



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot k_a$; $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot k_b$; $c = 2^{\delta_1} \cdot 3^{\delta_2} \cdot 5^{\delta_3} \cdot k_c$, где $k_a \not\div 2$; $k_a \not\div 3$; $k_a \not\div 5$; Аналогично k_b и k_c не делится на 2; 3; 5.

Т.к. $abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3} \cdot k_a \cdot k_b \cdot k_c \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$, тогда

$$(1a) \quad \alpha_1 + \beta_1 \geq 9; \quad \alpha_2 + \beta_2 \geq 10; \quad \alpha_3 + \beta_3 \geq 10.$$

Аналогично для приведения bc и ac :

$$(2a) \rightarrow \beta_1 + \delta_1 \geq 14; \quad \beta_2 + \delta_2 \geq 13; \quad \beta_3 + \delta_3 \geq 13$$

$$(3a) \quad \alpha_1 + \delta_1 \geq 19; \quad \alpha_2 + \delta_2 \geq 18; \quad \alpha_3 + \delta_3 \geq 30.$$

Сложим неравенства (1a); (2a); (3a) и разделим их обе части на 2: $\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 \geq 21$.

Сложим неравенства (2a); (1a); (3a) и разделим их обе части на 2: $\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 20,5$

Сложим Аналогично для неравенств (1b); (2b); (3b):

$$\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 26,5.$$

Т.к. a, b, c - натуральные числа, то $\alpha_i, \beta_i, \delta_i; \alpha_2, \beta_2, \delta_2; \alpha_3, \beta_3, \delta_3$ не отрицательные целые.

$$abc = 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \delta_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2} \cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3} \cdot k_a \cdot k_b \cdot k_c \geq 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}.$$

$$(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \delta_2 \geq 21; \text{ аналогично } \alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 27$$

Тогда $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Но т.к. $ac \leq 5^{30}$, то $\alpha_3 + \beta_3 + \delta_3 \geq 30; abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

При этом равенство достигается при $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$;

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0; \quad c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$$

Ответ: наименьшее $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

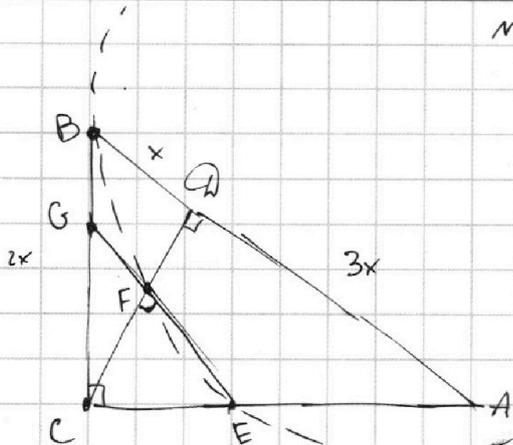
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2



Пусть $BD = x$, тогда $AD = 3x$.
 CD - высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, тогда $CD = \sqrt{BD \cdot AD}$
 $CD = x\sqrt{3}$.

По теореме Пифагора из $\triangle BAC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
 $BC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$

Пусть $G = FE \cap BC$, тогда $\triangle GCE \sim \triangle BCA$ т.к. $FE \parallel AB$ ($\angle BCA$ - общий; $\angle CEG = \angle CAB$ как соответств. при $FE \parallel AB$, секущей AC). ~~В~~ $\frac{GC}{BC} = \frac{GE}{AB} = \frac{CE}{AC} = d$.

Аналогично $\triangle CFG \sim \triangle CDA$ ($\angle C$ - общий; $\angle CFG = \angle CDA$), тогда $d = \frac{CF}{CD} = \frac{CG}{CA} = \frac{GF}{DA}$. Тогда $GF = DA \cdot d = xd$; $GE = BA \cdot d = 4xd$.
 $GB = CB - GC = 2x - 2xd = 2x(1-d)$

Степень γ . G относительно окр., касающейся BC в γ . B ; проходящей через F и E : $GB^2 = GF \cdot GE$.

$$4x^2(1-d)^2 = xd \cdot 4xd$$

$$d^2 - 2d + 1 = d^2; \quad d = \frac{1}{2}$$

Т.к. $\triangle CFE \sim \triangle CDA$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$; $S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE = \frac{1}{2} CF \cdot 3xd$.
 По теореме Пифагора из $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}$

$$CE = AC \cdot d = x\sqrt{3}; \quad FE = 3x \cdot d = 1,5x$$

По теореме Пифагора из $\triangle CFE$ ($\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ$ как соответственные при $FE \parallel AB$, секущей CA): $CF = \sqrt{CE^2 - FE^2} =$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{9}{4}x^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AC}{\frac{1}{2} CF \cdot FE} = \frac{2x \cdot 2x\sqrt{3}}{\frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}x} = \frac{16}{3}$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{16}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

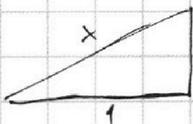


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3

1) ~~$\cos x \geq 0$~~ . 1) $\cos x \geq 0$; ~~к этому~~

Рассмотрим прямоугольный ~~треугольник~~ ^{с катетом} ~~с катетом~~ 1 и гипотенузой x :



$$\sin(\cos x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$5\sqrt{x^2 - 1} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$25x^2 - 25 = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

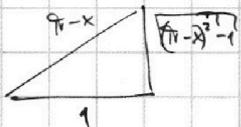
$$24x^2 - \pi x - 25 - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48}; \quad x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 96}}{48}$$

Ответ: ~~$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48}$~~

2) $\cos x \leq 0$;

Рассмотрим ~~прямоуг.~~ ^{прямоуг.} ~~треугольник~~ ^{треугольник} с катетом 1 и гипотенузой $\pi - x$



$$\arcsin(\cos x) = \sqrt{(\pi - x)^2 - 1}$$

$$5\sqrt{(\pi - x)^2 - 1} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$25\pi^2 + 25x^2 - 50\pi x - 25 = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$$

$$24x^2 - 51\pi x - 25 + 25\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{51\pi \pm \sqrt{2601\pi^2 + 2400 - 2400\pi^2 + 24\pi^2}}{48}$$

$$x = \frac{51\pi \pm \sqrt{225\pi^2 + 2400}}{48}; \quad x = \frac{57\pi \pm 5\sqrt{\pi^2 + 96}}{48}$$

Ответ: $x = \frac{\pi \pm 5\sqrt{\pi^2 + 96}}{48}; \quad x = \frac{51\pi \pm 5\sqrt{9\pi^2 + 96}}{48}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



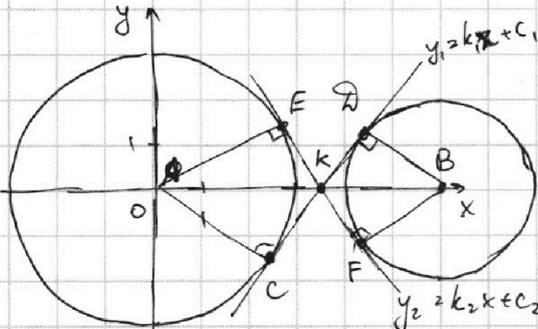
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + by - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

ИЧ

$$\begin{cases} y = 1,56 - \frac{a}{2}x \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$



Решением совокупности является 2 окружности. А - центр окр. $x^2 + y^2 = 9$, В - центр окр. $(x-6)^2 + y^2 = 4$. Проведём их общие внутренние касательные $y_1 = k_1x + c_1$ и $y_2 = k_2x + c_2$.

Пусть С и D - т. касания $y_1 = k_1x + c_1$ с $\odot A$ и $\odot B$ соответственно, заданными уравнениями $x^2 + y^2 = 9$ и $(x-6)^2 + y^2 = 4$. Т. Е и F - аналогичные для прямой $y_2 = k_2x + c_2$. Т. К - т. пересечения Ox и $y_1 = k_1x + c_1$.

Заметим, что если $k_1 > 0$, при этом, если $-\frac{a}{2} \geq k_1$, то система уравнений не может иметь больше 2-х решений. Если $k_1 > -\frac{a}{2} \geq 0$, то система уравнений может иметь 4 решения.

Рассмотрим $\triangle AЕК \sim \triangle КВВ$ по двум углам ($\angle АКЕ = \angle ВКВ$ как вертикальные, а $\angle АЕК = \angle КВВ = 90^\circ$ как углы между касательной и радиусами, проведёнными в т. касания)

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BV} = \frac{3}{2}. \quad AB = 6, \text{ тогда } AK = 3,6; KB = 2,4.$$

$$k_1 = \operatorname{tg} \angle KBV = \frac{3}{2,4} = \frac{5}{6}. \quad K(3,6; 0); D(2,4; \frac{5}{6})$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leq \frac{5}{6} \\ -\frac{a}{2} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} a > -\frac{5}{3} \\ a \leq 0 \end{cases}; \quad a \in [-\frac{5}{3}; 0].$$

В силу симметрии $y_2 = k_2x + c_2$ пересекает Ox в т. К.

$$\triangle AЕК \sim \triangle ВFK. \quad k_2 = -\operatorname{tg} \angle АКЕ = -\frac{3}{3,6} = -\frac{5}{6}.$$

При $-\frac{a}{2} \leq k_2$ система не может иметь более 2-х решений, тогда $-\frac{a}{2} \geq k_2$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} < 0 \\ -\frac{a}{2} > -\frac{5}{6} \end{cases} \begin{cases} a > 0 \\ a \leq \frac{5}{3} \end{cases}. \quad a \in (0; \frac{5}{3}].$$

Т.е. при $a \in [-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}]$ найдётся такое b , что система имеет 4 решения.

Ответ: $a \in [-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{\sqrt[3]{243}} 8$$

$$\log_3^4 x = 2,5 \log_x 3 - 6 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x = -3,5 \log_x 3 - 8 \quad (1)$$

$$\log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{\sqrt[3]{27}} 8$$

$$\log_3^4(5y) = -2 \log_{5y} 3 + 5,5 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4(5y) = 3,5 \log_{5y} 3 - 8 \quad (2)$$

Рассмотрим разность (1) - (2):

$$\log_3^4 x - \log_3^4(5y) = -3,5 (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$\begin{aligned} (\log_3 x - \log_3(5y)) (\log_3 x + \log_3(5y)) (\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) &= \\ = -3,5 \log_3 \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3(5y)} \right) \end{aligned}$$

$$\log_3 \left(\frac{x}{5y} \right) \cdot \log_3(5xy) (\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) = -3,5 \left(\frac{\log_3 \log_3(5xy)}{\log_3 x \cdot \log_3(5y)} \right)$$

$$\begin{cases} 5xy = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 \left(\frac{x}{5y} \right) \cdot (\log_3^2 x + \log_3^2(5y)) = \frac{-3,5}{\log_3 x \cdot \log_3(5y)} & (4) \end{cases}$$

$$\text{Из (3): } xy = \frac{1}{5}.$$

$$(4): \log_3 \left(\frac{x}{5y} \right) \cdot \log_3 x \cdot \log_3(5y) < 0$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{5} = 0,2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

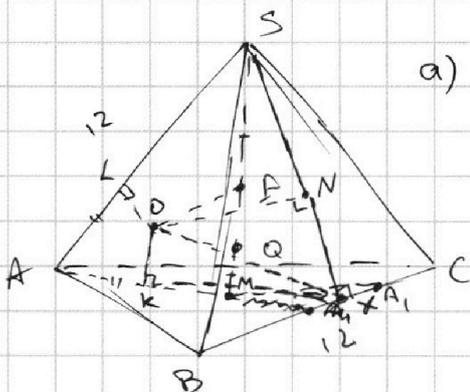
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

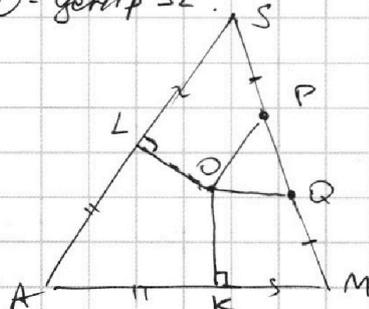
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



а) Рассмотрим $\triangle ASM$.
Заметим, что $ASM \in \Omega$, где O - центр Ω .



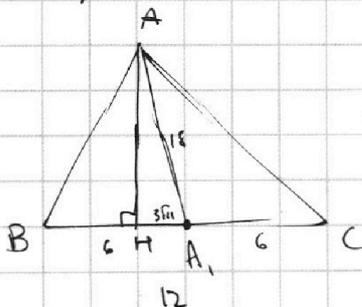
$AK = AL$ как отрезки касательных, проведенных к сечению Ω

из т. А. Степень т. S относ. сеч. Ω : $SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP$.

$= MK^2 \Rightarrow MK = LS$. Тогда $AM = AS = 12$.

$AM = \frac{2}{3} AA_1$, т.к. M - т. пересечения медиан $\triangle ABC$. $AA_1 = 18$

Рассмотрим $\triangle ABC$.



Проведем в нем высоту AH .

По теореме Пифагора из $\triangle AHA_1$:

$$HA_1 = \sqrt{AC^2 - AH^2}. \quad AH = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2} \cdot BC} = \frac{81 \cdot 90}{6} = 15.$$

$$HA_1 = \sqrt{324 - 225} = 3\sqrt{11}$$

$BH = 6 - 3\sqrt{11}$; По теореме Пифагора

$$\text{из } \triangle BAM: AB = \sqrt{36 + 99 - 36\sqrt{11} + 225} = 6\sqrt{10 - \sqrt{11}}$$

По теореме Пифагора из $\triangle AHC$: $AC = \sqrt{36 + 99 + 36\sqrt{11} + 225} = 6\sqrt{10 + \sqrt{11}}$

$$BB_1 = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 - 72\sqrt{11}} + \sqrt{288 - 360 - 36\sqrt{11}}}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2} = \sqrt{162 - 27\sqrt{11}}$$

$$CC_1 = \frac{\sqrt{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{720 + 72\sqrt{11}} + \sqrt{288 - 360 + 36\sqrt{11}}}{2} = 3\sqrt{18 + 3\sqrt{11}}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 9 \cdot \sqrt{18^2 - 99} = 18 \cdot 9 \cdot 15 = 9^2 \cdot 30 = 2430.$$

б) Опустим из N перпендикуляр NX на BC .

По теореме о трёх перпендикулярах т.к. $ON \perp (BSC)$ ((BSC) касается Ω); NX - проекция OX на (BSC) ; $NX \perp BC$, OX - секущая, то $OX \perp BC$.

По теореме о трёх перпендикулярах $OK \perp (ABC)$ ((ABC) касается

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



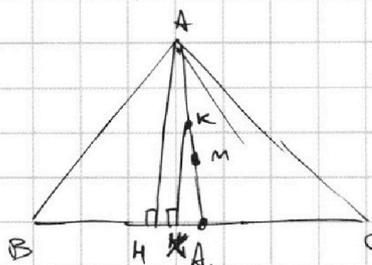
$\Omega \cap \Omega$; KX - проекция секущей OX на (ABC) ; $OX \perp BC$, значит, $KX \perp BC$. Тогда двугранный угол при ребре BC равен $\angle KXN$.

Заметим, что XO - биссектриса $\angle KXN$ т.к. Ω касается (ABC) ; (BSC) , тогда $\angle KXO = \frac{1}{2} \angle KXN$.

Вот и заметим, что $SL = SN$ т.к. $\triangle LOS = \triangle OSN$ по катету и гипотенузе ($OL = ON = 5$; OS - общая)

$AK = AL = AS - LS = 12 - 4 = 8$.

Рассмотрим $\triangle ABC$



Заметим, что $\triangle AHA, \triangle XKA$, т.к. $\angle XAA$ - общий ($K \in AA_1$); $KX \perp BC$; $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel KX$.

$\frac{KX}{AH} = \frac{AK}{AA_1} \Rightarrow KX = \frac{AH \cdot AK}{AA_1}$

$A_1K = AA_1 - AK = 18 - 8 = 10$; $KX = \frac{15 \cdot 10}{18} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$

$\sin \angle KXO = \frac{OK}{KX}$ $\cos \angle KXO = \frac{OK}{KX} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$; $\angle KXO = \arccos \frac{3}{5}$

$\angle KXN = 2 \arccos \frac{3}{5}$.

Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$; $\angle KXN = 2 \arccos \frac{3}{5}$, где $\angle KXN$ - двугранный угол при ребре BC по доказанному.

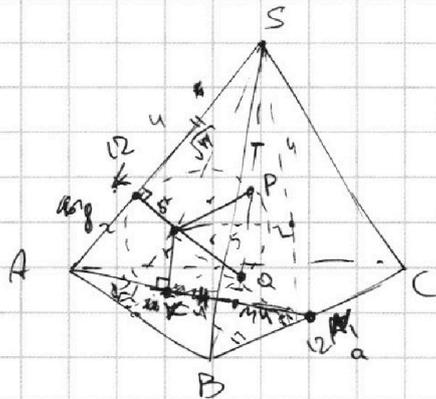
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= 90^\circ \\
 AM &= 12 \\
 AP &= \frac{3}{2} \cdot 12 = 18
 \end{aligned}$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = MK^2$$

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2}} \\
 &= \frac{4a^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 4b^2c^2}{2} \\
 &= \frac{-144 + 200 - 2\sqrt{11} + 220 + 72\sqrt{11}}{4} = 324
 \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\frac{1}{\log_x 3} + (6 - 2.5) \log_x 3 + 8 = 0.$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 9 = -3.5 \log_x 3$$

$$(\log_3 x - \log_3 9)(\log_3 x + \log_3 9)(\log_3^2 x + \log_3^2 9) = -3.5 \log_x 3$$

$$\log_3 \frac{x}{9} \cdot \log_3 9x (\log_3^2 x + \log_3^2 9).$$

$$\begin{aligned}
 &10 \quad 9^2 - 30 \\
 &2430
 \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x = -3.5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \log_3^4(5y) = -3.5 \log_{5y} 3 - 3.5 \log_x 3 - 16.$$

$$x = 3^a; 5y = 3^b;$$

$$a^4 + b^4 = -3.5 \log_x 3 - 16$$

$$x = 3^a$$

$$5y = 3^b$$

$$(a-b)a^4 - b^4 < 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

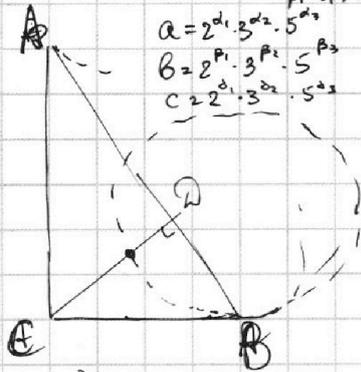


$abc \geq [a; b; c]$

$abc : 2^{19}$
 $a_1 + b_1 \geq 9$
 $a_1 + b_1 \geq 19$
 $b_1 + a_1 \geq 14$

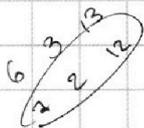
$a : 2^{10} \Rightarrow c : 2^{10}$

$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$
 $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$
 $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$



$GB^2 = GF \cdot GE$

$CF \cdot FE \approx GE = 4x \cdot d$



$GF = x \cdot d$

$GC = 2x \cdot d$

$GB = 2x(1-d)$

$4x^2(1-d) = 4x \cdot d \cdot 4x \cdot d$

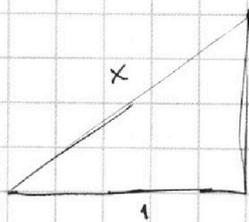
$d^2 + d - 1 = 0$

$d = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$\frac{S_{CFEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

$\frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

17



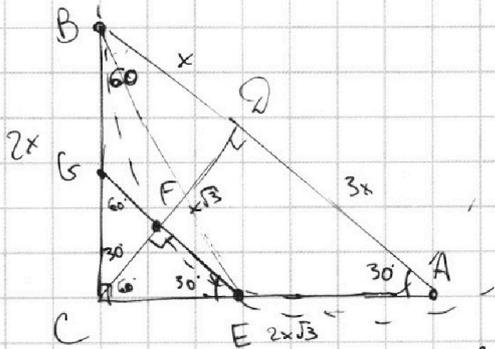
$5\sqrt{x^2 - 1} = x + \frac{\pi}{2}$

$25(x^2 - 1) = x^2 + \pi x + \frac{\pi^2}{4}$

$24x^2 - \pi x - 25 - \frac{\pi^2}{4} = 0$

$x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 24(25 + \frac{\pi^2}{4})}}{48} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 2400 + 24\pi^2}}{48} = \frac{\pi \pm \sqrt{9\pi^2 + 96}}{48}$

$\cos\left(\frac{\pi - 5\sqrt{9\pi^2 + 96}}{48}\right) =$



$CA^2 = AF \cdot AB$

$CA = 2x\sqrt{3}$

$3x^2 + x^2 = 4x^2 = CA^2$

$3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow CA = 2x$

$CB^2 = CF \cdot CA$

$4x^2 = \frac{4x^2}{x\sqrt{3}} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3}$

$\frac{CF}{BC} = \frac{FE}{AC}$

$AC = \sqrt{16x^2 - \frac{16x^2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16x^2}{3}} = \frac{4x\sqrt{6}}{3}$

$FE = \frac{CF \cdot AC}{BC} = \frac{\frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4x\sqrt{6}}{3}}{2x} = \frac{16x^2\sqrt{2}}{6x} = \frac{8x\sqrt{2}}{3}$

$\frac{S_{CFEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{8x\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4x\sqrt{6}}{3} \cdot 2x} = \frac{4}{3}$

$\frac{2400}{25} = 24 \cdot 4 = 96$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+2y=36 \\ x^2+y^2=9 \\ x^2-12x+y^2+32=0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax+2y=36 \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1,56-\frac{a}{2}x \\ x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$y=kx+c$$

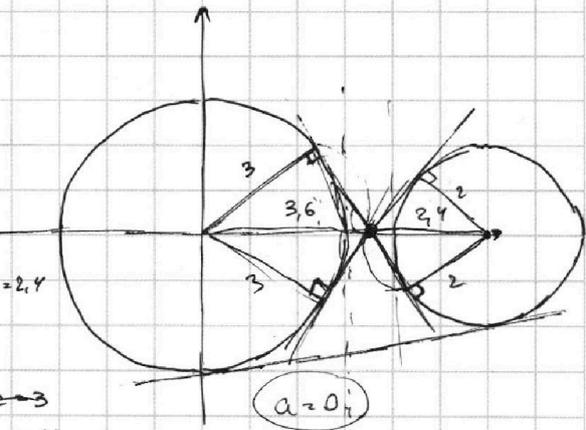
$$x^2+y^2=9$$

$$x^2+k^2x^2+2kxc+c^2=9$$

$$x^2(k^2+1)+2kcx+c^2-9=0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow 4k^2c^2 - 4(k^2+1)(c^2-9) = 4k^2c^2 - 4k^2c^2 + 36k^2 - 4c^2 + 36 = 0$$

$$y=kx+3 \quad -4(k^2+1)(c^2-9) = 4k^2c^2 + 36k^2 - 4c^2 + 36 = 0$$



$$a=0$$

$$y(3,6)=0 \Rightarrow 0=3,6k+6$$

$$k = \lg a = \frac{2}{\sqrt{4+2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$



$$(x-6)^2+y^2=4$$

$$x^2-12x+36+k^2x^2+2kxc+c^2=4$$

$$x^2(k^2+1)+x(2kc-12)+32+c^2=0$$

$$D=0 \Rightarrow 4k^2c^2+144-48kc-4(k^2+1)(32+c^2) = 4k^2c^2-48kc+144-128k^2-4k^2c^2-128-4c^2 = -128k^2-4c^2+16-48kc=0$$

$$432k^2+c^2-4+12kc=0$$

$$(6k+c)^2=4+4k^2$$

$$a \in \left(-\frac{5\sqrt{11}}{11}; \frac{5\sqrt{11}}{11}\right)$$

$$k^2+k^2-7,2k^2x+\frac{6}{100}k^2-9=0$$

$$\frac{2,4}{2,4} \quad \frac{9,6}{9,6} \quad \frac{4,8}{5,2}$$

$$1,76 = \frac{1,76}{100} = \frac{44}{25}$$

$$k = \frac{2}{\sqrt{\frac{44}{25}}} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{11}}{5}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

$$x^d=3 \Rightarrow x=3^{\frac{1}{d}}$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_3 y$$

$$\log_3^4 x + 6\log_3 x = \frac{5}{2}\log_3 x - 8$$

$$\log_3^4 x + 3,5\log_3 x + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 8\log_3 x + 3,5 = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$

$$\log_3^4 x + \log_3^3 9$$

$$\begin{aligned} \sin 5\alpha &= (\sin(\alpha+3\alpha)) = \\ &= \sin\alpha\cos 3\alpha + \sin 3\alpha\cos\alpha = \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \\ &+ (\sin^2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha) \cdot \cos 2\alpha = \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha) + \\ &+ (\sin\alpha\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha) \cdot \cos 2\alpha = \\ &= 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha) + 2\cos^2\alpha(1) + (\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha) = \\ &= 8\sin\alpha\cos^3\alpha - 6\sin\alpha\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha\sin\alpha + \sin\alpha = \\ &= \sin\alpha(16\cos^3\alpha - 12\cos^2\alpha + 1) \end{aligned}$$