

$$\log_3^4 x - \log_3^4(5y) = -3,5 (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$\begin{aligned} (\log_3 x - \log_3(5y)) (\log_3 x + \log_3(5y)) (\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) &= \\ = -3,5 \log_3 \left( \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3(5y)} \right) \end{aligned}$$

$$\log_3 \left( \frac{x}{5y} \right) \cdot \log_3(5xy) (\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) = -3,5 \left( \frac{\log_3 \log_3(5xy)}{\log_3 x \cdot \log_3(5y)} \right)$$

$$\begin{cases} 5xy = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 \left( \frac{x}{5y} \right) \cdot (\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) = \frac{-3,5}{\log_3 x \cdot \log_3(5y)} & (4) \end{cases}$$

$$\text{Из (3): } xy = \frac{1}{5}.$$

$$(4): \log_3 \left( \frac{x}{5y} \right) \cdot \log_3 x \cdot \log_3(5y) < 0$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{5} = 0,2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

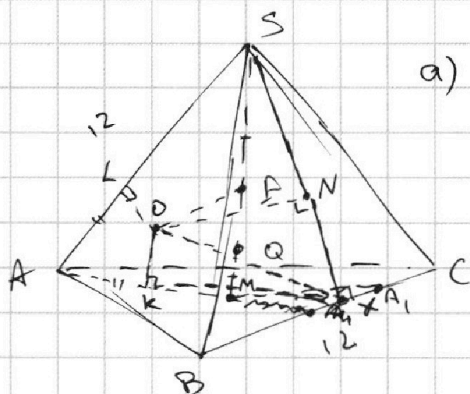
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

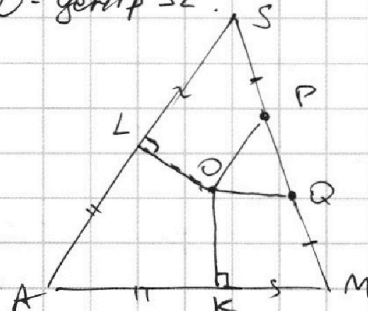
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



а) Рассмотрим  $\triangle ASM$ .  
Заметим, что  $ASM \in \Omega$ , где  $O$  - центр  $\Omega$ .



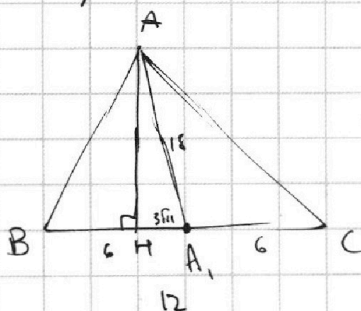
$AK = AL$  как отрезки касательных, проведенных к сечению  $\Omega$

из т. А. Степень т. S относ. сеч.  $\Omega$ :  $SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP$ .

$= MK^2 \Rightarrow MK = LS$ . Тогда  $AM = AS = 12$ .

$AM = \frac{2}{3} AA_1$ , т.к. M - т. пересечения медиан  $\triangle ABC$ .  $AA_1 = 18$

Рассмотрим  $\triangle ABC$ .



Проведем в нем высоту  $AH$ .

По теореме Пифагора из  $\triangle AHA_1$ :

$$HA_1 = \sqrt{AC^2 - AH^2}. \quad AH = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2} \cdot BC} = \frac{81 \cdot 90}{6} = 15.$$

$$HA_1 = \sqrt{324 - 225} = 3\sqrt{11}$$

$BH = 6 - 3\sqrt{11}$ ; По теореме Пифагора

$$\text{из } \triangle BAM: AB = \sqrt{36 + 99 - 36\sqrt{11} + 225} = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

По теореме Пифагора из  $\triangle AHC$ :  $AC = \sqrt{36 + 99 + 36\sqrt{11} + 225} = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$

$$BB_1 = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 - 72\sqrt{11}} + \sqrt{288 - 360 - 36\sqrt{11}}}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2} = \sqrt{162 - 27\sqrt{11}}$$

$$CC_1 = \frac{\sqrt{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 + 72\sqrt{11}} + \sqrt{288 - 360 + 36\sqrt{11}}}{2} = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 9 \cdot \sqrt{18^2 - 99} = 18 \cdot 9 \cdot 15 = 9^2 \cdot 30 = 2430.$$

б) Опустим из N перпендикуляр  $NX$  на  $BC$ .

По теореме о трёх перпендикулярах т.к.  $ON \perp (BSC)$  ( $(BSC)$  касается  $\Omega$ );  $NX$  - проекция  $OX$  на  $(BSC)$ ;  $NX \perp BC$ ,  $OX$  - секущая, то  $OX \perp BC$ .

По теореме о трёх перпендикулярах  $OK \perp (ABC)$  ( $(ABC)$  касается

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



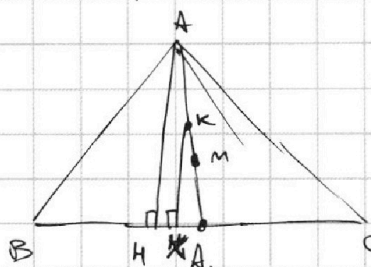
$\Omega \cap \Omega$ ;  $KX$  - проекция секущей  $OX$  на  $(ABC)$ ;  $OX \perp BC$ , значит,  $KX \perp BC$ . Тогда двугранный угол при ребре  $BC$  равен  $\angle KXN$ .

Заметим, что  $XO$  - биссектриса  $\angle KXN$  т.к.  $\Omega$  касается  $(ABC)$ ;  $(BSC)$ , тогда  $\angle KXO = \frac{1}{2} \angle KXN$ .

Вот и заметим, что  $SL = SN$  т.к.  $\triangle LOS = \triangle OSN$  по катету и гипотенузе ( $OL = ON = 5$ ;  $OS$  - общая)

$AK = AL = AS - LS = 12 - 4 = 8$ .

Рассмотрим  $\triangle ABC$



Заметим, что  $\triangle ANA_1 \sim \triangle KKA_1$ , т.к.  $\angle KAA_1$  - общий ( $K \in AA_1$ );  $KX \perp BC$ ;  $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel KX$ .

$\frac{KX}{AH} = \frac{AK}{AA_1}$   $\Rightarrow KX = \frac{AH \cdot AK}{AA_1}$

$A_1K = AA_1 - AK = 18 - 8 = 10$ ;  $KX = \frac{15 \cdot 10}{18} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$

$\sin \angle KXO = \frac{OX}{KX}$   $\Rightarrow \sin \angle KXO = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$ ;  $\angle KXO = \arcsin \frac{3}{5}$

$\angle KXN = 2 \arcsin \frac{3}{5}$ .

Ответ:  $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$ ;  $\angle KXN = 2 \arcsin \frac{3}{5}$ , где  $\angle KXN$  - двугранный угол при ребре  $BC$  по доказанному.



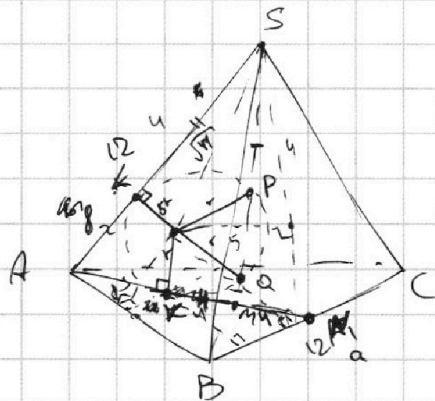
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= 90^\circ \\
 AM &= 12 \\
 AP &= \frac{3}{2} \cdot 12 = 18
 \end{aligned}$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = MK^2$$

$$\frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$$

$$= \frac{4a^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 4b^2c^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 324 &= \frac{-144 + \sqrt{1440 - 144}}{4} = \frac{1296}{4} = 324
 \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\frac{1}{\log_x 3} + (6 - 2.5) \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \log_3^4 x - \log_3^4 9 &= -3.5 \log_x 3 \\
 (\log_3^2 x - \log_3^2 9) (\log_3^2 x + \log_3^2 9) (\log_3^2 x + \log_3^2 9) &= -3.5 \log_x 3
 \end{aligned}$$

$$\log_3^2 \frac{x}{9} \cdot \log_3^2 9x (\log_3^2 x + \log_3^2 9)$$

$$\begin{aligned}
 & \neq \frac{9^2 - 30}{2430}
 \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x = -3.5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \log_3^4 (5y) = -3.5 \log_{5y} 3 - 3.5 \log_x 3 - 16$$

$$\begin{aligned}
 x &= 3^a; \quad 5y = 3^b; \\
 a^4 + b^4 &= -3.5 \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= 3^a \\
 5y &= 3^b \\
 (a-b) a^4 &< 0
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

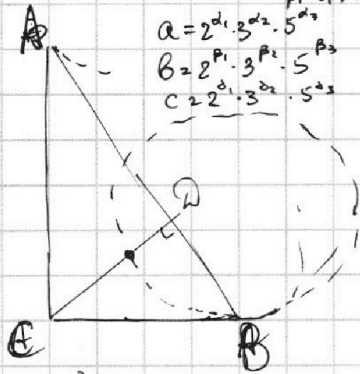


$abc \geq [a; b; c]$

$a \cdot 2^{10} \Rightarrow c : 2^{10}$

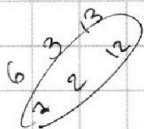
$abc : 2^{19}$   
 $a_1 + b_1 \geq 9$   
 $a_1 + b_1 \geq 19$   
 $b_1 + c_1 \geq 14$

$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$   
 $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$   
 $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$



$GB^2 = GF \cdot GE$

$CF \cdot FE \cdot GE = 4x \cdot d$



$GF = x \cdot d$

$GC = 2x \cdot d$

$GB = 2x(1-d)$

$4x^2(1-d) = 4x \cdot d \cdot 4x \cdot d$

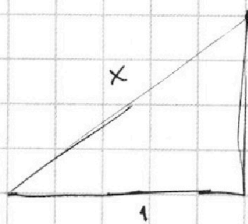
$d^2 + d - 1 = 0$

$d = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\frac{S_{CFEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

$\frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

17



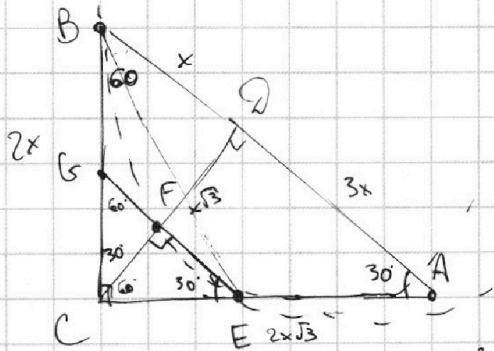
$5\sqrt{x^2 - 1} = x + \frac{\pi}{2}$

$25(x^2 - 1) = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$

$24x^2 - \pi x - 25 - \frac{\pi^2}{4} = 0$

$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 24(25 + \frac{\pi^2}{4})}}{48} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48} = \frac{\pi \pm \sqrt{9\pi^2 + 96}}{48}$

$\cos\left(\frac{\pi - 5\sqrt{9\pi^2 + 96}}{48}\right) =$



$CA^2 = AF \cdot AB$

$CA = 2x\sqrt{3}$

$3x^2 + x^2 = 4x^2 = CA^2$

$3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow CA = 2x$

$CB^2 = CF \cdot CA$

$4x^2 = \frac{4x^2}{x\sqrt{3}} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3}$

$\frac{CF}{BC} = \frac{FE}{AC}$

$AC = \sqrt{16x^2 - \frac{16x^2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16x^2}{3}} = \frac{4x\sqrt{6}}{3}$

$FE = \frac{CF \cdot AC}{BC} = \frac{\frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4x\sqrt{6}}{3}}{2x} = \frac{16x^2\sqrt{2}}{6x} = \frac{8x\sqrt{2}}{3}$

$\frac{S_{CFEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{8x\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{6}}{3} \cdot 2x} = \frac{4}{3}$

$\frac{2400}{25} = 24 \cdot 4 = 96$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+2y=36 \\ x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+y^2+32=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+2y=36 \\ x^2+y^2=9 \\ y=1,56-\frac{a}{2}x \\ x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$y=kx+c$$

$$x^2+y^2=9$$

$$x^2+k^2x^2+2kxc+c^2=9$$

$$x^2(k^2+1)+2kcx+c^2-9=0$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = 4k^2c^2 - 4k^2c^2 - 4c^2 + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$y=kx+3$$

$$-4(k^2+1)(c^2-9) = 4k^2c^2 + 36k^2 - 4c^2 + 36 = 0$$

$$3k^2 - c^2 + 9 = 0.$$

$$a=0;$$

$$\begin{cases} y(3,6) = 0 \\ 0 = 3,6k + 6 \end{cases}$$

$$6 = -3,6k$$

$$k = \text{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$



$$(x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 + 2kxc + c^2 = 4$$

$$x^2(k^2+1) + x(2kc-12) + 32 + c^2 = 0$$

$$\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow 4k^2c^2 + 144 - 48kc - 4(k^2+1)(32+c^2) = 4k^2c^2 - 48kc + 144 - 128k^2 - 4k^2c^2 - 128 - 4c^2 = -128k^2 - 4c^2 + 16 - 48kc = 0$$

$$+ 32k^2 + c^2 - 4 + 12kc = 0.$$

$$(6k+c)^2 = 4 + 4k^2$$

$$y = kx - 3,6k$$

$$k^2 + k^2x^2 - 7,2k^2x + \frac{6^2}{100}k^2 - 9 = 0.$$

$$\frac{2,4}{2,4} = \frac{9,6}{9,6} = \frac{48}{5,28}$$

$$1,76 = \frac{1,76}{100} = \frac{44}{25}$$

$$\text{tg} k = \frac{2}{\sqrt{\frac{44}{25}}} = \frac{2}{\frac{2}{5}\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$\alpha \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$$

$$\begin{cases} x^d = 3 \\ x = 3^{\frac{1}{d}} \end{cases}$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_3 y$$

$$(y_2 - y_1)^2 = 3$$

$$\log_3^4 x + 6\log_3 x = \frac{5}{2}\log_3 x - 8$$

$$\log_3^4 x + 3,5\log_3 x + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 3,5 + 8\log_3 x + 3,5 = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0.$$

$$\log_3^4 x + \log_3^3 9$$

$$\begin{aligned} &= 2\sin d \cos d (\cos^3 d - 2\cos d) + 2\cos^2 d - 1 (\cos^2 d - 1) (\cos^2 d - 1) = \\ &= 2\sin d \cos^4 d - 6\sin d \cos^2 d + 2\cos^4 d \sin d - 4\sin d \cos^2 d - 2\cos^2 d \sin d + \sin d = \\ &= \sin d (16\cos^4 d - 12\cos^2 d + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 5d &= (\sin(d+3d)) = \\ &= \sin d \cos 3d + \sin 3d \cos d = \\ &= 2\sin d \cos d (\cos^2 d - \sin^2 d) + \\ &+ (\sin^2 d \cos d + \sin d \cos^2 d) \cdot \cos d = \\ &= 2\sin d \cos d \cos^2 d - \cos d - 2\sin^2 d \cos d + \\ &+ (\sin^2 d \cos^2 d + 2\cos^2 d \sin d - \sin d) \cdot \cos d = \\ &= 4\sin d \cos^3 d - 2\sin d \cos d \end{aligned}$$

