## 10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{14}7^{10}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{17}$, $ac$ делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

**Ответ:** $2^{26}7^{37}$.

**Решение.** Чтобы произведение $abc$ было минимальным, числа $a$, $b$, $c$ не должны иметь простых делителей, отличных от 2 и 7. Пусть $a = 2^{\alpha_1}7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2}7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3}7^{\beta_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2 и 7.
1) Из того, что $ab$ делится на $2^{14}$, следует, что $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 14$. Аналогично, $\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 17$ и $\alpha_1+\alpha_3 \geqslant 20$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant \frac{14+17+20}{2} = 25{,}5$. Значит, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 26$. Покажем, что значение $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 26$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1+\alpha_2 = 14$, $\alpha_1+\alpha_3 = 20$, $\alpha_2+\alpha_3 = 18$).
2) Из того, что $ac$ делится на $7^{37}$ следует, что $\beta_1+\beta_3 \geqslant 37$. Заметим, что $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \beta_1+\beta_3 \geqslant 37$. $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ может равняться 37, если, например, $\beta_1 = 18$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 19$.
Так как минимум каждой из сумм $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ не зависит от другого, то и минимальное значение $abc$ равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}7^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} = 2^{26}7^{37}.$$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$. При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что дробь сократима на $m$?

**Ответ:** 8.

**Решение.** Пусть $d = \text{НОД}\,(a^2-6ab+b^2; a+b)$. Так как $a^2-6ab+b^2 = a(a+b)-7ab+b^2 = a(a+b)-7b(a+b)+8b^2$, т.е. $8b^2 = (a^2-6ab+b^2)+(7b-a)(a+b)$, из этого равенства следует, что $8b^2$ делится нацело на $d$. Аналогично доказывается что $8a^2$ делится нацело на $d$. Поэтому $d \leqslant \text{НОД}\,(8b^2; 8a^2) = 8\cdot\text{НОД}\,(a^2; b^2) \leqslant 8$, так как числа $a$ и $b$ взаимно просты и $\text{НОД}(a; b) = 1$. Докажем, что значение $d = 8$ может достигаться. Для этого достаточно взять $a = 1$, $b = 7$ – при этом дробь равна $\frac{8}{8} = 1$.

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 1 и 5 соответственно.

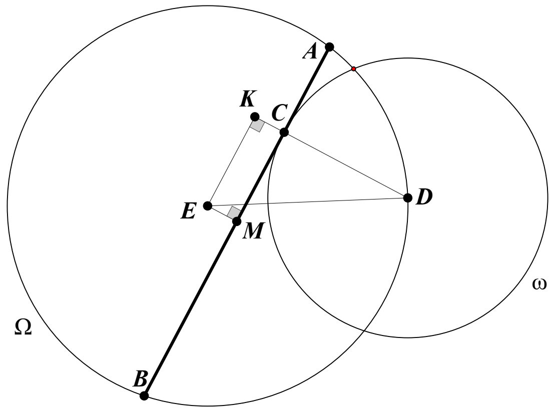
**Ответ:** $AB = 8$.

**Решение.** Пусть точки $D$ и $E$ – центры $\omega$ и $\Omega$ соответственно, а точки $K$ и $M$ – проекции точки $E$ на прямые $CD$ и $AB$ соответственно. Так как $\omega$ касается прямой $AB$ в точке $C$, то $\angle KCM = 90^\circ$; тогда в четырёхугольнике $CMEK$ три угла прямые, и он прямоугольник. Обозначим $AB = 8x$, $ME = y$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, поэтому $M$ – середина $AB$; тогда $BM = \frac{1}{2}AB = 4x$, $EK = CM = BM - BC = BM - \frac{1}{8}AB = 4x - x = 3x$ и $DK = DC + CK = DC + EM = 1 + y$. Запишем теорему Пифагора для треугольников $BEM$ и $DEK$ и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}(4x)^2 + y^2 = 5^2,\\(1+y)^2 + (3x)^2 = 5^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = \frac{25}{16} - \frac{y^2}{16},\\1 + 2y + y^2 + \frac{225}{16} - \frac{9y^2}{16} = 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = \frac{25}{16} - \frac{y^2}{16},\\7y^2 + 32y - 159 = 0.\end{cases}$$

Последнее уравнение имеет одно положительное решение $y = 3$; отсюда $x = 1$ и $AB = 8x = 8$.




4. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$.

**Ответ.** $x=\frac{2}{7}$.

**Решение.** Заметим, что правая часть уравнения есть разность подкоренных выражений в левой части уравнения. Обозначим $u=\sqrt{2x^2-5x+3}$, $v=\sqrt{2x^2+2x+1}$. Тогда $2-7x=u^2-v^2$, и уравнение принимает вид

$$u-v=u^2-v^2 \Leftrightarrow (u-v)(1-u-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v, \\ u+v=1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет единственное решение $x=\frac{2}{7}$ (принадлежащее области допустимых значений). Покажем, что левая часть второго уравнения $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$ больше правой при всех допустимых значениях $x$ (что означает, что у уравнения нет решений). Если $\sqrt{2x^2+2x+1}>1$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $\sqrt{2x^2+2x+1}\leqslant 1$. Это выполняется при $0\leqslant 2x^2+2x+1\leqslant 1$, т.е. при $x\in[-1;0]$. При таких значениях аргумента $2x^2-5x\geqslant 0$, поэтому $\sqrt{2x^2-5x+3}\geqslant\sqrt{3}$ и $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}>1$. Итак, уравнение имеет единственное решение $x=\frac{2}{7}$.

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

**Ответ:** 2 986.

**Решение.** Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ в виде $2x_2+y_2-12=2x_1+y_1$. Так как координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения $k$. Пара точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y=-2x+k$ и $y=-2x+k+12$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра $k$.
Стороны $OP$ и $QR$ параллелограмма лежат на прямых $y=-2x$ и $y=-2x+30$, поэтому они параллельны прямым $y=-2x+k$ и $y=-2x+k+12$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0\leqslant k\leqslant 30$ и $0\leqslant k+12\leqslant 30$, поэтому $k\in[0;18]$.
Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y=-2x+b$. Если $b$ чётное (т.е. $b=2l$), то получаем прямую $y=2(-x+l)$. При любом целом $x$ получится целое значение $y$, а чтобы точка оказалась внутри параллелограмма нужно, чтобы $0\leqslant y\leqslant 24\Leftrightarrow l-12\leqslant x\leqslant l$. При любом $l$ этому неравенству удовлетворяет 13 целых значений $x$. Если $b$ нечётное, то есть $b=2l+1$, имеем $0\leqslant -2x+2l+1\leqslant 24\Leftrightarrow l-\frac{23}{2}\leqslant x\leqslant l+\frac{1}{2}$. Учитывая, что $x\in\mathbb{Z}$, получаем $l-11\leqslant x\leqslant l$ – всего 12 целочисленных значений.

Если $k = 2l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$ можно выбрать по 13 точек – всего $10 \cdot 13 \cdot 13 = 1\,690$ способов. Если $k = 2l + 1$ (таких значений 9), то на каждой из двух прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 12$ можно выбрать по 12 точек – имеем $9 \cdot 12 \cdot 12 = 1\,296$ способов. Итого получаем $1\,690 + 1\,296 = 2\,986$ способов.

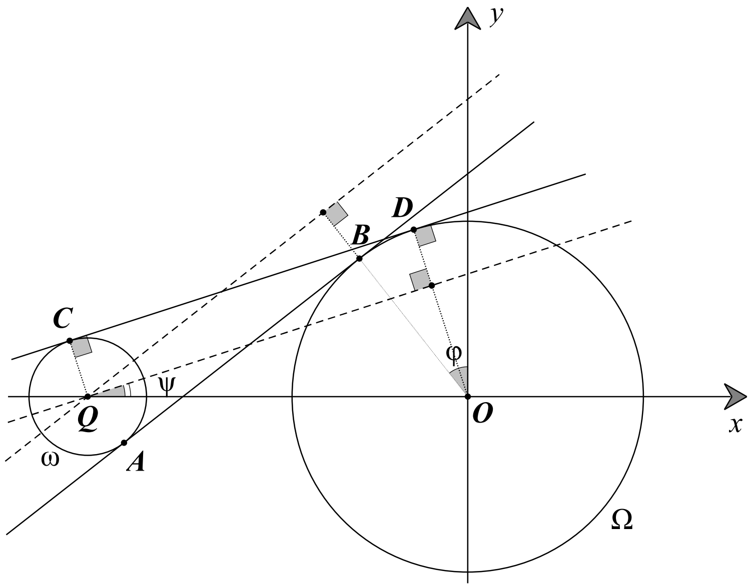
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдется значение параметра $b$, при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ \left((x+8)^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

**Ответ:** $a \in \left\{\pm\frac{1}{3\sqrt{7}}; \pm\frac{3}{\sqrt{55}}\right\}$.

**Решение.** Рассмотрим неравенство системы. Его левая часть обращается в ноль на окружностях $(x+8)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$. Внутри каждой из окружностей один из множителей в левой части положителен, а второй – отрицателен. В области вне окружностей оба множителя положительны. Таким образом, неравенство определяет совокупность двух кругов $\Omega$ и $\omega$ с центрами в точках $O(0;0)$ и $Q(-8;0)$ с радиусами 2 и 1 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = ax + 10b$ с угловым коэффициентом $k = a$. При фиксированном значении $a$ – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = a$.




Чтобы система имела ровно 2 решения, прямая должна касаться обоих кругов. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю равен угловому коэффициенту общей касательной к окружностям (тогда за счёт выбора параметра $b$ можно подобрать такое положение прямой, что она касалась обеих окружностей).

Проведём общую внутреннюю касательную $AB$ к окружностям, имеющую положительный наклон (пусть $A$ и $B$ – точки касания этой прямой с $\omega$ и $\Omega$ соответственно). Пусть $\ell$ – прямая, параллельная $AB$ и проходящая через точку $Q$; пусть также $\ell \cap OB = H$, $\angle HQO = \varphi$ ($QH \parallel AB$, поэтому $\varphi$ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 8$, $HO = HB + BO = QA + BO = 1 + 2 = 3$, то из прямоугольного треугольника $HOQ$ имеем $QH = \sqrt{OQ^2 - HO^2} = \sqrt{55}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{HO}{QH} = \frac{3}{\sqrt{55}}$.

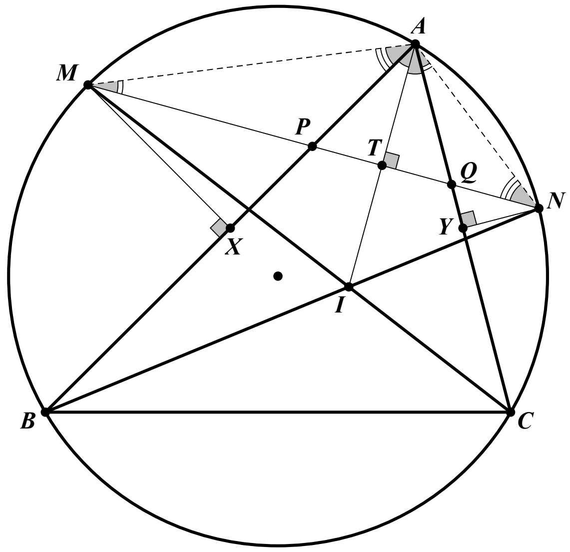
Аналогично рассматриваем случай общей внешней касательной. Пусть $CD$ – общая внешняя касательная с положительным наклоном ($C$ и $D$ – её точки касания с $\omega$ и $\Omega$ соответственно). Опускаем из точки $Q$ перпендикуляр $QT$ на радиус $DO$ большей окружности. Тогда $\psi = \angle OQT$ и есть угол наклона общей внешней касательной. Имеем $OT = OD - QC = 1$, $QT = \sqrt{OQ^2 - OT^2} = \sqrt{63}$, $\operatorname{tg}\psi = \frac{OT}{QT} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$.

Так как подходят и положительные, и отрицательные значения наклона, окончательно получаем $a = \pm\frac{3}{\sqrt{55}}$ или $a = \pm\frac{1}{3\sqrt{7}}$.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности,

которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 4,5 и 2.

**Ответ:** 6.




**Решение.** Пусть отрезок $MN$ пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно; $I$ – центр вписанной окружности треугольника; $X$ и $Y$ – проекции точек $M$ и $N$ на стороны $AB$ и $AC$ соответственно. Обозначим также точку пересечения прямых $AI$ и $MN$ через $T$. Углы $AMN$ и $CAN$ равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги; аналогично $\angle BAM = \angle ANM$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle APQ = \angle PAM + \angle PMA$, а $\angle AQP = \angle QAN + \angle QNA$, поэтому $\angle APQ = \angle AQP$. Значит, треугольник $APQ$ равнобедренный, $AI$ – его биссектриса, следовательно, $AI \perp PQ$. Далее рассмотрим три пары подобных треугольников и запишем пропорциональность сторон в них:

$$\triangle AQN \sim \triangle MPA \Rightarrow \frac{AQ}{MP} = \frac{QN}{AP};$$

$$\triangle QAT \sim \triangle QNY \Rightarrow \frac{AT}{YN} = \frac{AQ}{QN};$$

$$\triangle ATP \sim \triangle MXP \Rightarrow \frac{MX}{AT} = \frac{MP}{AP}.$$

Разделив второе равенство на третье, получаем $\frac{AT^2}{MX \cdot YN} = \frac{AP \cdot AQ}{MP \cdot NQ}$. Но из первого равенства следует, что $AP \cdot AQ = MP \cdot QN$, откуда $AT^2 = MX \cdot YN = 9$. Остаётся отметить, что $\angle MNB = \angle MNA$ (так как эти углы опираются на равные дуги), поэтому $NM$ – биссектриса угла $ANB$. Значит, в $\triangle ANI$ отрезок $NT$ – биссектриса и высота, треугольник равнобедренный, а $NT$ также является его медианой и $AT = TI$. Итак, $AI = 2AT = 2\sqrt{9} = 6$.

## 10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^{15}7^{11}$, $bc$ делится на $2^{17}7^{18}$, $ac$ делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

**Ответ:** $2^{28}7^{39}$.

**Решение.** Чтобы произведение $abc$ было минимальным, числа $a$, $b$, $c$ не должны иметь простых делителей, отличных от 2 и 7. Пусть $a = 2^{\alpha_1}7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2}7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3}7^{\beta_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2 и 7.
1) Из того, что $ab$ делится на $2^{15}$, следует, что $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 15$. Аналогично, $\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 17$ и $\alpha_1+\alpha_3 \geqslant 23$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant \frac{15+17+23}{2} = 27{,}5$. Значит, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 28$. Покажем, что значение $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 28$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 11$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1+\alpha_2 = 16$, $\alpha_2+\alpha_3 = 17$, $\alpha_1+\alpha_3 = 23$).
2) Из того, что $ac$ делится на $7^{39}$ следует, что $\beta_1+\beta_3 \geqslant 39$. Заметим, что $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \beta_1+\beta_3 \geqslant 39$. $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ может равняться 39, если, например, $\beta_1 = 20$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 19$.
Так как минимум каждой из сумм $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ не зависит от другого, то и минимальное значение $abc$ равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}7^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} = 2^{28}7^{39}.$$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$. При каком наибольшем $m$ могло оказаться, что дробь сократима на $m$?

**Ответ:** 9.

**Решение.** Пусть $d = \text{НОД}\,(a^2-7ab+b^2; a+b)$. Так как $a^2-7ab+b^2 = a(a+b)-8ab+b^2 = a(a+b)-8b(a+b)+9b^2$, т.е. $9b^2 = (a^2-7ab+b^2)+(8b-a)(a+b)$, из этого равенства следует, что $9b^2$ делится нацело на $d$. Аналогично доказывается что $9a^2$ делится нацело на $d$. Поэтому $d \leqslant \text{НОД}\,(9b^2; 9a^2) = 9\cdot\text{НОД}\,(a^2; b^2) \leqslant 9$, так как числа $a$ и $b$ взаимно просты и $\text{НОД}(a; b) = 1$. Докажем, что значение $d = 9$ может достигаться. Для этого достаточно взять $a = 1$, $b = 17$ – при этом дробь равна $\frac{18}{171} = \frac{2}{19}$.

3. [4 балла] Центр окружности $\omega$ лежит на окружности $\Omega$, хорда $AB$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $C$ так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину $AB$, если известно, что радиусы $\omega$ и $\Omega$ равны 7 и 13 соответственно.

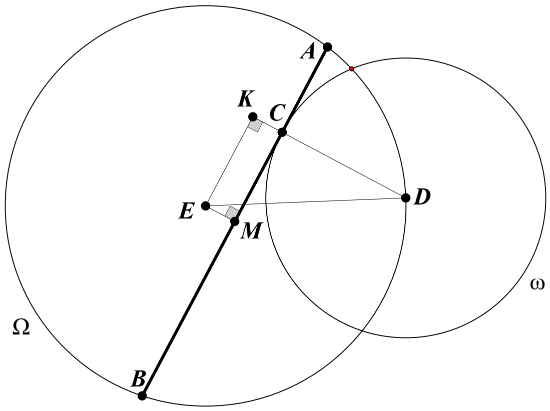
**Ответ:** $AB = 24$.

**Решение.** Пусть точки $D$ и $E$ – центры $\omega$ и $\Omega$ соответственно, а точки $K$ и $M$ – проекции точки $E$ на прямые $CD$ и $AB$ соответственно. Так как $\omega$ касается прямой $AB$ в точке $C$, то $\angle KCM = 90°$; тогда в четырёхугольнике $CMEK$ три угла прямые, и он прямоугольник. Обозначим $AB = 24x$, $ME = y$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, поэтому $M$ – середина $AB$; тогда $BM = \frac{1}{2}AB = 12x$, $EK = CM = BM - BC = BM - \frac{7}{24}AB = 12x - 7x = 5x$ и $DK = DC + CK = DC + EM = 7 + y$. Запишем теорему Пифагора для треугольников $BEM$ и $DEK$ и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases}(12x)^2 + y^2 = 13^2,\\ (7+y)^2 + (5x)^2 = 13^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = \frac{169}{144} - \frac{y^2}{144},\\ 49 + 14y + y^2 + \frac{4225}{144} - \frac{25y^2}{144} = 169\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = \frac{169}{144} - \frac{y^2}{144},\\ 17y^2 + 288y - 1865 = 0.\end{cases}$$

Последнее уравнение имеет одно положительное решение $y = 5$; отсюда $x = 1$ и $AB = 24x = 24$.




4. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$.

**Ответ.** $x=\frac{1}{9}$.

**Решение.** Заметим, что правая часть уравнения есть разность подкоренных выражений в левой части уравнения. Обозначим $u=\sqrt{3x^2-6x+2}$, $v=\sqrt{3x^2+3x+1}$. Тогда $1-9x=u^2-v^2$, и уравнение принимает вид

$$u-v=u^2-v^2 \Leftrightarrow (u-v)(1-u-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v, \\ u+v=1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет единственное решение $x=\frac{1}{9}$ (принадлежащее области допустимых значений). Покажем, что левая часть второго уравнения $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$ больше правой при всех допустимых значениях $x$ (что означает, что у уравнения нет решений). Если $\sqrt{3x^2+3x+1}>1$, то утверждение очевидно. Рассмотрим случай, когда $\sqrt{3x^2+3x+1}\leqslant 1$. Это выполняется при $0\leqslant 3x^2+3x+1\leqslant 1$, т.е. при $x\in[-1;0]$. При таких значениях аргумента $3x^2-6x\geqslant 0$, поэтому $\sqrt{3x^2-6x+2}\geqslant\sqrt{2}$ и $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}>1$. Итак, уравнение имеет единственное решение $x=\frac{1}{9}$.

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

**Ответ:** 3 481.

**Решение.** Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ в виде $2x_2+y_2-14=2x_1+y_1$. Так как координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения $k$. Пара точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y=-2x+k$ и $y=-2x+k+14$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра $k$.

Стороны $OP$ и $QR$ параллелограмма лежат на прямых $y=-2x$ и $y=-2x+32$, поэтому они параллельны прямым $y=-2x+k$ и $y=-2x+k+14$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0\leqslant k\leqslant 32$ и $0\leqslant k+14\leqslant 32$, поэтому $k\in[0;18]$.

Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y=-2x+b$. Если $b$ чётное (т.е. $b=2l$), то получаем прямую $y=2(-x+l)$. При любом целом $x$ получится целое значение $y$, а чтобы точка оказалась внутри параллелограмма нужно, чтобы $0\leqslant y\leqslant 26\Leftrightarrow l-13\leqslant x\leqslant l$. При любом $l$ этому неравенству удовлетворяет 14 целых значений $x$. Если $b$ нечётное, то есть $b=2l+1$, имеем $0\leqslant -2x+2l+1\leqslant 26\Leftrightarrow l-\frac{25}{2}\leqslant x\leqslant l+\frac{1}{2}$. Учитывая, что $x\in\mathbb{Z}$, получаем $l-12\leqslant x\leqslant l$ – всего 13 целочисленных значений.

Если $k = 2l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 14$ можно выбрать по 14 точек – всего $10 \cdot 14 \cdot 14 = 1\,960$ способов. Если $k = 2l + 1$ (таких значений 9), то на каждой из двух прямых $y = -2x + k$ и $y = -2x + k + 14$ можно выбрать по 13 точек – имеем $9 \cdot 13 \cdot 13 = 1\,521$ способ. Итого получаем $1\,960 + 1\,521 = 3\,481$ способ.

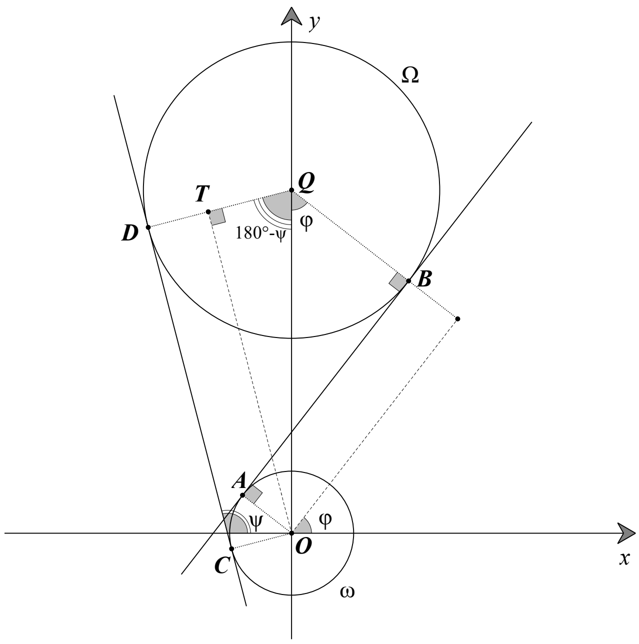
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдется значение параметра $b$, при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)\left(x^2 + (y-12)^2 - 16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

**Ответ:** $a \in \left\{\pm\sqrt{15}; \pm\frac{\sqrt{119}}{5}\right\}$.

**Решение.** Рассмотрим неравенство системы. Его левая часть обращается в ноль на окружностях $x^2 + (y-12)^2 = 16$ и $x^2 + y^2 = 1$. Внутри каждой из окружностей один из множителей в левой части положителен, а второй – отрицателен. В области вне окружностей оба множителя положительны. Таким образом, неравенство определяет совокупность двух кругов $\omega$ и $\Omega$ с центрами в точках $O(0;0)$ и $Q(0;12)$ с радиусами 1 и 4 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = -ax + 8b$ с угловым коэффициентом $k = -a$. При фиксированном значении $a$ – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = -a$. Чтобы система имела ровно 2 решения, прямая должна касаться обоих кругов. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю равен угловому коэффициенту общей касательной к окружностям (тогда за счёт выбора параметра $b$ можно подобрать такое положение прямой, что она касалась обеих окружностей).




Проведём общую внутреннюю касательную $AB$ к окружностям, имеющую положительный наклон (пусть $A$ и $B$ – точки касания этой прямой с $\omega$ и $\Omega$ соответственно). Пусть $\ell$ – прямая, параллельная $AB$ и проходящая через точку $Q$; пусть также $\ell \cap QB = H$, $\angle HQO = \varphi$ ($QH \perp AB$, поэтому $\varphi$ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 12$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 1 + 4 = 5$, то из прямоугольного треугольника $HOQ$ имеем $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{119}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{OH}{QH} = \frac{\sqrt{119}}{5}$.

Аналогично рассматриваем случай общей внешней касательной. Пусть $CD$ – общая внешняя касательная с отрицательным наклоном ($C$ и $D$ – её точки касания с $\omega$ и $\Omega$ соответственно). Опускаем из точки $O$ перпендикуляр $OT$ на радиус $DQ$ большей окружности. Тогда если $\psi$ – угол наклона рассматриваемой касательной, то $\angle OQT = 180^\circ - \psi$. Имеем $QT = QD - DT = 3$, $OT = \sqrt{OQ^2 - QT^2} = 3\sqrt{15}$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \psi) = \frac{OT}{QT} = \sqrt{15}$, $\operatorname{tg}\psi = -\sqrt{15}$.

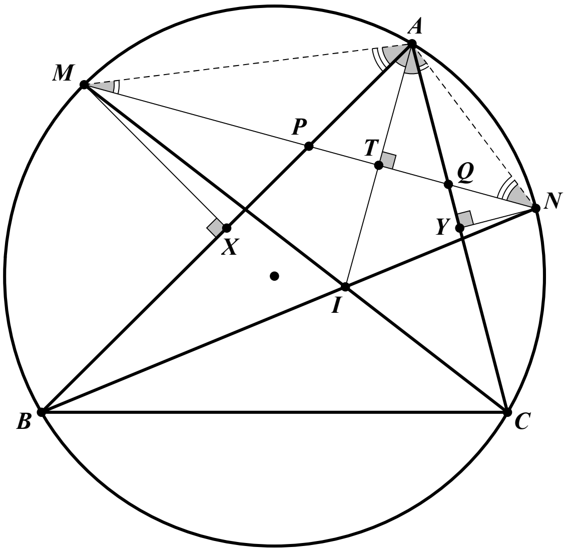
Так как подходят и положительные, и отрицательные значения наклона, окончательно получаем $a = \pm\sqrt{15}$ или $a = \pm\frac{\sqrt{119}}{5}$.

7. [6 баллов] Треугольник $ABC$ вписан в окружность. Пусть $M$ – середина той дуги $AB$ описанной окружности, которая не содержит точку $C$; $N$ – середина той дуги $AC$ описанной окружности,

которая не содержит точку $B$. Найдите расстояние от вершины $A$ до центра окружности, вписанной в треугольник $ABC$, если расстояния от точек $M$ и $N$ до сторон $AB$ и $AC$ соответсвенно равны 5 и 2,5.

**Ответ:** $5\sqrt{2}$.




**Решение.** Пусть отрезок $MN$ пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно; $I$ – центр вписанной окружности треугольника; $X$ и $Y$ – проекции точек $M$ и $N$ на стороны $AB$ и $AC$ соответственно. Обозначим также точку пересечения прямых $AI$ и $MN$ через $T$. Углы $AMN$ и $CAN$ равны как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги; аналогично $\angle BAM = \angle ANM$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle APQ = \angle PAM + \angle PMA$, а $\angle AQP = \angle QAN + \angle QNA$, поэтому $\angle APQ = \angle AQP$. Значит, треугольник $APQ$ равнобедренный, $AI$ – его биссектриса, следовательно, $AI \perp PQ$. Далее рассмотрим три пары подобных треугольников и запишем пропорциональность сторон в них:

$$\triangle AQN \sim \triangle MPA \Rightarrow \frac{AQ}{MP} = \frac{QN}{AP};$$

$$\triangle QAT \sim \triangle QNY \Rightarrow \frac{AT}{YN} = \frac{AQ}{QN};$$

$$\triangle ATP \sim \triangle MXP \Rightarrow \frac{MX}{AT} = \frac{MP}{AP}.$$

Разделив второе равенство на третье, получаем $\frac{AT^2}{MX \cdot YN} = \frac{AP \cdot AQ}{MP \cdot NQ}$. Но из первого равенства следует, что $AP \cdot AQ = MP \cdot QN$, откуда $AT^2 = MX \cdot YN = \frac{25}{2}$. Остаётся отметить, что $\angle MNB = \angle MNA$ (так как эти углы опираются на равные дуги), поэтому $NM$ – биссектриса угла $ANB$. Значит, в $\triangle ANI$ отрезок $NT$ – биссектриса и высота, треугольник равнобедренный, а $NT$ также является его медианой и $AT = TI$. Итак, $AI = 2AT = 2\sqrt{\frac{25}{2}} = 5\sqrt{2}$.