

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-32x^2 + 36x - 3 = 0$$

$$D = 36^2 - 4 \cdot 32 \cdot 3 =$$

$$= 1296 - 384 = 912 =$$

$$= 4^2 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 12 \\ \hline 64 \\ 32 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 36 \\ \hline 18 \\ 216 \\ \hline 108 \\ \times 12 \\ \hline 1296 \\ - 384 \\ \hline 912 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \sqrt{228} \\ 8 \\ \hline 11 \\ - 8 \\ \hline 32 \\ \times 32 \\ \hline 96 \\ - 28 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \sqrt{57} \\ 20 \\ \hline 17 \\ - 12 \\ \hline 57 \\ - 48 \\ \hline 9 \\ - 6 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$-\frac{25}{2} + \frac{45}{2} - \frac{6}{2} =$$

$$= \frac{20-6}{2} = 7$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$32 = 2^5$$

$$-2^5 x^2 + 2^2 \cdot 3^2 x - 3$$

$$57 = 27 + 30$$

$$3^3 \quad 3 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} \quad -2^5 \cdot \frac{1}{2^4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 3^2 - 3 = \frac{1}{2}$$

$$-8 + 18 - 3 = 7$$

$$= -2 + 9 - 3 = 4$$

$$-32 + 36 - 3 = 1$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{8} \quad \frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}$$

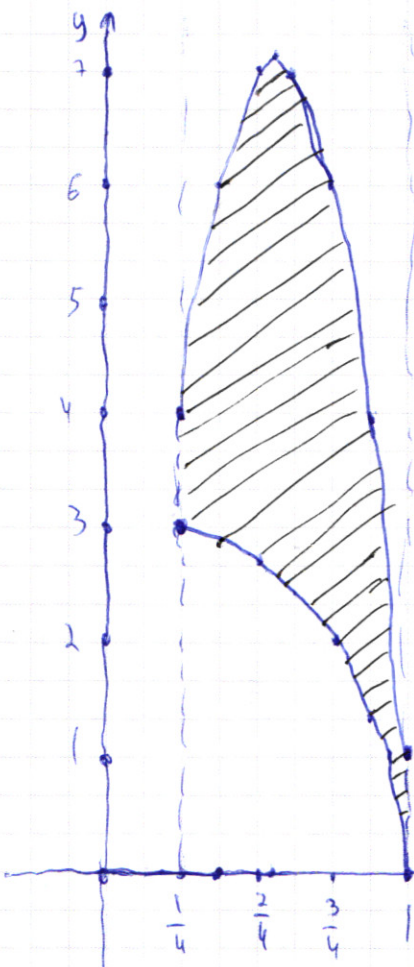
$$-21$$

$$-18 + 27 - 3 =$$

$$= 9 - 3 = 6$$

$$-\frac{9}{2} + \frac{27}{2} - \frac{6}{2} = \frac{27-9-6}{2} = \frac{18-6}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

№6



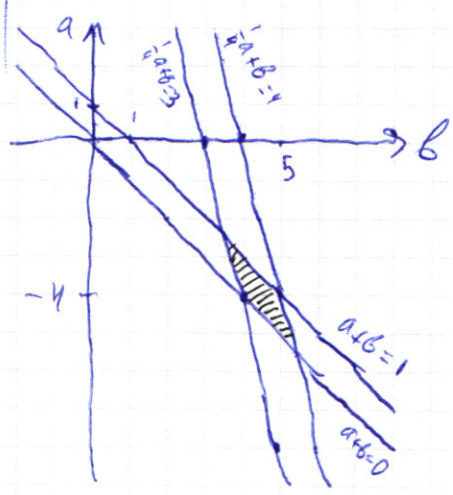
Обозначим $f(x) = ax + b$ — это уравн. прямой.
 Построим графики $\frac{16x-16}{4x-5}$ и $-32x^2+36x-3$
 на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$
 $f(x)$ должна находиться
 полностью в выдел зоне
 на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$
 (смотрите рисунок)
 Тогда должны выполняться
 система справа:

$$\begin{cases} f(1) \in [0; 1] \\ f(\frac{1}{4}) \in [3; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b \in [0; 1] \\ \frac{1}{4}a + b \in [3; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq a + b \leq 1 \\ 3 \leq \frac{1}{4}a + b \leq 4 \end{cases}$$

Теперь построим соответствующие графики функций относительно a и b



Тогда искомыми парами $(a; b)$ являются b выделенной области

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$$

$$36y^2 - 36y + x^2 - 12x - 45 = 0$$

$$D = 36^2 - 4 \cdot 36 \cdot (x^2 - 12x - 45) =$$

$$= 36^2 - 4 \cdot 36 \cdot x^2 + 4 \cdot 36 \cdot 12x + 4 \cdot 36 \cdot 45 =$$

$$= 6^4 - 12^2 x^2 + 12^3 x + 12^2 \cdot 45 =$$

$$= 6^2 (6^2 - 4x^2 + 48x + 180) =$$

$$= 36 (180 - 4x^2 + 48x + 180) =$$

$$= 36 (180 - (4x - 6)^2) =$$

$$= 36 (6\sqrt{5} - 4x + 6)(6\sqrt{5} + 4x - 6) \quad 6 \cdot 4 = 24 \cdot 2 = 48$$

$$36 \cdot 4 = 144$$

$$9^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 =$$

$$36 \cdot 5$$

$$180$$

$$\begin{array}{r} +180 \\ 36 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6$$

$$36$$

$$-4x^2 + 48x + 36 =$$

$$= -(4x - 6)^2 + 180$$

$$2 \leq x \leq 25$$

$$2 \leq y \leq 25$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

$$1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sum (x/y) < 0$$

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \sum \left(\frac{1}{4}\right) = 4 \sum \left(\frac{1}{8}\right) \quad \sum (a \cdot b) = \sum (a) + \sum (b)$$

$$\sum (1) = \sum (1) + \sum \left(\frac{1}{p}\right)$$

$$0 = \left[\frac{p}{q}\right] + \sum \left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\sum \left(\frac{1}{p}\right) = -\left[\frac{p}{q}\right]$$

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right) = \sum \left(\frac{1}{4}\right) + \sum \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\sum (1) = \sum (1) + \sum (1)$$

$$\sum (1) = 2 \sum (1)$$

$$\sum (1) = 0$$

$$\sum (p_1, p_2, p_3) = \sum (p_1) + \sum (p_2, \dots) =$$

$$= \sum (p_1) + \sum (p_2) + \sum (p_3, \dots) =$$

$$= \sum (p_1) + \dots + \sum (p_n) =$$

$$= \left[\frac{p_1}{q}\right] + \left[\frac{p_2}{q}\right] + \dots + \left[\frac{p_n}{q}\right]$$

5

Заметим, что $f(1) = 0$, т.к. $f(1) = f(1) + f(1)$

что $f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p) = -\left[\frac{p}{4}\right]$, т.к. $f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$
 $0 = \left[\frac{p}{4}\right] + f\left(\frac{1}{p}\right)$

что $f\left(\frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}{p_{n+1} \cdot p_{n+2} \cdot \dots \cdot p_m}\right) = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f\left(\frac{1}{p_{n+1}}\right) + \dots$

т.е. $f\left(\frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}{p_{n+1} \cdot p_{n+2} \cdot \dots \cdot p_m}\right) = f(p_1) + f\left(\frac{p_2 \cdot \dots \cdot p_n}{p_{n+1} \cdot p_{n+2} \cdot \dots \cdot p_m}\right) = \dots$

Отсюда так же легко видеть, что если в аргументе x для $f(x)$ в числ. и знамен. есть p_i , то они сокращаются в любом случае. И что если есть p_i^2 , то в $f(x)$ она дает $2\left[\frac{p_i}{4}\right]$ ($2 \in \mathbb{Z}$)

Тогда в общем виде можно записать так:

$$f(p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_n^{d_n}) = d_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + d_n \left[\frac{p_n}{4}\right] \quad (d_i \in \mathbb{Z})$$

а так же, что $f(x/y) = f(x) - f(y)$

Теперь рассмотрим $f(x)$ при $2 \leq x \leq 25$. $x \in \mathbb{N}$

x	f(x)	x	f(x)
2	0	14	1
3	0	15	1
4	0	16	0
5	1	17	4
6	0	18	0
7	1	19	4
8	0	20	1
9	0	21	1
10	1	22	2
11	2	23	5
12	0	24	0
13	3	25	2

Тогда $f(x/y) \leq 0$, когда $f(x) \leq f(y)$

$f(x) = 0$

x принимает одно из 10, y одно из 14, всего $10 \cdot 14 = 140$ пар

$f(x) = 1$; $x \rightarrow 7$; $y \rightarrow 7$, всего $7 \cdot 7 = 49$

$f(x) = 2$; $x \rightarrow 3$; $y \rightarrow 4$; всего $3 \cdot 4 = 12$

$f(x) = 3$; $x \rightarrow 1$; $y \rightarrow 3$; всего $1 \cdot 3 = 3$

$f(x) = 4$; $x \rightarrow 2$; $y \rightarrow 1$; всего $2 \cdot 1 = 2$

Тогда всего пар: $140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 206$

Ответ: 206 пар $(x; y)$

f(x)	0	1	2	3	4	5
количество	10	7	3	1	2	1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(21)

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \overset{\sin(2\alpha)}{+} \sin(2\alpha + 4\beta) &= \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \\ &= \sin 2\alpha (\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = \\ &= \sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = \\ &= 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + 2 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \\ &= 2 \cdot \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = \\ &= 2 \cdot \cos 2\beta \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

для простоты обозначим $a = \cos 2\beta$, $b = \sin 2\beta$

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + 2\beta) &= a \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha = 2a \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ b \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2a \operatorname{tg} \alpha + b - b \operatorname{tg}^2 \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha &= \frac{-2a \pm \sqrt{(4a^2 + 4b^2 + \frac{4b}{5})^{\frac{1}{2}}}}{2} \end{aligned}$$

а. так как a и b - гво разл. знач.,
то a и $\operatorname{tg} \alpha$ - значеный не меньше 3х

Подставляя a и b - получаем ~~результат~~ знач $\operatorname{tg} \alpha$

2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x - 12y \geq 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

1) $x = 8y + 2$ $x \geq 12y$ $\left(\begin{array}{l} 8y + 2 \geq 12y \\ y \leq \frac{1}{2} \end{array} \right)$

$$64y^2 + 32y + 4 + 36y^2 - 96y - 12 \cdot 36y = 45$$

$$100y^2 - 100y + 25 = 90$$

$$(10y - 5)^2 = 90$$

$$10y - 5 = \sqrt{90}$$

$$y = \frac{3\sqrt{10} + 5}{10}$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

не подходит

*

$$10y - 5 = -\sqrt{90}$$

$$y = -\frac{3\sqrt{10} + 5}{10}$$

$$y = -\frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

подходит

$$x = -8 \cdot \frac{3\sqrt{10} + 5}{10} + 2$$

I решение

2) $x = 18y - 3$, $x \geq 12y$ $\left(\begin{array}{l} 18y - 3 \geq 12y \\ y \geq \frac{1}{2} \end{array} \right)$

$$324y^2 - 108y + 9 + 36y^2 - 216y + 36 - 36y = 45$$

$$360y^2 - 360y + 45 = 45$$

$$360y(y - 1) = 0$$

$$y = 0 \leq \frac{1}{2}$$

не подходит

$$y = 1 > \frac{1}{2}$$

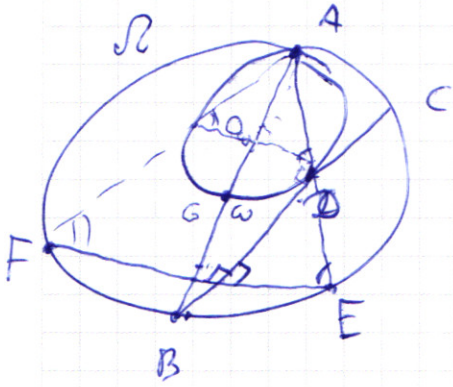
подходит

$$x = 15$$

II решение

Ответ: $-\frac{4(3\sqrt{10} + 5)}{5} + 2$; $-\frac{3\sqrt{10} + 5}{10}$ и 15 ; ~~18~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

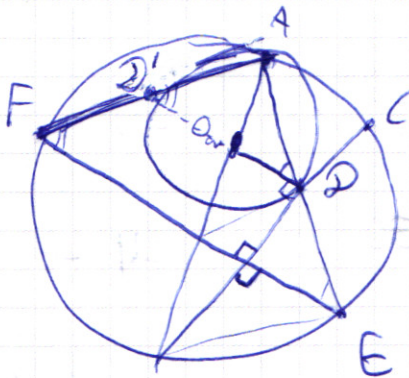


Найти
 R_{Ω}
 R_{ω}
 $\angle AFE$
 $S_{\triangle AEF}$

Дано
 $CD = \frac{19}{2}$
 $BD = \frac{17}{2}$

$$BD^2 = BG \cdot BA$$

$$BD \cdot DC = AD \cdot DE$$



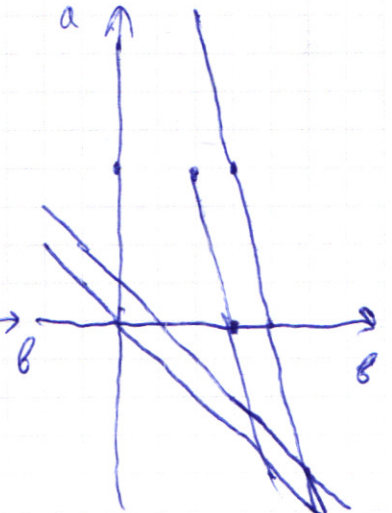
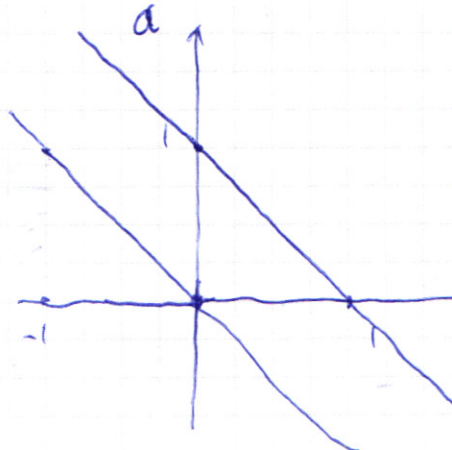
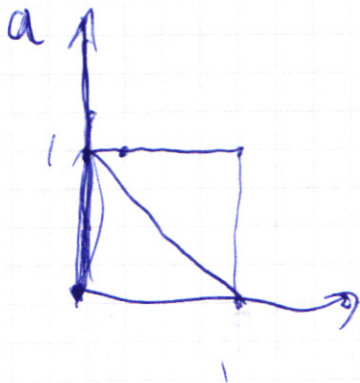
B

$$\begin{array}{r} +140 \\ +49 \\ +3 \\ +2 \\ \hline +194 \\ \hline \frac{12}{206} \end{array}$$

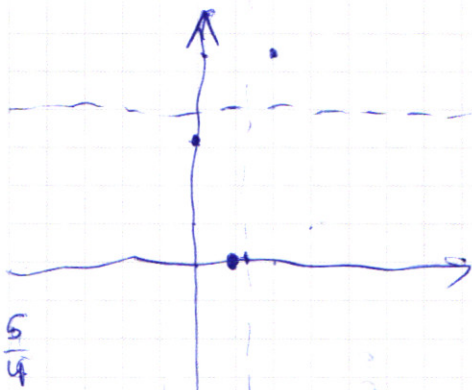
$$0 \leq a + b \leq 1$$

$O_{\omega} \in AB$
 $O_{\omega} D \perp BC$ и $FE \perp BC$

\Downarrow
 $O_{\omega} D \parallel FE$



$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$



	$\frac{-32}{-9}$	$\frac{16}{3}$	
x	1	2	3
y	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{32}{3}$
	$5\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	3

$$16x-16 = 4(4x-5)$$

$$16x-16 = 16x-20$$

$$\frac{3}{8} \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

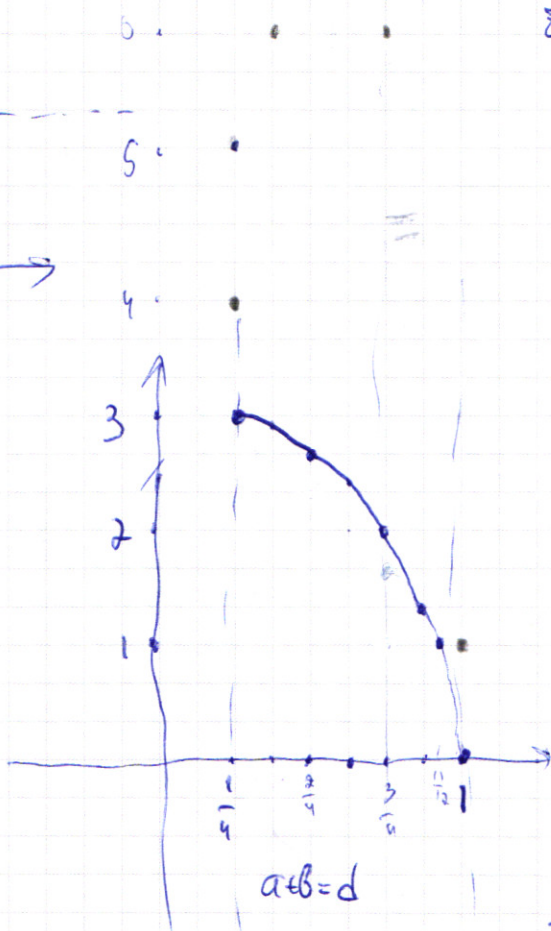
$$\frac{3}{2} \quad \frac{6-16}{2-5} = \frac{-10}{-3} = 2\frac{2}{3}$$

$$6-16 = -10$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\frac{3}{4} \quad \frac{12-16}{3-5} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$16 = 4 \cdot 4 \quad \frac{3}{4} \cdot 16 = 3 \cdot 4 = 12$$



$$\frac{1}{4}a+b = \frac{5}{4}a+d$$

$$\frac{1}{3} > \frac{5}{5}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{14-16}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\frac{10-16}{\frac{5}{2}-\frac{10}{2}} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{3}{8} \quad \frac{6-16}{3-5} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$16x-16 \leq 4x-5$$

$$12x \leq 11$$

$$x \leq \frac{11}{12}$$

$$16x-16 = 8x-10$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{81-24}{8} = \frac{57}{8}$$

$$16 \cdot \frac{3}{4} - 16 = 8 \cdot \frac{3}{4} - 10$$

$$12 - 16 = 6 - 10$$

$$-4 = -4$$

$$\frac{9 \cdot 3^2}{16} = \frac{27}{4}$$

$$16x-16-8x+10=0$$

$$8x-6=0$$

$$-\frac{81}{8} + \frac{162}{8} - \frac{24}{8}$$

$$16x-16 = 4x-5$$

$$12x = 11$$

$$x = \frac{11}{12}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$$

$$(x - 12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$\begin{cases} x - 12y \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

(12y)²

$$18y(x - 12y)$$

$$x^2 - 26xy + x + 144y^2 + 12y - 6 = 0$$

$$x^2 + (1 - 26y)x + (144y^2 + 12y - 6) = 0$$

$$D = (1 - 26y)^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) =$$

$$= 1 - 52y + 26^2y^2 - 576y^2 - 48y + 24 =$$

$$= (26^2 - 576)y^2 - (52 + 48)y + 25 =$$

$$= 100y^2 - 100y + 25 =$$

$$= (10y - 5)^2$$

$$x = \frac{26y - 1 \pm (10y - 5)}{2} =$$

$$x = \frac{36y - 6}{2} = 18y - 3$$

$$x = \frac{26y - 1 - (10y - 5)}{2} =$$

$$= \frac{16y + 4}{2} = 8y + 2$$

$$x = 18y - 3$$

$$x = 8y + 2$$

$$x \geq 12y$$

$$S(p^2) = S(p) + S(p)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \sqrt{26} \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \\ 576 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline 4 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ 48 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ 48 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$100y^2 - 10y + 25$$

$$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$$

$$x(x-12) + 36y(y-1) = 45$$

$$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y - 45 = 0 \quad 180$$

$$D = 144 - 4 \cdot 36y^2 + 4 \cdot 36y + 45 \cdot 4 =$$

$$= 144 - 144y^2 + 144y + 180 =$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 24 \\ \hline 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta)$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

~~$$y(y-1) = 1$$~~

$$y(y-1) = 1$$

~~$$1 - \cos^2 \alpha$$~~

~~$$1 - \cos^2 \alpha$$~~

$$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha \neq \sin 2\alpha =$$

$$= \sin 2\alpha (\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha =$$

$$\neq = \sin 2\alpha \cdot 2 \cos^2 2\beta + 2 \sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha =$$

~~$$\sin 2\alpha = \frac{2}{5}$$~~

$$= 2 \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) =$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

~~$$\sin 2\beta = \frac{2}{5}$$~~

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin = 2 \cdot \cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\neq \frac{\sqrt{5}}{5} \sin 2\alpha + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + 2\beta) &= \overset{a}{\sin 2\alpha} \cdot \overset{b}{\cos 2\beta} + \overset{b}{\sin 2\beta} \cdot \overset{a}{\cos 2\alpha} = \\ &= 2a \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + b \cos^2 \alpha - b \sin^2 \alpha = \\ &= (2a \cdot \operatorname{tg} \alpha + b - b \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$D = \sqrt{4a^2 - 4b^2}$$

$$+ 4b \left(b + \frac{1}{\sqrt{b}} \right)$$

$$\sqrt{4a^2 + 4b^2 + \frac{4b^2}{\sqrt{b}}}$$

$$= b \left(\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2a}{b} \operatorname{tg} \alpha + 1 \right)$$

$$2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

$$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$4a^2 - 4b$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 36y$$

$$36y^2 - 36y + \frac{1}{4} = \left(36y - \frac{1}{4} \right)^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$$

$$2 \cdot x \cdot 6$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$1 - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 \right) = 1$$

$$\begin{array}{r} + 36,25 \\ 45 \\ \hline 81,25 \\ \sqrt{} \\ 1,08 \end{array}$$

~~2/3~~

~~x = 8y + 2~~

$$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$$

$$x = 8y + 2$$

$$x^2 = 64y^2 + 32y + 4$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 8 \\ \hline 16 \\ 8 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 64 \\ 36 \\ \hline 100 \end{array}$$

$$\underline{64y^2} + \underline{32y} + \underline{4} + \underline{36y^2} - \underline{96y} - \underline{24} - \underline{36y} = 45$$

$$100y^2 + 100y + 25 =$$

$$\begin{array}{r} - 32 \\ - 36 \\ \hline - 4 \\ + - 96 \\ \hline - 100 \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{16}$

$$18y - 3 \geq 12y$$

$$6y \geq 3$$

$$y \geq \frac{1}{2}$$

9.2

~~10y~~

$$10y$$

$$\begin{array}{r} - 20 \\ - 45 \\ \hline 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 20 \\ + 25 \\ \hline 45 \\ - 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 18 \\ \hline 18 \\ 144 \\ \hline 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$x = 8y + 2$$

$$x \geq 12y$$

$$45 + 24 + 25 + 4$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 12 \\ \hline 36 \\ 18 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 3 \\ \hline 24 \\ 3 \\ \hline 54 \\ 1 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$8y + 2 \geq 12y$$

$$2 \geq 4y$$

$$y \leq \frac{1}{2}$$

$$y + 36 = 45$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 216 \\ 36 \\ \hline 252 \\ 108 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 324 \\ 236 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$360y(y-1)$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)