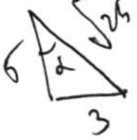
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ



$\sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

11 класс

ВАРИАНТ 1

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{25\cdot\frac{8}{15}} = \frac{3}{5}$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{8}{17}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right)$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

$12^{2\log_{12}5} + 12^2 \geq$

3. [5 баллов] Решите неравенство

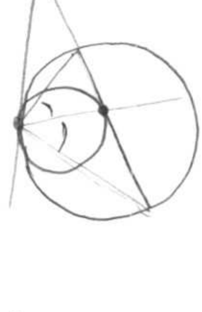
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

$y^{\log_{12}5} + y \geq y^{\log_{12}13}$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство



$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

он меньше радиуса вписанной

$\frac{8}{x} = \frac{x}{25} \Rightarrow x^2 = 8\cdot 25 = 10\sqrt{2}$

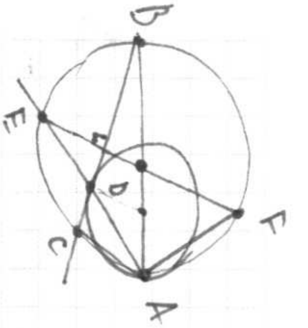
$(12^2)^{\log_{12}5} + 12^2 \geq (12^2)^{\log_{12}13}$

$5^2 + 12^2 \geq 13^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№2 Почему так дано? ...

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2-4x+4-4+(3y)^2-2\cdot 3y\cdot 3+9-9=12 \end{cases}$$

$(x-2)^2+(3(y-1))^2 = 25$ – эллипс

$x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x-2y = x-2+2-2y+2-2 = (x-2)-2(y-1)$

$\exists\ a = x-2$; $b = y-1$

$\boxed{ab \geq 0}$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-4ab+4b^2 = ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}, \boxed{a-2b\geq 0}$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$ ТВЯ (не забудь проверку!!!)

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$ $y>0$

$\exists\ y = x^2+18x \Rightarrow y^{\log_{12}5} + y \geq y^{\log_{12}13}$

$y^{\log_{12}5}\left(1 + y^{\log_{12}\frac{12}{5}} - y^{\log_{12}\frac{13}{5}}\right) \geq 0$

Хуйня

№4 $\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

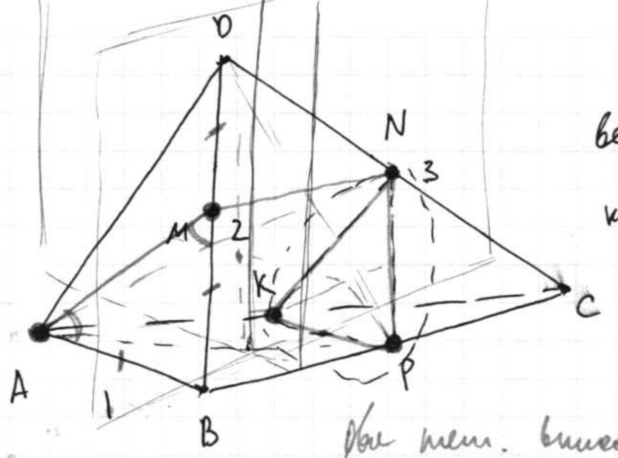
$\sin(2(\alpha+\beta))\cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \Rightarrow$ и сум

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{2}{5\cos 2\beta} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{5}\cdot\sqrt5 = \frac{2}{\sqrt5}$

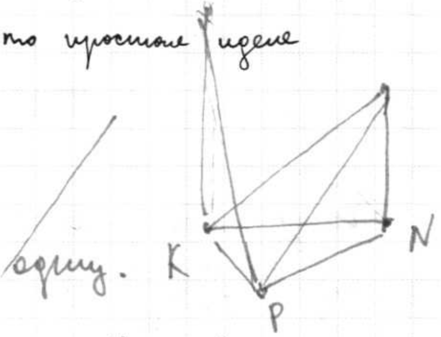
■ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

7.



5 точек на одной сфере => всё опр. однозначно. Нужна какая-то простая идея



Обе пир. вписаны в одну. K

6. $\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$, по $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$ только 1 ветвь

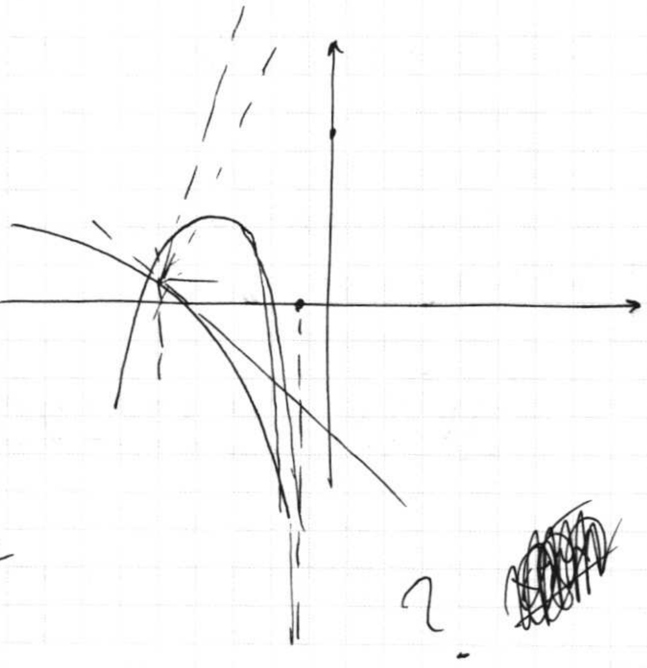
$-8x^2 - 30x - 17 = 0$ $\quad x_0 = \frac{30}{-2\cdot 8} = -\frac{15}{8}$

$[-\frac{22}{8}; -\frac{6}{8}]$

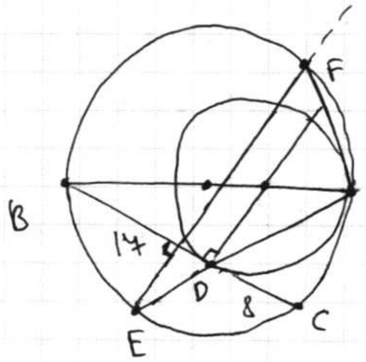
$-8\cdot\frac{15^2}{8^2} + 30\cdot\frac{15}{8} - 17 =$

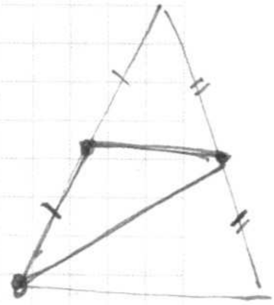
$= -\frac{15^2}{8} + \frac{2\cdot 15^2}{8} - 17 = 0$

строится график и всё понятно.

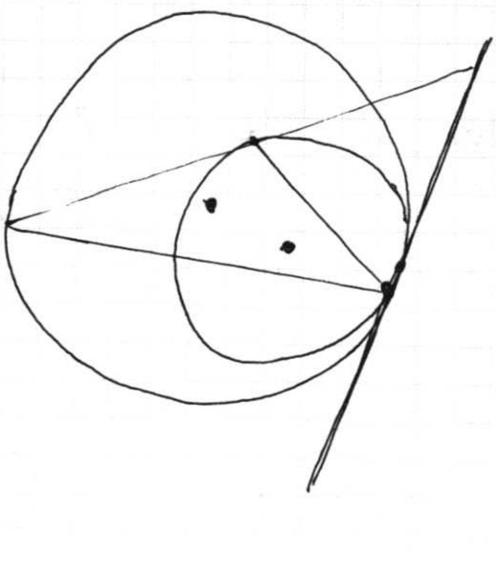


4. Лемма Архимеда



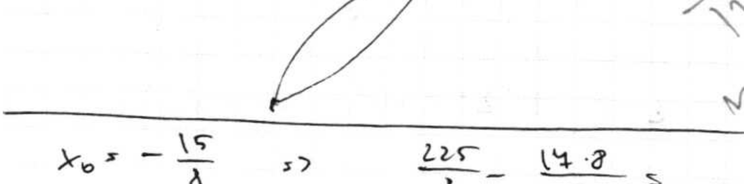


2



$f(y) = y + y^{\log_{12} 5}$ вып вверх

$g(y) = y^{\log_{12} 13}$ вып вниз



$\frac{16}{17}$

и все отрезки

$x_0 = -\frac{15}{8} \Rightarrow \frac{225}{8} - \frac{17\cdot 8}{8} =$

$= \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cancel{2}\,2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-t^2}{1+t^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow$ решаем отн. t

$4t + 1 - \cancel{t^2} = -1 - \cancel{t^2} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-t^2}{1+t^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \qquad t^2+4t-1 = -(1+t^2) \Rightarrow$

$2t^2+4t = 0 \Leftrightarrow t = 0; -2$. Ищу

$-8\cdot\frac{121}{16} + \frac{30\cdot 11}{4} - 17 = \frac{330-242}{4} - 17 =$

$-2i$

$= \frac{88}{4} - 17 = 5$

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{-\frac{12\cdot 11}{4}+11}{-11+3} = \frac{11\cdot(-2)}{-8} = \frac{11}{4}$

$-8\cdot\frac{9}{16} + \frac{90}{4} - 17 = \frac{90-18}{4} - 17 = \frac{72}{4} - 17 =$

$= 18 - 17 = 1$

■ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{2}$

$$-\frac{11}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_0 = 4$$

$$\Rightarrow a_0 = -\frac{16}{8} = -2$$

$$b_0 = 5 - \frac{11}{4}\cdot 2 = 5 - \frac{11}{2} = -\frac{1}{2}$$

$30 + 22 + 13 =$

$= 52 + 13 = 65$

$$g(x) = -2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$$-2x - \frac{7}{2} = \frac{2}{4x+3} \Leftrightarrow$$

$$-(4x+7)(4x+3) = 4$$

$$-(16x^2 + 40x + 21) = 4 \Rightarrow$$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$ (!) решение

$f(1) = 0 \Rightarrow$

$f(24) + f(\frac{1}{24})$

$f(2) = f(2) + f(1)$

№5 $\forall a, b$ $f(ab) = f(a) + f(b)$, $\forall p$ $f(p) = [\frac{p}{4}]$

Кол-во пар $(x, y) \in \mathbb{N}$: $x \in [1; 24)$, $y \in [1; 24]$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$$ важно

$\frac{x}{y} \in [\frac{1}{24}; 24]$

$f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(5) = 1$

$f(6) = 0$; $f(12) = 0$; $f(24) = 0$

$f(10) = 1$; $f(20) = 1$

22 2, 3, 2^2, 5, $2\cdot 3$, 7, 2^3, 3^2, $2\cdot 5$, 11, $3\cdot 4$, 13, $2\cdot 7$, $3\cdot 5$, 4^2, 17, $2\cdot 9$, 19, $2\cdot 10$, $3\cdot 7$, $2\cdot 11$, 23, $2\cdot 12$.

0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 2 0 3 1 1 0 4 0 4 1 1 2 5 0

нет

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

$\exists\ a=x-2;\ b=y-1$

(1) $\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

1. $a=b$ $\{\Rightarrow$ $10a^2=25 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=b$

Отсюда исходит решение (в виде $(a;b)$) $\boxed{\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$,

в этом можно убедиться подстановкой в систему (1)

P.S. $\left(\sqrt{\frac{5}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ не подходит по той же причине

2. $a=4b \Rightarrow 25b^2=25 \Leftrightarrow b=\pm1;\ a=\pm4$

Из пар $(4;1)$; $(-4;-1)$ подходит только $\boxed{(4;1)}$

$\Rightarrow (a;b)=\left[\begin{array}{l} (4;1) \\ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \end{array}\right.=(x-2;y-1) \Leftrightarrow$

$\boxed{(x;y)=\left[\begin{array}{l} (6;2) \\ \left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \end{array}\right.}$

~~Ответ: $\{(6;2);\ \left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\}$~~

Ответ: $\left\{(6;2);\ \left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right\}$

№3 $\quad 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Заметим, что исходя из обл. опр. логарифма, $x^2+18x>0$
$\Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$. $\quad$ Пусть $y = x^2+18x$. Тогда:

$5^{\log_{12} y} = y^{\log_{12} 5}$ (св-во логарифма) и исх. $\Leftrightarrow$

$\boxed{\begin{cases} y^{\log_{12}5} + y \geq y^{\log_{12}13} \\ y>0 \end{cases}}$. ~~Исходя из замены min(y(x)) = -2~~

$\cancel{\begin{cases} \min(x^2+18x) = 81-2\ldots \\ x_{вер} = -9 \end{cases}}$ $\qquad \begin{cases} y^{\log_{12}5} + y - y^{\log_{12}13} \geq 0 \\ y>0 \end{cases}$

$0<\log_{12}5<1$, $\quad \log_{12}13>1$ $\qquad$ продолжение следует...

№1 $\begin{cases} (1)\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ (2)\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}}$. При этом $\boxed{\sin(2\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt5}}$

1) Пусть $\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}$. Воспользуемся заменой $t = \operatorname{tg}\alpha$. Тогда:

$\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Ур-ие (2) примет вид:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow$

$\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow 4t+1 = -1 \Leftrightarrow \boxed{t = -\frac{1}{2}}$

2) Пусть $\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$. Тогда аналогично прошлому пункту:

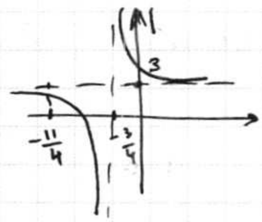
$\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow t^2+4t-1 = -1-t^2 \Leftrightarrow$

$\boxed{t = 0; -2}$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; 0; -2\right\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 $g(x)=\frac{11+12x}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$ — гипербола. Отрезок $[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$ содержит в себе часть её левой половины.

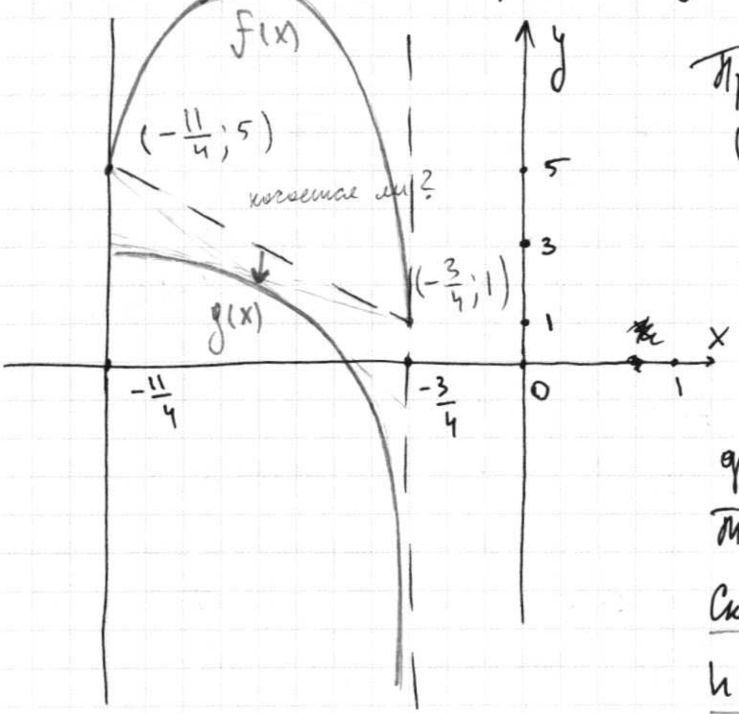


$f(x)=-8x^2-30x-17$ — перевёрнутая парабола.

$f(-\frac{11}{4})=5$; $f(-\frac{3}{4})=1$. Вершина $x_{вер}=-\frac{15}{8}$

$g(-\frac{11}{4}) = 3+\frac{2}{-11+3} = 3-\frac{2}{8} = \frac{11}{4}$

Схематично построим график $g(x)$ и $f(x)$



Проведём прямую ч/з $(-\frac{11}{4};5)$ $(-\frac{3}{4};1)$. Косается ли она $\Gamma_{g(x)}$?

$$\begin{cases} a_0(-\frac{11}{4})+b_0=5 \\ a_0(-\frac{3}{4})+b_0=1 \end{cases}$$

$\exists\ h(x)=a_0x+b_0$ — ф-ция, задающая эту прямую. Тогда $h(x)=-2x-\frac{1}{2}$ (поч. усл.)

Сколько решений имеет ур-ие $h(x)=g(x)$?

$$-2x-\frac{1}{2} = 3+\frac{2}{4x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} -(4x+7)(4x+3)=4 \\ x\neq-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (4x+5)^2=0 \\ x\neq-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}.$$

Одно решение! $\Rightarrow$ ~~h(x) каса~~ $h(x)$ касается $g(x)$ в $x=-\frac{5}{4}$

Нетрудно понять, что больше не существует прямых, таких что их график располагается под параболой $f(x)$ и над гиперболой $g(x)$ (при малом смещении "вверх" или "вниз" будут неуд. этому области)

$\Rightarrow$ это единственная возможная прямая $ax+b$, такая что

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \quad \forall x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$$

Значит, пара $(a;b)$ тоже единственная: $(-2; -\frac{1}{2})$

Ответ: $(-2; -\frac{1}{2})$

№5 1. Сначала посчитаем несколько значений:

$f(2)=0$; $f(2\cdot 1) = f(2)+f(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(1)=0}$

$\begin{cases} x\in[1;24] \;;\; y\in[1;24] \\ x,y\in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} \in \left[\frac{1}{24}; 24\right]}$

2. Вычислим значение функции в точках от 1 до 24, $\mathbb{N}$

1: $f(1)=0$	11: $f(11)=2$	21: $f(21)=1$	По сути, $f(abc) =$
2: $f(2)=0$	12: $f(12)=0$	22: $f(22)=2$	$= f(a)+f(b)+f(c)$
3: $f(3)=0$	13: $f(13)=3$	23: $f(23)=5$	– этим я и руко-
4: $f(4)=2f(2)=0$	14: $f(14)=1$	24: $f(24)=0$	водствовался при вычислении
5: $f(5)=1$	15: $f(15)=1$		
6: $f(6)=0$	16: $f(16)=0$		
7: $f(7)=1$	17: $f(17)=4$		
8: $f(8)=0$	18: $f(18)=0$		
9: $f(9)=0$	19: $f(19)=4$		
10: $f(10)=1$	20: $f(20)=1$		

3. Заметим: $f(\frac{1}{x}\cdot x) = 0 = f(x)+f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

$\Rightarrow$ если $f(x)>0$, то $f(\frac{1}{x})<0$

Для $\mathbb{N}$ аргументов $\in[1;24]$ $f(x)$ принимает значения $\{0;1;2;3;4;5\}$

рассмотрим случаи:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

1) $f(y) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -1$ - таких чисел 7.

заметим, что $f(\frac{x}{y}) \geq 0$ для любого допустимого x в этом случае

2) $f(y) = 2 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -2$ - таких чисел 2

$f(\frac{x}{y}) < 0$ для $x : f(x) = 1 \Rightarrow$ этот случай

даёт $2 + 2 \cdot 7 - 3 = 13$ чисел ($\frac{10}{22} = \frac{5}{11}$ и т.д. - не считаются 2 раза)

3) $f(y) = 3 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -3$ - таких чисел 1

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow x : f(x) = 1$ или $f(x) = 2 \Rightarrow$

в этом случае $1 + 1 \cdot (2+7) = 10$ чисел

4) $f(y) = 4 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -4$ - таких чисел 2

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow x : f(x) = 1, 2, 3 \Rightarrow$ этот случай

даёт $2 + 2 \cdot (1+2+7) = 2 + 20 = 22$ числа

5) $f(y) = 5 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -5$ - одно число

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow x : f(x) = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow$ этот случай

даёт $1 + 1 \cdot (1+2+2+7) = 13$ чисел

$N = 7 + 13 + 10 + 22 + 13 = 65$ пар $(x;y)$

Ответ: 65 пар

~~№~~ №3 (продолжение)

Ещё раз напишу ход решения: $\begin{cases} y = x^2+18x \\ y>0 \end{cases}$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \ge |x^2+18x|^{\log_{12}13} \Leftrightarrow$$

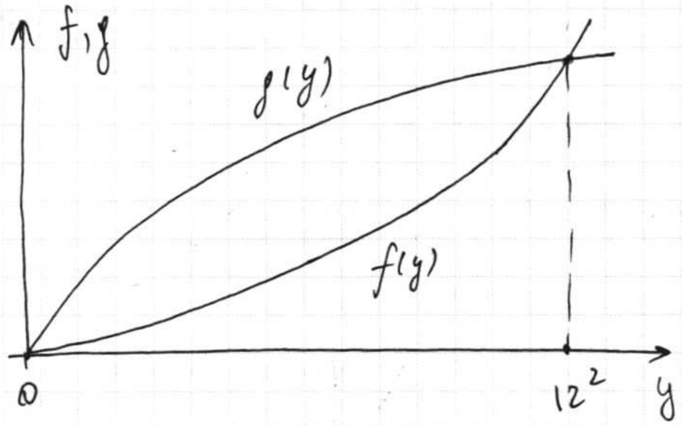
$$\begin{cases} y^{\log_{12}5} + y \ge y^{\log_{12}13} \\ y>0 \end{cases}$$

$f(y) = y^{\log_{12}13}$

$g(y) = y^{\log_{12}5} + y$

Нетрудно понять, что т.к. $\log_{12}13 > 1$, $1 > \log_{12}5 > 0$, то $f(y)$ выпукла вниз, а $g(y)$ выпукла вверх

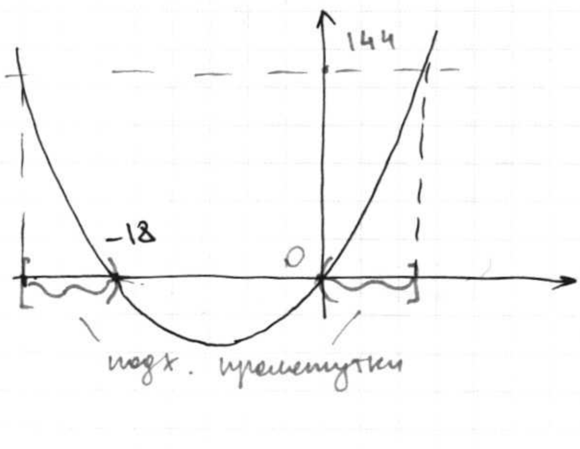
Схематично графики $f(y)$ и $g(y)$ выглядят так:



Вследствие того, что f и g не меняют выпуклости, у них $\exists$ единственный отличный от $y=0$ корень. Это $y = 12^2 = 144$

Проверка: $12^{2\log_{12}5} + 12^2 \ge 12^{2\log_{12}13} \Leftrightarrow 5^2+12^2 = 13^2$ $\oplus$

$\Rightarrow f(y) \le g(y) \Leftrightarrow y \in (0; 144]$. График $y(x)$:



$x^2+18x-144 = 0 \Leftrightarrow x = -9 \pm \sqrt{81+144}$

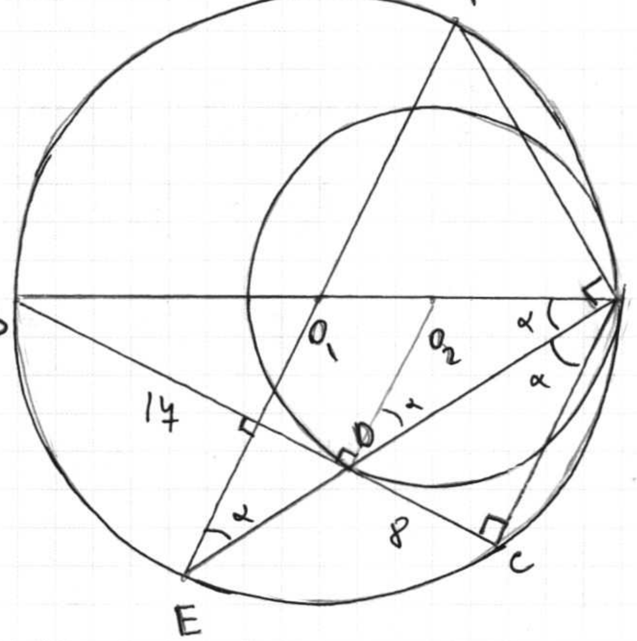
$= -9 \pm 15 = -24; +6$

$\Rightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Есть сильное чувство, что EF – диаметр. Докажем это.

1) По лемме Архимеда AE – биссектриса $\angle CAB$ (BC – хорда окружности)

2) $EC = BE$ т.к. эти хорды стягивают равные дуги

3) $\triangle CEB$ р-бедренный и вписан в Ω => центр Ω – точка O_1, лежит на сер-пере к BC => на EF. Ч.Т.Д.

Из этого следует, что $\angle EAF = 90^\circ$. $O_1E = O_1A$ => $\angle O_1EA = \angle FEA = \alpha$. $\triangle ADC \sim \triangle EFA$. $BC = 25$.

По Th. о биссектрисе: ($\triangle ABC$) $\boxed{\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}}$ => $\frac{AB}{AC} = \left(\frac{8}{17}\right)^{-1} = \cos^{-1}(2\alpha)$

=> $\boxed{\cos 2\alpha = \frac{8}{17}}$ => $\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{8}{17}\right) = \angle AEF$

=> ~~$\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8}{17}\right)$~~ $\boxed{\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{8}{17}\right)}$

$\boxed{\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{64}{289}}} = \frac{15}{17}$ => $\frac{BC}{AB} = \frac{15}{17}$ =>

$AB = 2R_1 = \frac{17}{15} \cdot 25$ => $R_1 = \frac{17 \cdot 5}{6} = \boxed{\frac{85}{6}}$ – радиус большой

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BAC$ => $\frac{R_2}{BD} = \frac{AC}{BC} = ctg(2\alpha) = \frac{8}{15}$

($O_2D = R_2$)

$$\Rightarrow \boxed{R_2 = BD \cdot \frac{8}{15} = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15}}$$ – радиус меньшей окружности

$$\boxed{S(\triangle AEF) = \frac{1}{2} EF \cdot AF \cdot \cos\alpha}$$

$$EF = 2R_1 = \frac{95}{3} \ ; \quad AE = EF \sin\alpha$$

$$\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{8}{17}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right) = \boxed{\operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \Rightarrow AF = \frac{95}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{95}{\sqrt{34}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}} \quad \Rightarrow \quad S(\triangle AEF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{95}{\sqrt{34}} \cdot \frac{95}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{25 \cdot 19^2}{2 \cdot 17 \cdot 3} = \frac{25 \cdot 19^2}{4 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{25 \cdot 361}{\cancel{4} \cdot 12 \cdot 17}$$

$$\begin{array}{r} \times 361 \\ 25 \\ \hline 1805 \\ + 722 \\ \hline 9025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 12 \\ \hline 34 \\ + 17 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\triangle AEF) = \frac{9025}{204}}$$

<u>Ответ</u>: 1) $R_1 = \frac{95}{6}$; $R_2 = \frac{136}{15}$

2) $\angle AFE = \operatorname{arcctg}\left(\frac{3}{5}\right)$

3) $S(\triangle AEF) = \frac{9025}{204}$

<u>№7</u> Да.