МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

1) Пусть x; y — такие числа. Заметим, что $f(x)=f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.
То есть $f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$.

2) $f(2\cdot1)=f(2)+f(1) \Rightarrow f(1)=f(2)-f(2)=0$

$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(4)=2f(2)=2$
$f(5)=2$
$f(6)=f(2)+f(3)=2$
$f(7)=3$
$f(8)=f(4)+f(2)=3$
$f(9)=2f(3)=2$
$f(10)=f(2)+f(5)=3$
$f(11)=5$
$f(12)=f(6)+f(2)=3$
$f(13)=6$
$f(14)=f(2)+f(7)=4$
$f(15)=f(5)+f(3)=3$
$f(16)=2f(4)=4$
$f(17)=8$
$f(18)=f(9)+f(2)=3$
$f(19)=9$
$f(20)=f(10)+f(2)=4$
$f(21)=f(7)+f(3)=4$

3) Пусть $k(n)$ — кол-во натур. чисел $t\in[1;21]$, таких, что $f(t)=n$.
Тогда: $k(0)=1$; $k(1)=2$; $k(2)=4$; $k(3)=6$; $k(4)=4$; $k(5)=1$; $k(6)=1$; $k(8)=1$; $k(9)=1$.

4) Найдём кол-во натур. пар $(x;y)$, таких, что $\begin{cases} x\in[1;21] \\ y\in[1;21] \\ x\neq y \\ f(x)=f(y) \end{cases}$ (с учётом перестановок)

Несложно показать, что оно равно $N_{f(x)=f(y)} = 2+4\cdot3+6\cdot5+4\cdot3 = 2+12+12+30=30+26=56$.

5) Очевидно, что количество натур. пар $(x;y)$, таких, что $\begin{cases} x\in[1;21], \\ y\in[1;21], \\ x\neq y, \\ f(x)<f(y); \end{cases}$

равно $N_{f(x)<f(y)} = \dfrac{21\cdot20-N_{f(x)=f(y)}}{2} = \dfrac{420-56}{2} = 210-28=182$ (поскольку, если $f(a)\neq f(b)$, то ровно одна из пар $(a;b)$ и $(b;a)$ подходит)

Но очевидно, что при $x=y$: $f(x)=f(y)$, т. е. такие пары не подходят.

Ответ: 182.

4

№3

1) $y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ 4x^2-4xy+y^2=xy-2x-y+2 \end{cases}$ ⊛

$4x^2-4xy+y^2-xy+2x+y-2=0$

$4x^2-5xy+y^2+2x+y-2=0$

$(x-y+1)(4x-y-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=4x-2 \end{array}\right.$

2) $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2(x-1)^2-2+(y-2)^2-4+3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$, но $\left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=4x-2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x+1 \\ 2(x-1)^2+(x-1)^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x-2 \\ 2(x-1)^2+(4x-4)^2=3 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x+1 \\ (x-1)^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4x-2 \\ (x-1)^2=\frac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right.$

1) $x=2$; $y=3$ — не удовл. ⊛

2) $x=0$; $y=1$ — удовл. ⊛

3) $x=1+\frac{1}{\sqrt6}$; $y=2+\frac{4}{\sqrt6}$ — удовл. ⊛

4) $x=1-\frac{1}{\sqrt6}$; $y=2-\frac{4}{\sqrt6}$ — не удовл. ⊛

Ответ: $(0;1)$; $\left(1+\frac{1}{\sqrt6}; 2+\frac{4}{\sqrt6}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) Пусть q — знаменатель этой геом. прогрессии. Тогда $b=aq$; $c=aq^2$; а четвёртый член равен aq^3.

2) Тогда получаем: $a\cdot(aq^3)^2+2\cdot(aq)\cdot(aq^3)+aq^2=0$

$a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0$

$aq^2(aq^2+1)^2=0$

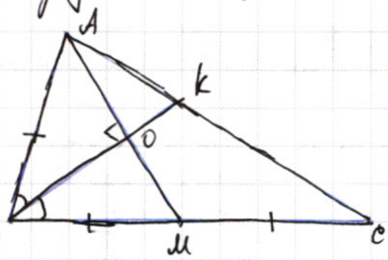
$c(c+1)^2=0$

Очевидно, что $c\neq 0$ как член геом. прогрессии. Значит, $c=-1$.

Ответ: -1.

№2

1) Покажем, что у любого такого Δ-ка какая-либо из сторон больше ~~как~~ другой в 2 раза.



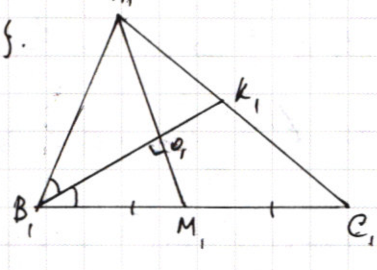
Пусть исходный Δ-к — $\triangle ABC$; BK — искод. бисс-а; AM — искод. медиана;

$[AM]\cap[BK]=\{O\}$. Тогда в $\triangle ABM$: BO — бисс. и высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABM$ — р/б (по пр-ку) $\Rightarrow AB=BM$ (по опр.), но $BM=CM$ (т.к. AM — мед.) $\Rightarrow AB=BM=CM$.

Тогда $BC=BM+CM=2AB$, ч.т.д.

2) Пусть в $\triangle A_1B_1C_1$: $B_1C_1=2A_1B_1$; B_1K_1 — бисс.; A_1M_1 — мед.; $[A_1M_1]\cap[B_1K_1]=\{O_1\}$.



Покажем, что $B_1K_1\perp A_1M_1$.

$A_1B_1=\frac{1}{2}B_1C_1=B_1M_1$ (т.к. A_1M_1 — мед.) $\Rightarrow \triangle A_1B_1M_1$ — р/б (по опр.), но в нём B_1O_1 — бисс. (по опред.), значит, B_1O_1 — выс. (по св-ву) $\Rightarrow B_1K_1\perp A_1M_1$, ч.т.д.

3) Из п. 1)–2) получаем, что условие равносильно тому, чтобы найти кол-во треуг-ков с целыми сторонами a, b и c таких, что $a+b+c=1200$ и $b=2a$. То есть, надо найти кол-во троек натуральных чисел a, b и c (без учёта перестановок), что

$$\begin{cases} a+b+c=1200 \\ b=2a \\ b-a<c<b+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+c=1200 \\ b=2a \\ a<c<3a \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда получаем: $\begin{cases} c=1200-3a \\ b=2a \\ a<1200-3a \\ 1200-3a<3a \end{cases}$ $\begin{cases} c=1200-3a \\ b=2a \\ 4a<1200 \\ 6a>1200 \end{cases}$ $\begin{cases} c=1200-3a \\ b=2a \\ a<300 \\ a>200 \end{cases}$

Очевидно, что таких троек $299-200=99$.

4) Однако заметим, что мы могли посчитать какую-то тройку несколько раз, а именно если $\left[\begin{array}{l} a=b; \\ a=c. \end{array}\right.$

Несложно показать, что при $200<a<300$: $a\neq b$ и $a\neq c$. ~~Однако~~, ~~$b=c$~~,

То есть никакая тройка не была посчитана несколько раз.

Ответ: 99.

№4

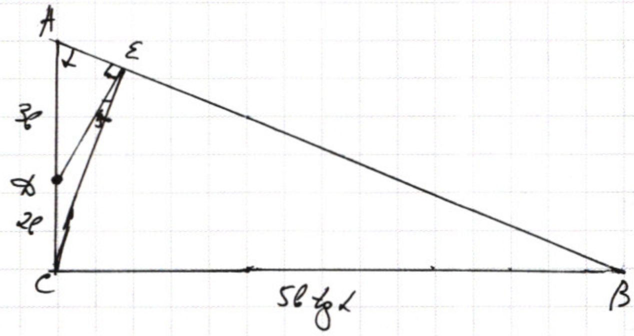
а)

1) Пусть $AD=3b$; $DC=2b$, $\angle A=\alpha$.

Тогда: $BC=5b\,tg\,\alpha$ (из $\triangle ABC$)

$DE=3b\sin\alpha$ (из $\triangle ADE$)

$\angle ACE=180^\circ-\alpha-90^\circ-45^\circ=45^\circ-\alpha$ (из $\triangle AEC$)



2) Из т. синусов в $\triangle CDE$: $\frac{3b\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)}=\frac{2b}{\sin 45^\circ}$

$2b\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}3b\sin\alpha \;\Big|\cdot\frac{\sqrt{2}}{b}$

$2\cos\alpha-2\sin\alpha=3\sin\alpha$

$5\sin\alpha=2\cos\alpha \quad |:\cos\alpha\neq0$

$5\,tg\,\alpha=2$

$tg\,\alpha=\frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

б) 1) $tg\,\alpha=\frac{2}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}}$. Тогда из т. синусов в $\triangle ACE$: $\frac{5b}{\sin 135^\circ}=\frac{CE}{\sin\alpha}$. Тогда:

$CE=\frac{\sqrt{29}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$

2) $\sin\angle ACE=\sin(45^\circ-\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{1}{2}\sin\alpha\left(\frac{1}{tg\,\alpha}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{29}}(2{,}5-1)=\frac{3}{2\sqrt{29}}$

3) $S_{DEC}=\frac{1}{2}CD\cdot CE\cdot\sin\angle DCE=\frac{1}{2}\cdot2b\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{29}}=\frac{3b\sqrt{2}}{\sqrt{29}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{29}}\cdot\frac{\sqrt{29}}{5}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

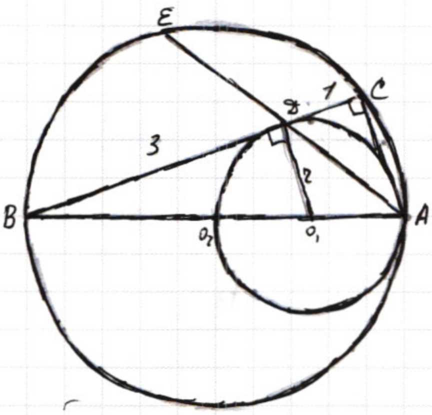
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5

1) Пусть O_1 и O_2 — центры меньшей и большей окр-тей соотв.

Пусть R — радиус Ω, а r — радиус ω. Тогда:

$AO_1 = r$; $O_1D = r$; $AB = 2R$; $BO_1 = 2R - r$.

2) $\angle O_1DB = 90°$ (т. к. CD — касат. к ω)

$\angle BCA = 90°$ (как опир. на диаметр).

Тогда $\triangle BO_1D \sim \triangle ABC$ (по 1 пр-ку) $\Rightarrow \frac{2R-r}{3} = \frac{2R}{4}$, т. е.:

$8R - 4r = 6R \Rightarrow 2R = 4r \Rightarrow R = 2r$.

3) Из т. Пифагора в $\triangle O_1DB$: $r^2 + 9 = (2R - r)^2$, т. е. $r^2 + 9 = (3r)^2 \Rightarrow 8r^2 = 9 \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, т. е. $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

4) $[AE] \cap [BC] = \{D\}$;

AE и BC — хорды Ω $\Rightarrow AD \cdot DE = BD \cdot DC$, т. е. $AD \cdot DE = 3$.

5) Из подобия $\triangle BO_1D$ и $\triangle ABC$: $\frac{AC}{r} = \frac{4}{3} \Rightarrow AC = \frac{4r}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

6) Из т. Пифагора в $\triangle ACD$: $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$,

но $AD \cdot DE = 3$ (из п. 4) $\Rightarrow DE = \sqrt{3}$, т. е. $AE = 2\sqrt{3}$

7) Из п/у $\triangle ACD$: $\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

8) $S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin\angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

№6

1) Уравнения-следствия:

$\frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2} + |2 \cdot \frac{1}{2} - 1|$, т. е. $\frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2}$ (1)

$2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 \le -\frac{1}{4}a + b$, т. е. $-\frac{5}{8} \le b - \frac{a}{4}$ (2)

$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - 1 \le \frac{3}{2}a + b$, т. е. $2 \le b + \frac{3a}{2}$ (3)

2) (3): $2 \le b + \frac{3a}{2} \,\Big|\cdot \frac{3}{4}$

$\frac{3}{2} \le \frac{3}{4}b + \frac{9}{8}a$ (4)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

3) (2): $-\frac{5}{8} \le b - \frac{a}{4}$

(4): $\frac{3}{2} \le \frac{3}{4}b + \frac{9}{8}a$ (+)

$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} \le \frac{7}{4}b + \frac{7}{8}a \Rightarrow \frac{7}{8} \le \frac{7}{4}b + \frac{7}{8}a \quad \Big| \cdot \frac{4}{7}$

$\frac{1}{2} \le b + \frac{1}{2}a \qquad (5)$

4) (5): $\frac{1}{2} \le b + \frac{1}{2}a$

(1): $\frac{1}{2} \ge b + \frac{1}{2}a$

$\Rightarrow b + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = 1 \Rightarrow a = 1 - 2b \qquad (6)$

~~8) Уравнение-следствие: ...~~

5) (2): $-\frac{5}{8} \le b - \frac{a}{4}$

(6): $a = 1 - 2b$

$\Rightarrow -\frac{5}{8} \le b - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}b$

$\frac{3}{2}b \ge -\frac{3}{8} \Rightarrow b \ge -\frac{1}{4} \qquad (7)$

6) (3): $2 \le b + \frac{3a}{2}$

(6): $a = 1 - 2b$

$\Rightarrow 2 \le b + \frac{3}{2} - 3b$

$2b \le -\frac{1}{2} \Rightarrow b \le -\frac{1}{4} \qquad (8)$

7) (7): $b \ge -\frac{1}{4}$

(8): $b \le -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow b = -\frac{1}{4};$

(6): $a = 1 - 2b$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Таким образом, если такие $(a; b)$ существуют, то $a = \frac{3}{2}$ и $b = -\frac{1}{4}$.

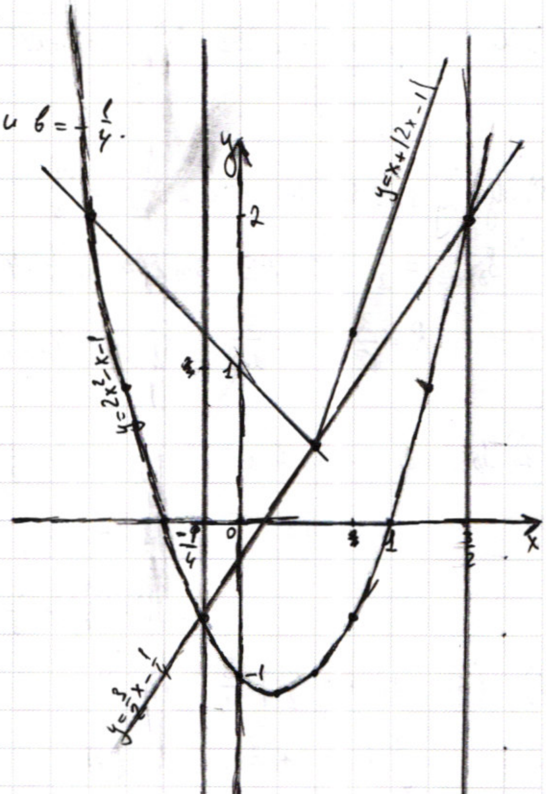
8) Проверка: $2x^2 - x - 1 \le \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \le x + |2x - 1|$.

~~a) $2x^2 - x - 1 \le \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$~~ Построим графики всех трёх функций.

~~$2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{4} \le 0$~~

Из рисунка очевидно, что $a = \frac{3}{2}$ и $b = -\frac{1}{4}$ подходят под условие задачи.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 182 \\ 28 \\ \hline 210 \end{array}$$

$\cancel{(a-1)(b-1)}$

$(a+b)(a+b-1)=(a+b)^2-a-b$

$2+\frac{4}{\sqrt6}-2-\frac{2}{\sqrt6}=\sqrt{2+\frac{6}{\sqrt6}+\frac{2}{3}-2-\frac{4}{\sqrt6}-2-\frac{4}{\sqrt6}+2}$

$\frac{2}{\sqrt6}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$

$\frac{2}{\sqrt6}+\frac{8}{3}=\frac{16}{6}+\frac{2}{6}=\frac{18}{6}=3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=2$
$y=3$

$\boxed{y \geq 2x}$

2) $y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$\Downarrow$

$4x^2-4xy+y^2=xy-2x-y+2$

$4x^2-5xy+y^2+2x+y-2=0$

$4a^2+4a+4-5(ab+2a+b+2)+b^2+4b+4+2a+2+b$

$2(x^2-2x)+y^2-4y+3=0$

$2(x-1)^2-2+(y-2)^2-4+3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

~~$(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2=3$~~ $\quad 2a^2+b^2=3$

$a=x-1 \Rightarrow x=a+1$

$b=y-2 \Rightarrow y=b+2$

$\begin{cases}4a^2+b^2-4a-5ab=0\\ 2a^2+b^2=3\end{cases} \Leftrightarrow 2a^2-4a=5ab-3 \Rightarrow 2a-4=5b \Rightarrow b=\frac{2a^2-4a+3}{5a}$

$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3$

$a(aq^3)^2+2\cdot aq\cdot aq^3+aq^2=0$

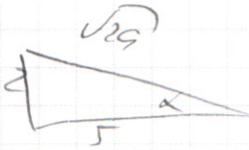
$a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0 \mid :aq^2\neq 0$

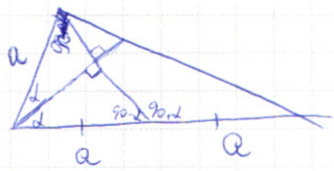
$a^2q^4+2aq^2+1=0$

$(aq^2+1)^2=0$

aq^2

$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{x}{\cos\alpha}$





$s(a;2a;c)$; где $a<c<3a$

1) $b=c$

$1200-3a=2a$

$5a=1200$

$a=240$

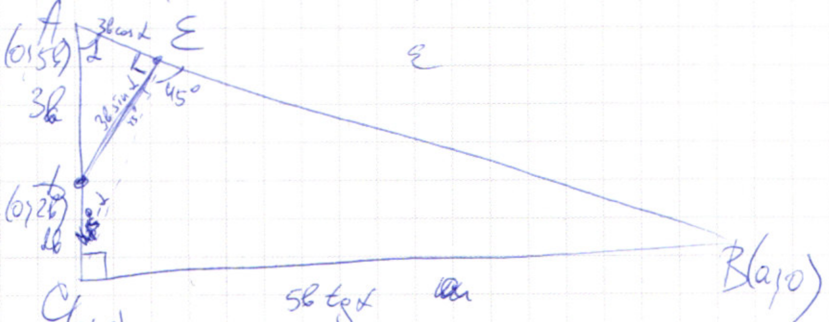
2) $a=c$

$1200-3a=c$

$4a=1200$

$a=300$

$(a_0;b_0;c_0)$ $\quad (a_1;b_1;c_1)$



$\frac{a}{BE}=\frac{\sqrt{25b^2+c^2}}{3b}$

$BE=\frac{3ab}{\sqrt{a^2+25b^2}}$

$(AB): y=-\frac{5b}{a}(x-a)=-\frac{5b}{a}x+5b$

$(BE): y-2b=\frac{a}{5b}x$

$-\frac{5b}{a}x+3b=\frac{a}{5b}x$

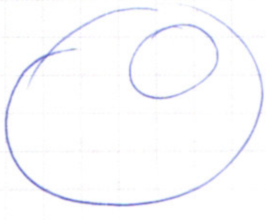
$\left(\frac{a}{5b}+\frac{5b}{a}\right)x=3b$

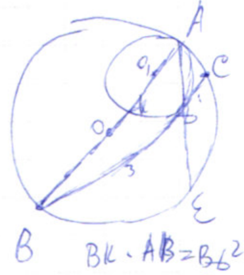
$x=\frac{15ab^2}{25b^2+a^2}$

$\frac{2b}{\sin 45^\circ}=\frac{3b\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)}$

$\sqrt{2}b(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{3b}{\sqrt{2}}\sin\alpha$

$2\cos\alpha=5\sin\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$





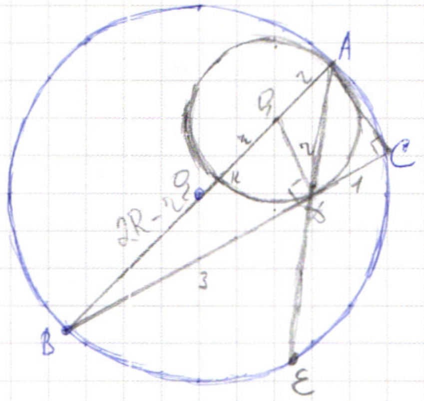
$BK\cdot AB=Bb^2=9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



1) $BD^2 = AB \cdot KD$, т. е. $9 = 2R \cdot (2R - 2r)$

2) $r^2 + (2R-r)^2 = 9$, т. е. $r^2 + 9 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$AC^2 = 4R^2 - 16 = 4(R^2 - 4)$

$\frac{r^2}{9} = \frac{4(R^2-4)}{64} \Rightarrow 4r^2 = 9R^2 - 36$

$\begin{cases} 9R^2 = 4r^2 + 36 \\ 4R^2 = 4Rr + 9 \end{cases}$ $\quad 16R^2 = 16Rr + 36$

$\frac{2R}{4} = \frac{2R-r}{3}$

$4 \cdot 2R - 3 \cdot 2R = 4r$

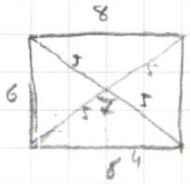
$2R = 4r$

$R = 2r$

$5R^2 = -4r^2 + 16Rr$

$5\left(\frac{R}{r}\right)^2 + 16\frac{R}{r} - 4 = 0$

$\frac{D}{4} = 64 + 20 = 84$



$S = 6 \cdot 8 = 48$

$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot k = 50k$

$\cos\alpha = \frac{25+25-64}{50} = 1 - \frac{64}{50} = -\frac{14}{50} = -\frac{7}{25}$

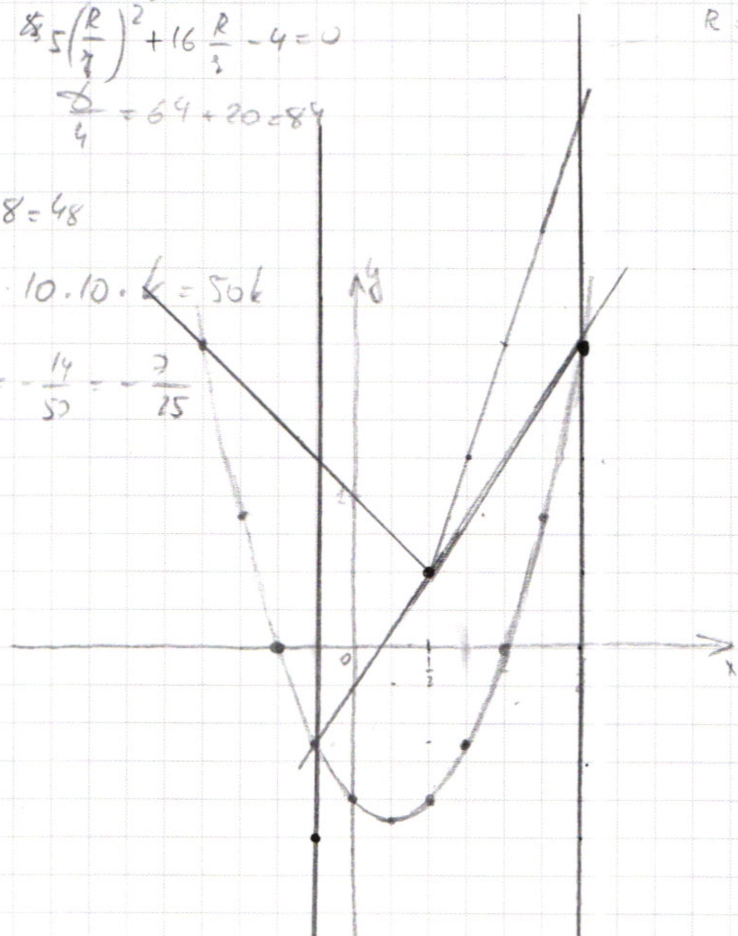
$\sin\alpha = \frac{24}{25}$

$y = 2x^2 - x - 1$

$x_в = \frac{1}{4}$

$y_в = -1\frac{1}{8}$

x	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y	-1	0	-1	2	$-\frac{5}{8}$	$-1\frac{1}{8}$



$2x^2 - x - 1 \le ax + b$

$\frac{3a}{4}$ 1) $\frac{a}{4} - \frac{5}{8} \le b$; $b - \frac{a}{4} \le -\frac{5}{4}$

a 2) $-1 \le b + \frac{a}{2} \le \frac{1}{2}$

3) $2 \le b + \frac{3a}{2} \le \frac{7}{2}$ $\Big|\cdot\frac{3}{4}$ $\quad \frac{3}{2} \le \frac{3}{4}b + \frac{9}{8}a \le \frac{21}{8}$

$-\frac{5}{8} \le b - \frac{a}{4}a \le -\frac{5}{4}$

$\frac{7}{8} \le \frac{7}{4}b + \frac{7}{8}a \le \frac{11}{8}$ $\Big|\cdot\frac{4}{7}$

$\frac{1}{2} \le b + \frac{1}{2}a \le \frac{77}{2}$

$a = 1 - 2b$

$\begin{cases} -\frac{5}{8} \le b - \frac{1}{4} + \frac{b}{2} \\ 2 \le b + \frac{3}{2} - 3b \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3b}{2} \ge -\frac{3}{8} \\ 2b \le -\frac{1}{2} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)$

$f(m)=f\left(\frac{m}{n}\right)+f(n)$

$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)$

$\frac{m}{n}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
f	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

f	0	1	2	3	4	5	6	8	9
N(x)	1	2	4	6	4	1	1	1	1

$\begin{cases} 4a^2+b^2-4a-5ab=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$

$(1,5a)^2 \quad 2\cdot 1,5a\cdot\frac{4}{3}$

$b^2-5ab+6,25a^2=2,25a^2+4a$

$(b-2,25a)^2=\left(1,5a+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}$

$a(a-1)^2+2ab+b(b-1)=$

$(a+b)^2-a-b$

$\boxed{2(x-1)^2+(y-2)^2=3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x-1\le\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2-\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{2+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2-\sqrt{3}\le 2x\le 2+\sqrt{3}$

$(a+b)(a+b-1)\ge ab$

$2-\sqrt{3}\le y\le 2+\sqrt{3}$

$\boxed{2-\sqrt{3}\le y\in 2x\le 2+\sqrt{3}}$

$4x^2-5xy+y^2+2x+y-2=(ax+by+c)\left(\frac{4}{a}x+\frac{1}{b}y-\frac{2}{c}\right)=$

$=4x^2+y^2-2+\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)xy+\left(\frac{4c}{a}-\frac{2a}{c}\right)x+\left(\frac{c}{b}-\frac{2b}{c}\right)y$

1) $a^2+4b^2+5ab=0 \Rightarrow (a+b)(a+4b)=0$

2) $4c^2-2a^2=-2ac=0$

$2c^2-ac-a^2=0$

$a^2+ac-2c^2=0$

$(a+2c)(a-c)=0$

3) $c^2-2b^2=bc$

$c^2-bc-2b^2=0$

$(c-2b)(c+b)=0$

$2\cdot 5\cdot 16+5\cdot 4+(2\cdot 14+2\cdot 4\cdot 12+6\cdot 10)\cdot 2$

$=(80+\cancel{10}+28+96+60+\cancel{180})\cdot 2$

$=(128+146)\cdot 2$

$=(274)\cdot 2=548$

$142\cdot 2$

$a=c=-b=1$

$\cancel{2!+4!+6!+4!=2+24+\ldots 32}=$

$\cancel{=268}$

$4x^2-5xy+y^2+2x+y-2=(x-y+1)(4x-y-2)$

$(5\cdot 16+16\cdot 5+5\cdot 4)+($

$(2\cdot 16+5\cdot 4)+(2\cdot 14\cdot 2+2\cdot 1)+(2\cdot 6\cdot 8+6\cdot 5)+(2\cdot 4\cdot 4+4\cdot 3)+4\cdot 3=$

$2+12-2+30=32+24=56$

$420-56=364$

$24+32=56$

$=160+20+56+2+96+30+32+24=210+80+130=290+130=420$

$210-66=144$

$32\cdot 24=768$: 128, 64, 768

$200-18=182$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)