



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



R

- ✓1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

- ✓2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- ✓3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

- ✓5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- ✓6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

- ✓7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим полученные значения т.к. если и
подходят, но только они, но нужна проверка.
~~Всё~~

$x = 3$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4} = ab^6$$

$$5-x = 2 = ab^6$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = 4 = ab^{14}$$

$$\text{Итак: } a = \frac{1}{32} \quad b = \sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } x \in \{-5, 3\}$$

$x = -5$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \sqrt{\frac{5(13+1)}{4^3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 14}{4^3}} = ab^6 = \frac{5}{4}$$

$$5-x = 10 = ab^{12}$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} = \sqrt{5 \cdot 14 \cdot 4} = ab^{14} = 5 \cdot 4$$

$$b = \sqrt{2} \quad a = \frac{5}{32}$$

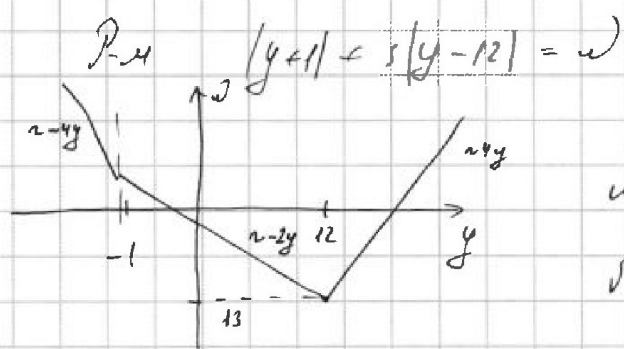


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$w_{\min} = 13$$

$$\sqrt{169 - z^2} \max = 13$$

$$w = 13 = \sqrt{169 - z^2}$$

$$\begin{cases} y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+5} \rightarrow \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(x+5)}$$

$$2\sqrt{(4-x)(x+5)} + \sqrt{4-x} - \sqrt{x+5} - 5 = 0$$

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{4-x})^2 = (2\sqrt{(4-x)(x+5)})^2$$

$$x+5 - 2\sqrt{(4-x)(x+5)} + 4-x = 4(4-x)(x+5)$$

$$4(4-x)(x+5) + 2\sqrt{(4-x)(x+5)} - 7 = 0$$

$$2\sqrt{(4-x)(x+5)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$$

$$(4-x)(x+5) = \frac{30 \pm 2\sqrt{29}}{16}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4-x - 2\sqrt{(4-x)(x+3)} + 3+x + \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} - 2 = 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} & ① \\ t = -2 = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} & ② \end{cases}$$

$$\text{У } ① \quad \sqrt{(x+3)(4-x)} = 3$$

$$x - x^2 + 12 = 9$$

$$x^2 - x + 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$\text{У } ② \quad 2\sqrt{(x+3)(4-x)} = 3$$

$$4x - 4x^2 + 48 = 9$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 39}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Ans: } \begin{cases} x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}, \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} \right\} & ② \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$4 - \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{11}}{2} > 0$$

$$3 + \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{11}}{2} > 0$$

$$4 - \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{2} > 0$$

$$3 + \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} > 0$$

$$\sqrt{x+3} \text{ и } \sqrt{4-x} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ans: } \begin{cases} x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}, \frac{1 \pm 2\sqrt{10}}{2} \right\} \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$$

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

$$\cos x (4 \cos^2 x - 3) + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$$

$$|\cos x = t|$$

$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$4\left(t^3 + 3t^2 \frac{1}{2} + 3t \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) - 3 - \frac{1}{2} = p$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^3 = p + 3,5$$

$$t + \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p+3,5}{4}}$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} \in [-1; 1]$$

$$\frac{2p+7}{8} \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{27}{8}\right]$$

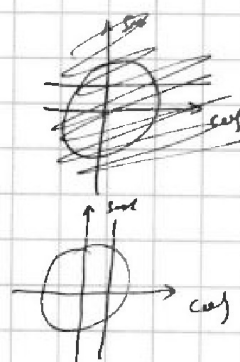
$$2p+7 \in [-1; 27]$$

$$2p \in [-8; 20]$$

$$p \in [-4; 10] \text{ — при таких } p \text{ } \exists \text{ решения}$$

и эти решения

$$x = \pm \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$





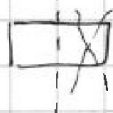
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получается если взять и "агрегат" поворачивать по узким линиям, но в зависимости от ширины мы можем выставлять одновременно один вариант раскрашивания.

симметрич
 - агрегат, но
можем выставлять

в случае с узкой линией
тоже можем выставлять.

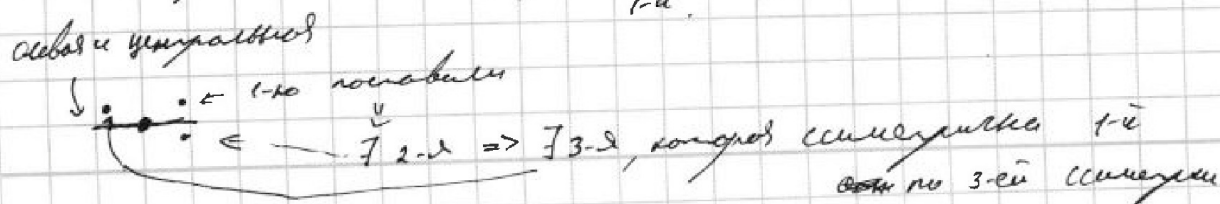
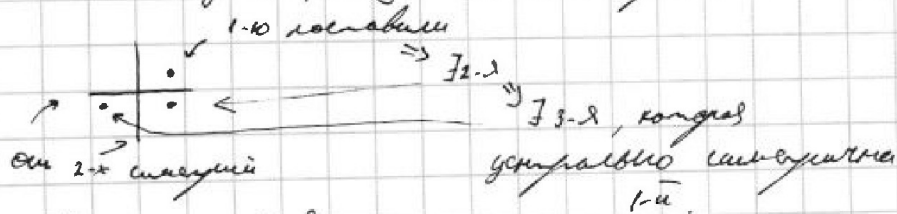

Получим формулу для каждой симметрии

$$\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 250 = 25.000$$

C_{25000}^4 случаев, ~~когда~~ как на половине можно раскрасить 4 клетки и ещё 4 для восстановления. Но есть случаи когда

раскраска бывает 2 или 3 симметрии.

В случае, когда 2 симметрии $\Rightarrow$ здесь все 3.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. теперь доказано, что может быть только 1 или сразу 3, но не 2 симметрично.

И т.к. ~~тогда~~ клетки не лежат на средних линиях и центрах

любой раскрас симметричной фигуры ~~заданной~~ можно восстановить по таблице раск. и закрашенным пар 2-х клеткам.

П.е. наша рекурсия C_{1500}^2 .

Ответ: $C_{25000}^4 - 2 C_{1500}^2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|a-c| \text{ и } |b-c| - 1 \text{ и } p^2 \text{ при том же значении}$$

$$\Rightarrow a-c - (b-c) = a-b = p^2 - 1$$

$$a-b+1 = p^2$$

$$a+b^2=560$$

$$a+b^2+p^2=560+a-b+1$$

$$p^2 = 561 - b - b^2 \Rightarrow p^2 \in [4; 9; 25; 49; 121; 169; 289;$$

$$b \in [-24; 23]$$

$$b \neq 1$$

$$561; 529]$$

$$b^2+b \in [32; 200; 242; 332; 440; 512; 536; 552; 557]$$

$$\text{и } b \neq 1$$



$$b \in [16; -17; 23; -24]$$

$$b \in [23; -24]$$

$$b(b+1) : 2 \text{ кратно}$$

$$\text{значит } (b+1) : 2$$

$$\text{далее перебор и отбрасывание}$$

$$\begin{cases} b = 23 & p^2 = 9 \\ a = 560 - 23^2 = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -24 & p^2 = 9 \\ a = 31 - 48 = -16 \end{cases}$$

$$p^2 = 9 = (a-c)(b-c)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 31 \\ b = 23 \\ c = 22 \\ c = 32 \end{cases}$$

$\Leftarrow$

$$\begin{cases} a = -16 \\ b = -24 \\ c = -25 \\ c = 15 \end{cases}$$

Ответ: (31; 23; 22)
(31; 23; 32)
(-16; -24; -25)
(-16; -24; 15)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$560 = a + b^2 > b^2 + b$$

$$b^2 + b - 560 < 0$$

↑
 параболы ветви вверх вершина $(-\frac{1}{2} = -0.5)$

$$\text{Тогда } b = 23 \quad b^2 + b - 560 = 529 + 23 - 560 = -8 < 0$$

$$b = 24 \quad b^2 + b - 560 = 529 + 23 + 24 + 23 + 1 - 560 = -8 + 48 > 0$$

$$b = -23 \quad b^2 + b - 560 = 529 - 23 - 560 = -54 < 0$$

$$b = -24 \quad b^2 + b - 560 = -54 + 24 + 23 - 1 = -8 < 0$$

$$b = -25 \quad b^2 + b - 560 = -8 + 25 - 24 - 1 > 0$$

$$b \in [-24; 23]$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ p-простое число}$$

$$a-c = b-c, \text{ но не может быть}$$

$$\text{таким образом } (a-c) \text{ и } (b-c) \text{ это } 1 \text{ и } p^2$$

$$560 \equiv 2$$

$$\begin{cases} b^2 \equiv 1 \\ b^2 \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \\ a \equiv 1 \\ a \equiv 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 2 \\ b \equiv 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \equiv 1 \\ b \equiv 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b \neq 1$$



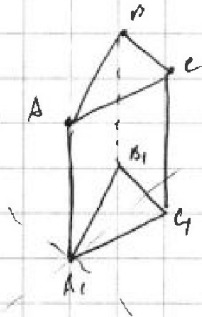
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☒

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По орг. принципу $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$

$AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $A_1C_1 \parallel AC$.

$$\text{Поскольку } S_{KOA_1B_1} = S_{ACAA_1} = 4$$

$$S_{KOB_1C_1} = 3$$

т.к. основ.

равны

A равно удалено от A_1B_1 и A_1C_1 .

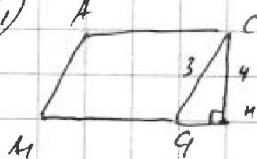
Треугольник A на $(A_1B_1C_1)$ имеет $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ лежит на биссектрисе угла $B_1A_1C_1$ или
на медиане с ним.

В случае биссектрисы угла $B_1A_1C_1$ у нас очевидно
возникает симметрия относительно плоскости.

AA_1 и биссектриса $\Rightarrow$ т.к. $B_1C_1 = BC$ то биссектриса

симметрична $\Rightarrow BC \perp B_1C_1$ - прямоугольный. и $CC_1 = 3$

д.л. (ACC_1A_1)



$$CH \perp A_1C_1$$

$$CH = 4 \leq CC_1 = 3, \text{ то}$$

противоречие

Треугольник A на $(A_1B_1C_1)$ имеет
на биссектрисе угла с $B_1A_1C_1$
и заметим т.к. в $\triangle B_1C_1C$ угол $\parallel$
 B_1C_1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\vec{A_1A} = \vec{h} + k \vec{B_1C_1}$
↑ ↑
высота косинус

$$|\vec{A_1A} \times \vec{B_1C_1}| = s = \left| (\vec{h} \times \vec{B_1C_1}) \right| = h \cdot B_1C_1 = h$$
$$h = s$$

$$y = |\vec{A_1A} \times \vec{A_1B_1}| = \left| [\vec{h} \times \vec{A_1B_1}] + k [\vec{B_1C_1} \times \vec{A_1B_1}] \right|$$

При $k=0$ это равенство $\Rightarrow \exists k$, что это ч.

$$\boxed{\text{Ответ: } h = s}$$

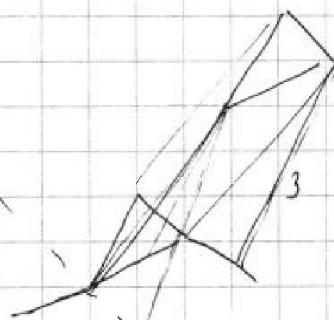
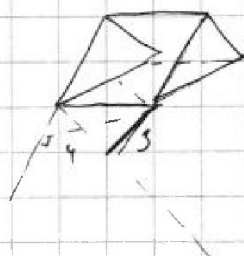
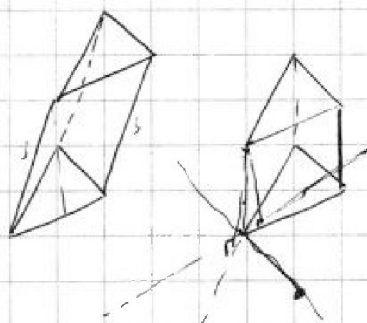


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

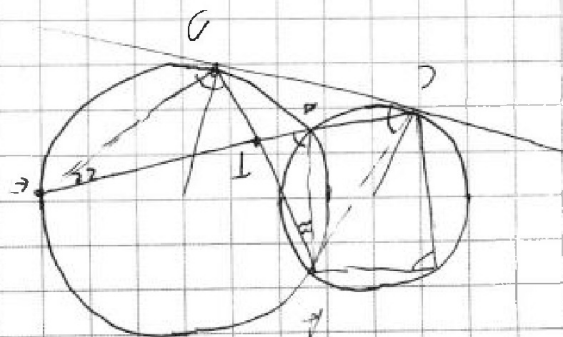
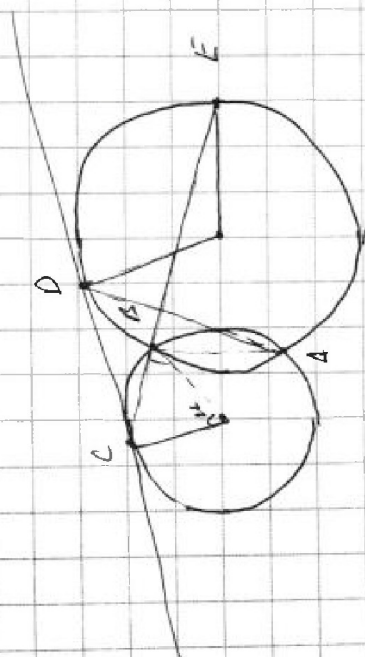
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$| \vec{h} + \vec{a} | = 3$$

$$| (\vec{h} + \vec{a}) + \vec{a} | = 3$$

$$| (\vec{h} + \vec{a}) + \vec{b} | = 4$$



$(a-b) + 12 = (a+b)^2$
 $\cos x + 5 \cos 2x + 6 \cos x = p$
 $\cos x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
 $\cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$
 $\cos x (4 \cos^2 x - 3) + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = p$
 $4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = p$
 $\cos^3 x + 3 \cos x (\cos x + 1)^2 - 3 = p$
 $4 \cos x + \frac{3}{2} \cos^2 x + \frac{3}{4} \cos x - \frac{3}{4} = \frac{p}{4}$
 $(\cos x + \frac{1}{2})^3 - \frac{3}{4} = \frac{p}{4}$
 $560 < 6^2 + 6$
 $6^2 + 6 - 560 < 0$
 $|[7+9]| = |dx|$
 $ED = AB \cdot \frac{AT}{TE} = AB \cdot \frac{BT}{AT}$
 625
 94
 89
 81
 82
 2
 1
 $a \neq 2$
 $a \neq 1$
 $b \neq 3$
 $b \neq 2$
 $a =$
 $b = 255 - 195$