МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \qquad \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}; \quad 2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$$

1) $2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha + 1 - \sin^2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha + \sin\alpha = 1$

$\frac{1}{\sqrt2}\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}$

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$

~~$2\sin 2\alpha$~~ $\begin{cases} \cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha) = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ — не подходит по ОДЗ} \\ 2\sin\alpha+\cos\alpha = 0, \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$

2) $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1.$

$2\sin 2\alpha + 1 - \cos 2\alpha = 0$

$\cancel{2}\sin 2\alpha + \cancel{2}\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2 \end{array}\right.$

$x \in (0,1] \cup [25;26)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} a} + a \geq |a|^{\log_{12} 13}$

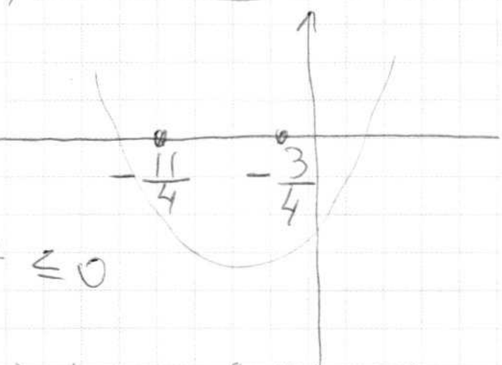
$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} a} + 5^{\log_5 a} \geq a^{\log_{12} 13}$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$\begin{cases} \frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3} \leq 0 \\ ax+b+8x^2+30x+17 \leq 0 \end{cases}$, $12x+11-(4ax^2+3ax+4bx+3b)$

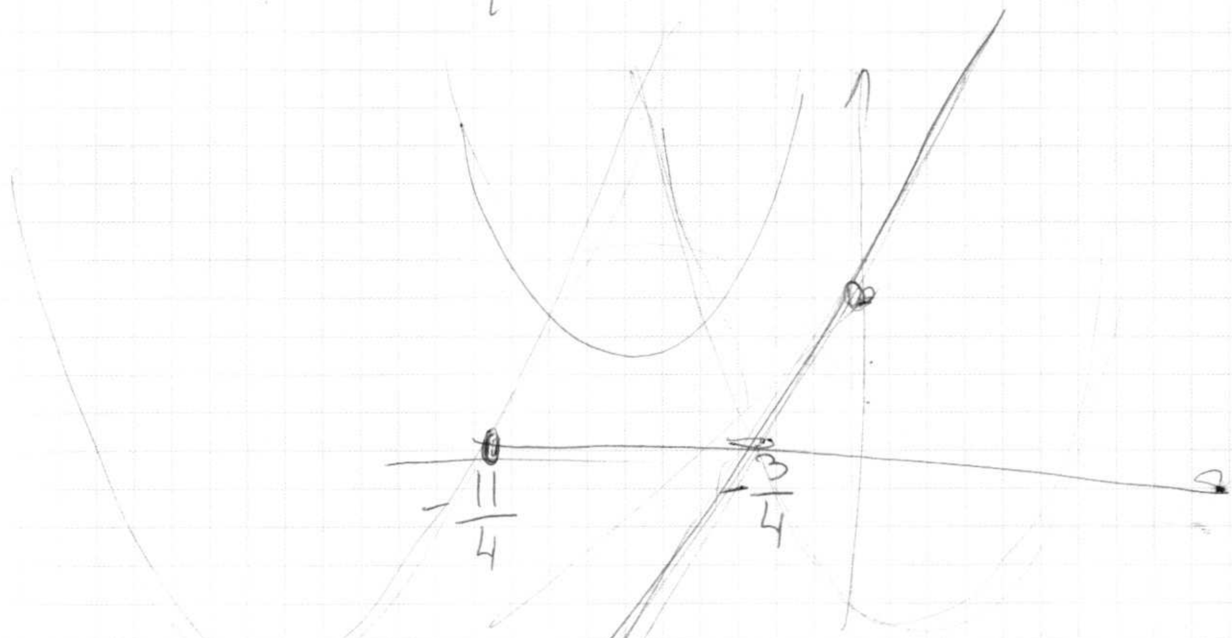
$\begin{cases} 8x^2+x(30+a)+b+17 \leq 0 \quad (1) \\ \frac{-4ax^2+x(12-3a-4b)+11-3b}{4x+3} \leq 0 \end{cases}$

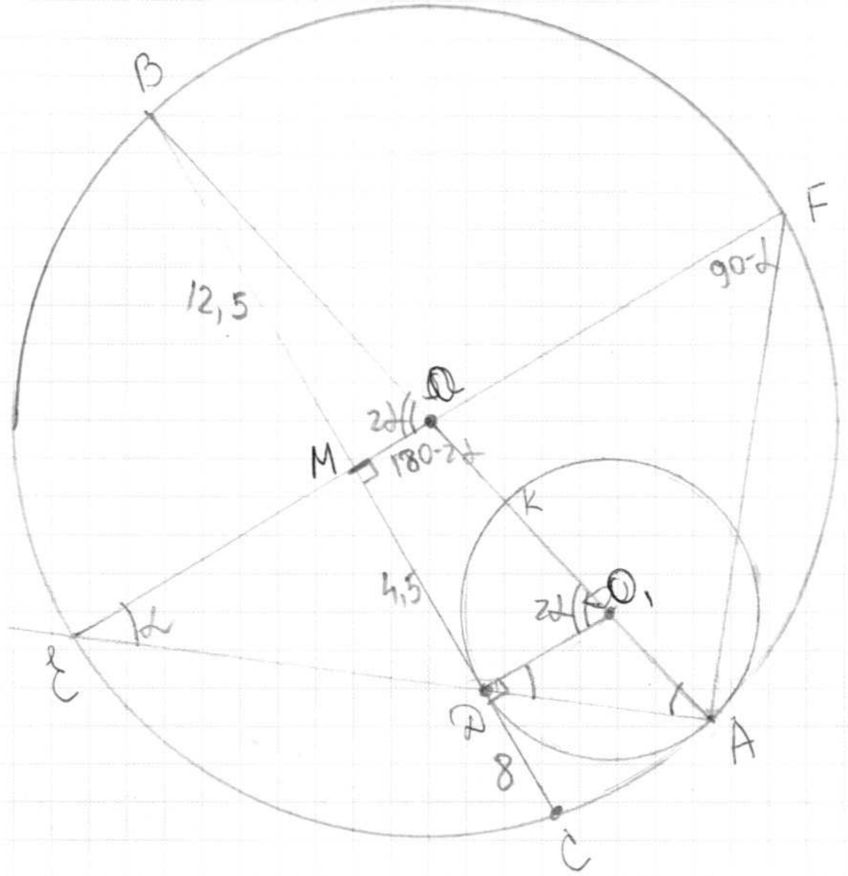


$\begin{cases} f\left(-\frac{11}{4}\right) \leq 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 8 \cdot \frac{121}{16} - \frac{11}{4}(30+a)+b+17 \leq 0 \\ 8 \cdot \frac{9}{16} - \frac{3}{4}(30+a)+b+17 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{121}{2} - \frac{330}{4} - \frac{11}{4}a+b+17 \leq 0 \\ \frac{9}{2} - \frac{90}{4} - \frac{3}{4}a+b+17 \leq 0 \end{cases}$

$242-330-11a+4b+68 \leq 0$

$\begin{cases} -20-11a+4b \leq 0 \\ 18-90-3a+4b+68 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -20-11a+4b \leq 0 \\ -4-3a+4b \leq 0 \end{cases}$





$CD = 8$

$BD = 17.$

$BD^2 = AB \cdot BK =$

$= 2R(2R - 2r)$

$17^2 = 4R(R - r)$

$\frac{R}{R-2r} = \frac{12,5}{4,5}$

$9R = 25R - 50r$

$50r = 16R$

$R = \frac{50}{16}r = \frac{25}{8}r$

$17^2 = \frac{25}{2}r \cdot \frac{17}{8}r$

$\frac{17 \cdot 16}{25} = r^2$

$\frac{R}{R-r} = \frac{25}{9}$

$9R = 25R - 25r$

$25r = 16R.$

$R = \frac{25}{16}r$

$17^2 = \frac{25}{4}r \cdot \frac{9}{16}r$

$r^2 = \frac{17^2 \cdot 4^2}{25 \cdot 9} \Rightarrow r = \frac{17 \cdot 4}{5 \cdot 3}$

$R = \frac{5 \cdot 17}{4 \cdot 3}$ V

$\frac{AE}{\sin(90-\alpha)} = 2R$

$AE = \cos\alpha \cdot 2R$

$\cos 2\alpha = \frac{r}{2R - r} = 2\cos^2\alpha - 1.$

$$\begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ 125 \\ \times\ 75 \\ \hline 625 \\ 875 \\ \hline 9375 \end{array}$$

$\frac{r + 2R - r}{2R - r} = 2\cos^2\alpha$

$\frac{R}{2R - r} = \cos^2\alpha$

$\frac{\frac{5 \cdot 17}{4 \cdot 3}}{\frac{5 \cdot 17}{2 \cdot 3} - \frac{17 \cdot 4}{5 \cdot 3}} = \frac{\frac{5 \cdot 17}{4 \cdot 3}}{\frac{5 \cdot 5 \cdot 17 - 2 \cdot 4 \cdot 17}{2 \cdot 3\, 5}} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{17}}{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{17} \cdot 17} = \frac{25}{34}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

$\cos\angle EFA = \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha. \Rightarrow \angle EFA = \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \frac{AE}{EF}$; $\cancel{\frac{5}{\sqrt{34}} \ldots = \frac{1}{5\sqrt{34}}}$ $AE = EF \cdot \cos\alpha = \frac{125}{\sqrt{34}}$; $S = \frac{\frac{125}{\sqrt{34}} \cdot 25 \cdot \frac{3}{\sqrt{34}}}{2} =$

$z \;\; \overline{68}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

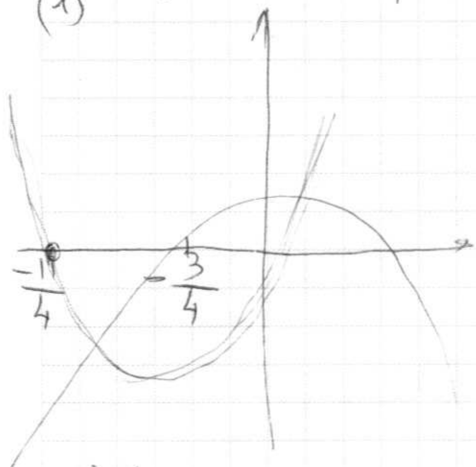
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3} \le 0 \\ 8x^2+x(a+30)+b+17 \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-4ax^2+x(12-3a-4b)+11-3b}{4x+3} \le 0 \ (1) \\ 8x^2+x(a+30)+b+17 \le 0 \end{cases}$$

(1) при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, $4x+3<0 \Rightarrow -4ax^2+x(12-3a-4b)+11-3b \ge 0$

$4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11 \le 0$



1) $4a>0$

$$\begin{cases} y(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ y(-\frac{3}{4})<0 \end{cases} \begin{cases} \frac{121}{4}a-\frac{11}{4}(3a+4b-12)+3b-11 \le 0 \\ \frac{9}{4}a-\frac{3}{4}(3a+4b-12)+3b-11 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 121a-33a-44b+132+12b-44 \le 0 \\ \cancel{9a}-\cancel{9a}-\cancel{12b}+36+\cancel{12b}-44 \le 0 \ \vee \end{cases}$$

$88a-32b+88 \le 0.$

$$\begin{array}{r} 121 \\ -33 \\ \hline 88 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ -44 \\ \hline 88 \end{array}$$

2) $4a<0$

$$\left[\begin{cases} y(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ y(-\frac{3}{4})<0 \\ \left[\begin{array}{l} x_0>-\frac{3}{4} \\ x_0 \le -\frac{11}{4} \end{array}\right. \end{cases} \right. \qquad \cancel{88a-32b+88} \ 11a-4b+11 \le 0$$

$-\frac{3a+4b-12}{8a} > -\frac{3}{4}$; $\frac{3a+4b-12}{2a} < 3$

$\frac{3a+4b-12-6a}{2a}<0$

$D \le 0$, $(3a+4b-12)^2-16a(3b-11) \le 0$

$9a^2-24ab+16b^2+144+104a-96b=8(18+13a-12b)$

$-\frac{3a+4b-12}{8a} \le -\frac{11}{4}$

$\frac{3a+4b-12}{2a} \ge 11$

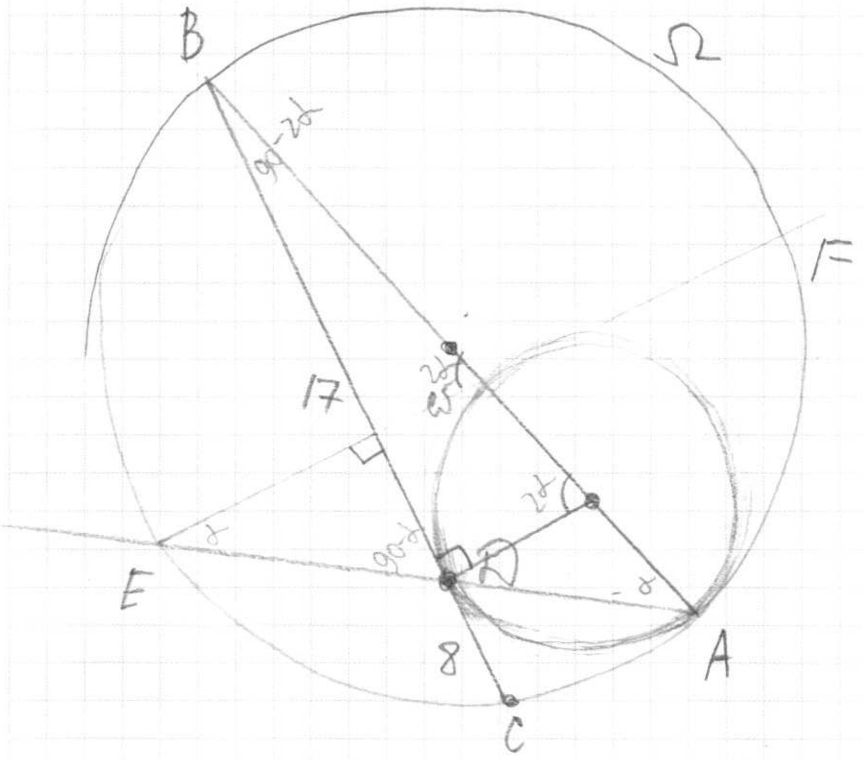
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

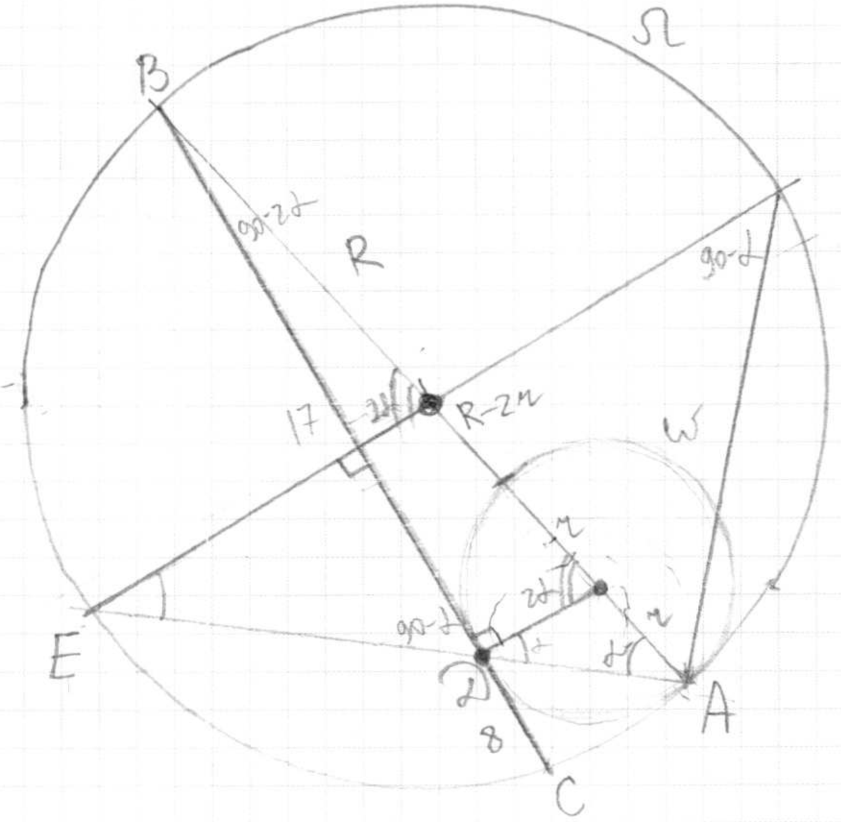
$$\begin{cases} 11a+20-4b\geq 0 \\ 3a+4-4b\geq 0 \end{cases}$$

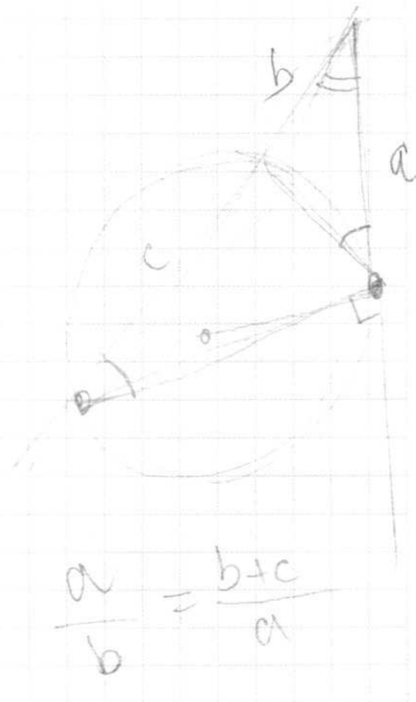
$$\begin{cases} a>0 \\ 11a-4b+11\leq 0 \end{cases}$$



$17^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$17^2 + r^2 = (2R$





$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+2\sqrt{\frac{5}{2}}=\cancel{2}-\cancel{2\sqrt{\frac{5}{5}}}-\cancel{\sqrt{\frac{5}{2}}}+\frac{5}{2}-\cancel{2}+\cancel{\sqrt{\frac{5}{2}}}-\cancel{2}+2\cancel{\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

$$4-4\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}+9-18\sqrt{\frac{5}{2}}+9\cdot\frac{5}{2}-4+4\sqrt{\frac{5}{2}}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5^{\log_{12} t} + 5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_5 t^{\log_{12} 13}}$$

$$\log_{12} t + \log_5 t \geq \log_5 t^{\log_{12} 13}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cancel{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2} +$$

$$+ \cancel{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \underline{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \checkmark$$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\dfrac{2}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt5}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}} \; ; \; \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

1) $\sin 2\alpha\cdot\dfrac{2}{\sqrt5}$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\dfrac{4}{5}\end{cases} \quad \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt5} \\ \cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\dfrac{\cancel{2}}{5}\end{cases} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$ 1) $2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha < 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{y(x-2)-(x-2)}=\sqrt{(y-1)(x-2)}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$(x-2y)^2+4xy+5y^2-4x-18y=12$$

$$(x-2)^2 + \cancel{(3y-1)^2} \quad 9(y-1)^2$$

$$x^2-4x+4 \ -4 \qquad 9y^2-18y+9 \ -9$$

$$\begin{cases} (x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=12 \\ x-2+2-(2y-2) \end{cases}$$

$$(x-2)+2-2(y-1)-2=\sqrt{(y-1)(x-2)}, \quad x-2=a, \ y-1=b$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=25 \end{cases}, \quad a^2+4b^2-4ab=ab, \ a^2-5ab+4b^2=0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}+4=0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=1 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right.$$

$$2b^2=25, \ b=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$17b^2=25, \ b=\pm\frac{5}{\sqrt{17}}$$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x, \quad x^2+18x=a$$

$$5^{\log_{12}a}+a \geq |a|^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}a}+5^{\log_5 a} \geq$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $\begin{cases} a>0 \\ y\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0 \\ y\left(-\frac{3}{4}\right) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{121}{4}a - \frac{11}{4}(3a+4b-12) + 3b - 11 \le 0 \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{4}(3a+4b-12) + 3b - 11 < 0 \\ a>0 \end{cases}$

$\begin{cases} 121a - 33a - 44b + 132 + 12b - 44 \le 0 \\ 9a - 9a - 12b + 36 + 12b - 44 < 0 \\ a>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 11a - 4b + 11 \le 0 \\ a \in R \\ a > 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a<0 \\ D \le 0 \end{cases}$ $(3a+4b-12)^2 - 16a(3b-11) = 9a^2 + 16b^2 + 144 + 24ab - 72a - 96b -$

$- 48ab + 176a = 9a^2 + 16b^2 + 144 - 24ab + 104a - 96b \le 0$

$\begin{cases} a<0 \\ y\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0 \\ y\left(-\frac{3}{4}\right) < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_0 > -\frac{3}{4} \\ x_0 \le -\frac{11}{4} \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a<0 \\ 11a - 4b + 11 \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{4b-12-3a}{2a} < 0 \\ \frac{4b-12-19a}{2a} \ge 0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a<0 \\ 11a - 4b + 11 \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4b - 12 - 3a > 0 \\ 4b - 12 - 19a \le 0 \end{array}\right. \end{cases}$

Итак получим систему: $\begin{cases} 11a + 20 - 4b \ge 0 \\ 3a + 4 - 4b \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ 11a + 11 - 4b \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ 9a^2 + 16b^2 + 144 - 24ab + 104a - 96b \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \left[\begin{array}{l} 11a + 11 - 4b \le 0 \\ 4b - 12 - 3a > 0 \\ 4b - 12 - 19a \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

N3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \ge |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$. ОДЗ: $x^2 + 18x > 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \ge |x^2+18x|^{\log_{12}13}$, пусть $x^2 + 18x = t$

$5^{\log_{12}t} + t \ge t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t} + 5^{\log_5 t} \ge 5^{\log_5 t^{\log_{12}13}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

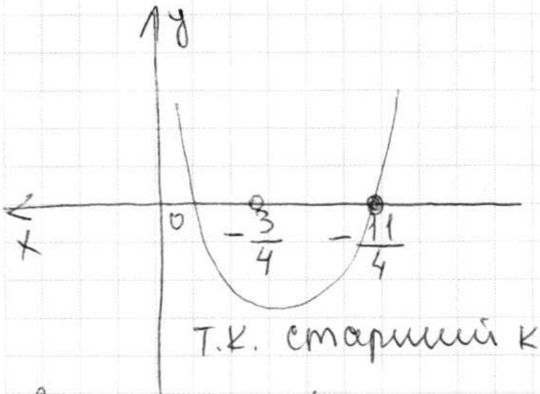
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\begin{cases} \dfrac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3} \le 0 & (2) \\ 8x^2+x(a+30)+b+17 \le 0 & (1) \end{cases}$$

(1) $8x^2+x(a+30)+b+17\le 0$ при $x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$

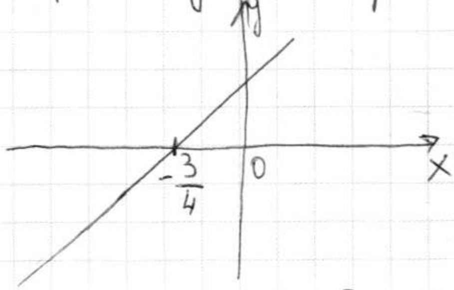


$$\begin{cases} y\left(-\frac{11}{4}\right)\le 0 \\ y\left(-\frac{3}{4}\right)<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 8\cdot\frac{121}{16}-\frac{11}{4}(30+a)+b+17\le 0 \\ 8\cdot\frac{9}{16}-\frac{3}{4}(30+a)+b+17\le 0 \end{cases}$$

т.к. старший коэфф. $8>0$

$$\begin{cases} -20-11a+4b\le 0 \\ -4-3a+4b\le 0 \end{cases}$$

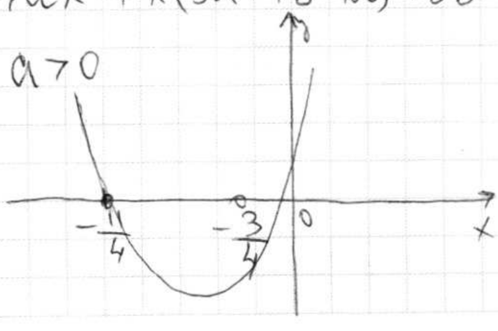
(2) Заметим, что $y=4x+3$ расположена ниже оси OX при $x<-\frac{3}{4}$ тогда $4x+3<0$, след.



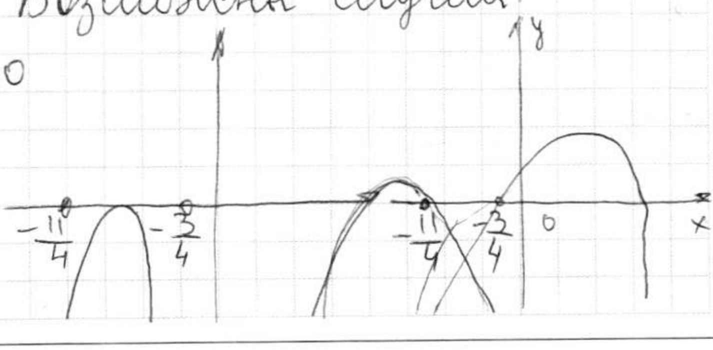
$$12x+11-(ax+b)(4x+3)=-4ax^2+x(12-3a-4b)+11-3b\ge 0,\ x\in\left(-\frac{3}{4};-\frac{11}{4}\right]$$

$4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11\le 0$. Возможны случаи:

1) $a>0$



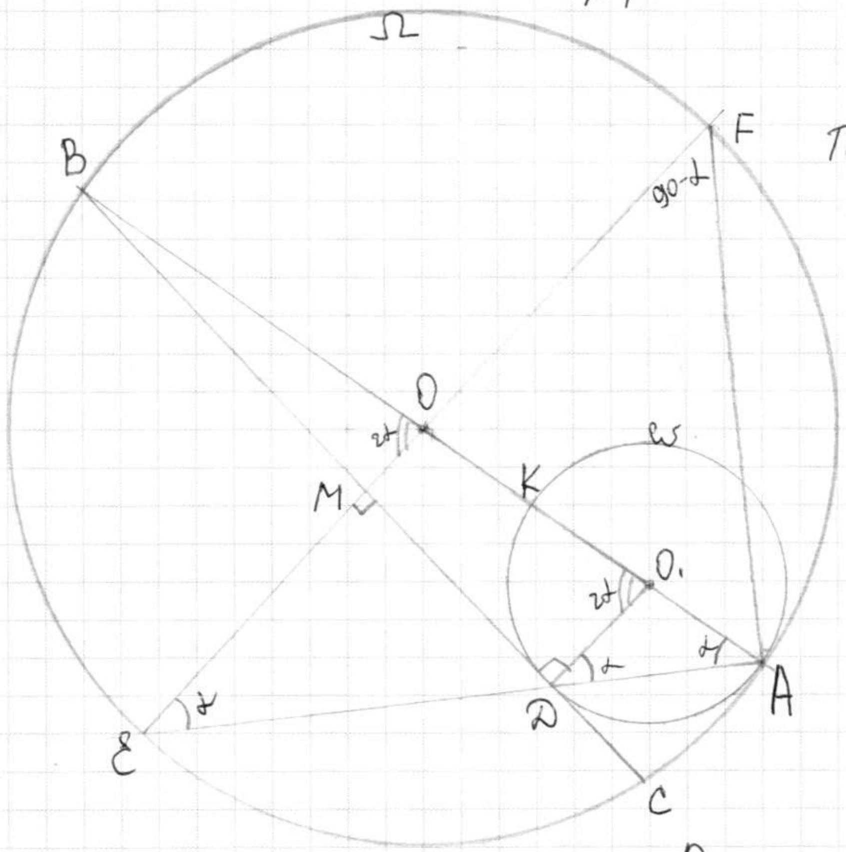
2) $a<0$



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: $BD=17$, $CD=8$
$EF \perp BC$
BC-кас. к ω.

Пусть: $O_1A=r$, $OA=R$.

Найти: r, R, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$

Решение:

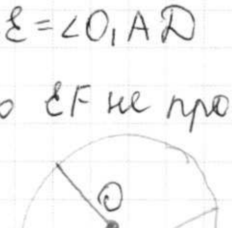
1) по теореме о кас. и сек: $BD^2 = BK\cdot AB$. $17^2=(2R-2r)\cdot 2R$ (1)

2) $EF\perp BC$ - по усл
$O_1D \perp BC$ - условие кас. } $O_1D \parallel EF$, тогда $\angle FED = \angle O_1DA$ - соответст. при $O_1D \parallel EF$, AE-сек

$\angle O_1DA = \angle O_1AD$ т.к. $O_1D = O_1A = r$, след. $\triangle O_1AD$ р-б.

Итак $\begin{cases} \angle O_1DA = \angle O_1AD \\ \angle O_1DA = \angle OEA \end{cases} \Rightarrow \angle OAE = \angle O_1AD$

Тогда если предположим, что EF не проходит через , пусть она пересекает AB в O_2, тогда $\angle OEA = \angle OAE$ из р-б $\triangle OAE$ и $\angle O_2EA = \angle OAE \Rightarrow \angle OEA = \angle O_2EA$



Это значит, что $O \equiv O_2$

3) Тогда $BM=MC$, т.к. радиус, перпендикулярный хорде, делит её пополам. $BM=MC=\frac{BC}{2}=\frac{25}{2}=12,5$

$MD+DC=MC \Rightarrow MD=MC-DC=12,5-8=4,5$.

4) по теореме Фалеса: $\frac{BM}{MD}=\frac{BO}{OO_1} \Rightarrow \frac{12,5}{4,5}=\frac{R}{R-r} \Rightarrow 25R-25r=9R$

$R=\frac{25}{16}r$.

подставим в уравнение (1): $17^2=\frac{4\cdot 25}{16}r\left(\frac{25}{16}r-r\right)=\frac{25}{4}r\cdot\frac{9}{16}r$

$r^2=\frac{17^2\cdot 8^2}{5^2\cdot 3^2}$, $r=\frac{17\cdot 8}{5\cdot 3}=\frac{136}{15}$

$R=\frac{25}{16}\cdot\frac{17\cdot 8}{5\cdot 3}=\frac{5\cdot 17}{3\cdot 2}=\frac{85}{6}$

5) из $\triangle BDO_1$: $\cos\angle DO_1B=\frac{r}{BO_1}=\frac{r}{2R-r}=\frac{\frac{17\cdot 8}{5\cdot 3}}{\frac{5\cdot 17}{3}-\frac{8\cdot 17}{5\cdot 3}}=\frac{\frac{17\cdot 8}{5\cdot 3}}{\frac{25\cdot 17-8\cdot 17}{5\cdot 3}}=$

$=\frac{17\cdot 8}{17\cdot 17}=\frac{8}{17}$.

$\left.\begin{array}{l}\angle BO_1D=\frac{\smile DK}{2}\text{ – впис } \omega \\ \angle DO_1B=\smile DK\text{ – центр } \omega\end{array}\right\}$ $\angle DAQ=\alpha$, $\angle DO_1B=2\alpha$,

$\triangle EAF$ – прямоуг т.к $\angle EAF$ опир на $d \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\angle EFA=90^\circ-\angle FEA \\ \angle FEA=\angle OAE\text{ – по рад док.}\end{array}\right\}$ $\angle EFA=90^\circ-\alpha$.

6) $\cos 2\alpha=\frac{8}{17}=2\cos^2\alpha-1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{25}{34} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$

(осн. триг. тождество).

$\cos\angle EFA=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle EFA=\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

7) $\cos\alpha=\frac{EA}{EF} \Rightarrow EA=\frac{5}{\sqrt{34}}\cdot 25=\frac{125}{\sqrt{34}}$

$S_{\triangle AEF}=\frac{AE\cdot EF\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{\frac{125}{\sqrt{34}}\cdot 25\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}}{2}=\frac{125\cdot 75}{68}$

Ответ: $r=\frac{136}{15}$, $R=\frac{85}{6}$, $\angle AFE=\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$, $S_{\triangle AEF}=\frac{9375}{68}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ – (из основного тригонометр. тожд.)

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

1 случай: $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$
$$2\sin 2\alpha + 2 - 2\sin^2\alpha = 0$$
$$\sin 2\alpha + 1 - \sin^2\alpha = 0$$
$$\sin 2\alpha + \cos^2\alpha = 0$$
$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$$
$$\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \cos\alpha = -2\sin\alpha \end{array}\right. \\ \cos\alpha \neq 0 \text{ – ОДЗ } tg\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{2} \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{2}$$

2 случай: $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$
$$2\sin 2\alpha + 1 - (1 - 2\sin^2\alpha) = 0$$
$$\sin 2\alpha + \sin^2\alpha = 0$$
$$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha = -\sin\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2 \Rightarrow tg\alpha = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \\ tg\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} y-1=b \\ x-2=a \end{cases}$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2-4+9b^2-9=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \Rightarrow a^2+4b^2-4ab=ab \\ a^2+9b^2=25 \ (2) \end{cases}$$

$a^2-5ab+4b^2=0 \quad | : b^2$ ~~т.к. b=0~~ т.к. $b=0$ - не решение

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$$

$$\left[\begin{aligned} &\frac{a}{b}=1, \\ &\frac{a}{b}=4 \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &a=b \\ &a=4b \end{aligned}\right.$$ подставим в уравнение (2):

$$\left[\begin{aligned} &b^2+9b^2=25 \quad b=\pm\sqrt{\tfrac{5}{2}} \\ &25b^2=25 \quad b=\pm 1 \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$\begin{cases} a=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ проверим: $\sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}\neq\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\begin{cases} a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ проверим: $2\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ проверим: $4-2=\sqrt{4}$

$\begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases}$ проверим: $-4+2\neq\sqrt{4}$ т.к. пользуемся арифм. корнем.

Вернёмся к начальным переменным:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x-2=-\sqrt{\tfrac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\tfrac{5}{2}} \end{cases} \\ &\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x=2-\sqrt{\tfrac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\tfrac{5}{2}} \end{cases} \\ &\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; $(6;2)$