МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

К 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

+ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

+ 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

+ 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

① $\cancel{x}$ (1)

Возведём в квадрат обе части при условии, что $x-12y\geq 0$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+x+144y^2+12y-6=0$

$x^2+x(1-26y)+144y^2+12y-6=0$

$D=(1-26y)^2-4(144y^2+12y-6)=1-52y+26^2y^2-$

$-4\cdot 144y^2-4\cdot 12y+24=100y^2-100y+25=(10y-5)^2$

$x=\frac{26y-1\pm(10y-5)}{2}$

$\left[\begin{array}{l} (1)\begin{cases} x=\frac{26y-1+10y-5}{2} \\ x-12y\geq 0 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \\ (2)\begin{cases} x=\frac{26y-1-10y+5}{2} \\ x-12y\geq 0 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \end{array}\right.$

~~$\begin{cases} x=18y-3 \\ x\geq 12y \\ (18y-3)^2+36y^2-12(18y-3)-3 \end{cases}$~~

$\cancel{x}$ (1) I. $x=\frac{26y-1+10y-5}{2}=18y-3$

$18y-3-12y\geq 0$ $6y\geq 3$ $y\geq\frac{1}{2}$

Подставим $x=18y-3$: $(18y-3)^2+36y^2-12x-36y=45$

$324y^2-108y+9+36y^2-216y+36-36y-45=0$

$360y^2-360y=0$; $y^2-y=0$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1\end{array}\right. \\ y\geq\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow y=1$

$\begin{cases} y=1 \\ x=18y-3=15 \end{cases}$

$\cancel{x}$(2) $x=\frac{26y-1-10y+5}{2}=8y+2$

$8y+2\geq 12y$

$2\geq 4y$; $y\leq\frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$(8y+2)^2+36y^2-12(8y+2)-36y=45$

$64y^2+32y+4+36y^2-96y-24-36y=45$

$100y^2-100y-65=0$

$(10y-5)^2-25-65=0$; $(10y-5)^2=90$

$10y-5=\pm\sqrt{90}$; $y=\dfrac{\pm3\sqrt{10}+5}{10}$

1) $y=\dfrac{3\sqrt{10}+5}{10} \vee \dfrac{1}{2}$

$3\sqrt{10}+5>5$

$3\sqrt{10}>0 \Rightarrow y=\dfrac{3\sqrt{10}+5}{10}$ - не подходит

$\cancel{\Rightarrow x = \left(\dfrac{3\sqrt{10}+5}{10_5}\right)\cdot 8^4 + 2 \Rightarrow}$

$\cancel{= -12\sqrt{10}}$

2) $y=\dfrac{-3\sqrt{10}+5}{10} \vee \dfrac{1}{2}$

$-3\sqrt{10}<0 \Rightarrow y=\dfrac{-3\sqrt{10}+5}{10}$ - подходит

$x=\left(\dfrac{-3\sqrt{10}+5}{10_5}\right)\cdot 8^4+2=\left(\dfrac{-12\sqrt{10}+20+10}{5}\right)=$

$=\dfrac{-12\sqrt{10}+30}{5}=\dfrac{-12\sqrt{10}}{5}+6$

Ответ: $(15;1)$; $\left(\dfrac{-12\sqrt{10}}{5}+6;\ \dfrac{3\sqrt{10}+5}{10}\right)$

③ $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

Замена: $t=10x-x^2$

Ограничение: $10x-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(0;10)$

т.к. $t>0$ на $\dfrac{\cancel{ОДЗ}}{огр} \Rightarrow$ раскрываем модуль

только одним образом:

$t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$

$5^{\log_3 t}=t^{\log_t 5\cdot\log_3 t}=t^{\frac{\log_t 5}{\log_t 3}}=t^{\log_3 5}$

(при этом $t\neq1$)

$t+t^{\log_3 4}\geq t^{\log_3 5}$

$t\left(1+t^{\log_3\frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}\right)\geq0$

т.к. $t>0$ на огр $\Rightarrow$ разделим обе части на t.

$1+t^{\log_3\frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}\geq0$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0$~~

~~$1 \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}} - t^{\log_3 \frac{4}{3}}$~~

~~По методу рационализации:~~

~~$1 \geq (t-1)(\log_3 \frac{5}{3} - \log_3 \frac{4}{3})$~~

~~$\log_3 \frac{5}{3} - \log_3 \frac{4}{3} = \log_3 \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} = \log_3 \frac{5}{4}$~~

~~$1 \geq (t-1) \cdot \log_3 \frac{5}{4}$~~

~~$\log_3 \frac{5}{4} > \log_3 1 \Rightarrow \log_3 \frac{5}{4} > 0$~~

~~$t - 1 \leq \frac{1}{\log_3 \frac{5}{4}}$~~

~~$t \leq \frac{1}{\log_3 \frac{5}{4}} + 1$~~

~~$\Rightarrow 10x - x^2 \leq \frac{1}{\log_3 \frac{5}{4}} + 1$~~

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

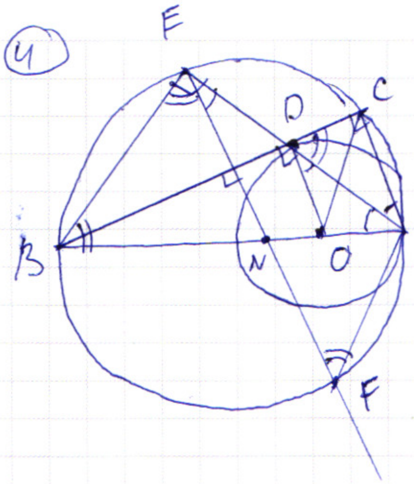
$\log_t (1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq \log_3 \frac{5}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

(4)



$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

$\exists R$ — рад. Ω, r — рад ω

(1) $FE \perp BC$

$\exists O$ — центр малой окр-ти,

N — центр большой окр-ти

$OD \perp BC$

$\Rightarrow EF \parallel OD \Rightarrow O\hat{D}A = F\hat{E}A$

т.к. BA диаметр $\Rightarrow B\hat{E}A = 90°$

$$\left.\begin{array}{l} E\hat{B}A + E\hat{A}B = 90° \\ B\hat{E}N + N\hat{E}A\ (= E\hat{A}B) = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B\hat{E}N = E\hat{B}N \Rightarrow BN = EN = NA \Rightarrow N$ - центр окр-ти Ω

(2) Из подобия Δов BDO и BCA:

$\frac{BC}{BD} = \frac{2R}{2R-r} \Rightarrow \frac{16 \cdot 2}{17} = \frac{2R}{2R-r} \Rightarrow \frac{16}{17} = \frac{R}{2R-r} \Rightarrow$

$BC = BD + DC = 16$ $\Rightarrow \frac{17}{16} = 2 - \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{15}{16} \Rightarrow r = \frac{15}{16}R$

т.к. BD касательная $\Rightarrow BD^2 = (2R - 2r)\cdot 2R$

$\frac{17^2}{4} = 4(R-r)\cdot R$

$\frac{17^2}{16} = (R-r)\cdot R \Rightarrow \frac{17^2}{16} = (\frac{16}{16}R - \frac{15}{16}R)\cdot R = \frac{R^2}{16}$

$\Rightarrow \boxed{R = 17 \Rightarrow r = \frac{15\cdot 17}{16} = \frac{255}{16}}$

(3) $\angle AFE$

т.к. $BEAF$ - вписс $\Rightarrow E\hat{B}A = E\hat{F}A$

$$\left.\begin{array}{l} \text{т.к. } OD \perp BC;\ AC \perp BC \\ (BA \text{ - диаметр}) \end{array}\right] \Rightarrow DO \parallel CA \Rightarrow O\hat{D}A = D\hat{A}C$$

т.к. $B\hat{E}F + F\hat{E}A = 90°$;

$F\hat{E}A =$ ~~DA~~ $N\hat{A}D$ $(NE = NA) \Rightarrow F\hat{E}A = F\hat{A}C$

$\angle\Delta DCA$: $DC = \frac{15}{2}$; найдем CA: $AC^2 = 17^2\cdot 4 - 16^2 = 18\cdot 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 30 \Rightarrow$ ~~ADC~~ $\operatorname{tg} A\hat{D}C = \frac{30}{15}\cdot 2 = 4$

$A\hat{D}C = E\hat{F}A \Rightarrow \boxed{E\hat{F}A = \operatorname{arctg} 4}$

(4) S AFE:

$$\left.\begin{array}{l} \angle \Delta BEN \text{ и } \Delta NAF: E\hat{N}B = F\hat{N}A; \\ EN = NB = NA = FN \end{array}\right] \Rightarrow S_{BEN} = S_{NAF}$$

$\Rightarrow S_{FEA} = S_{BFA}$ Найдем S_{BEA}

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

S_{BEA}: т.к. $tg\ AFE = 4 \Rightarrow tg\ F\hat{B}A = 4 \Rightarrow \frac{FA}{FB} = 4$

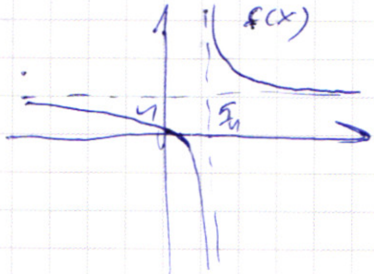
$\Rightarrow \exists FB = x \Rightarrow FA = 4x$

$x^2 + 16x^2 = 4R^2 \Rightarrow 17x^2 = 4 \cdot 17^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{17}$

$\Rightarrow S_{BEA} = \frac{BE \cdot EA}{2} = \frac{2\sqrt{17} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{17}}{2} = 8 \cdot 17 = \boxed{136}$

Ответ: $r = \frac{255}{16}$; $R = 17$

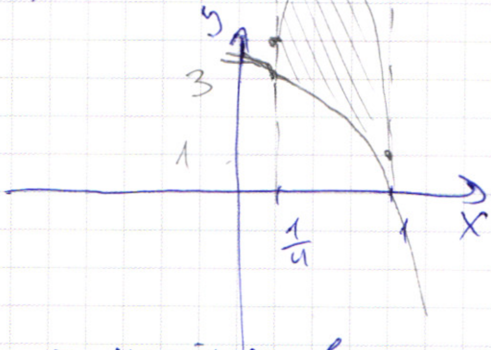
$EFA = arctg\,4$; $S_{EFA} = 136$

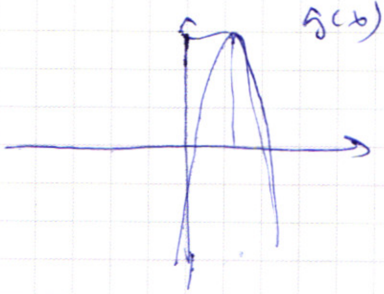


(6) $\underbrace{\frac{16x-16}{4x-5}}_{f(x)} \le ax+b \le \underbrace{-32x^2+36-3}_{g(x)}$

$f(x) = 4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$; $f(\frac{1}{4}) = 3$; $f(1) = 0$

$g(x) = -32x^2 + 36 - 3$; $g(\frac{1}{4}) = 4$; $g(1) = 1$





$\Rightarrow$ крайнее верхнее положение:

$y = kx + b$

$\begin{cases} 4 = \frac{1}{4}k + b \\ 1 = k + b \end{cases} \Rightarrow y = -4x + b$ $\quad f' = \cancel{\frac{1}{x-}} - \frac{1}{(x-\frac{5}{4})^2}$

уравнение касат. к гиперболе:

$y_k = \left(4 + \frac{1}{x_0 - \frac{5}{4}}\right) + \underbrace{\left(-\frac{1}{(x_0+\frac{5}{4})^2}\right)}_{k}(x - x_0)$

$\exists k = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}$ подставим $x_0 = \frac{3}{4}$ в y_k:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$x_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_к = 2 - 4x + 3 = -4x + 5.$

т.е. при крайнем верхнем положении

$ax + b$ — это касательная к гиперболе $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это единственный случай.

Ответ: $\cancel{a = 4}$ $\quad a = -4$

$\cancel{b = -5}$ $\quad b = 5$

① $\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \underbrace{\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha} = -\frac{2}{5} \end{cases}$

$2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y_k(1) = \cancel{4} - 25 + (4+5)(x-1) =$

$= \cancel{9x+9}16$

$y_k = y_0 + y_0'(x-x_0)$

$y = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$y' = -\frac{1}{(x-\frac{5}{4})^2}$

$4 +-$

$-\cancel{\frac{1}{(-\frac{1}{4})^2}} \quad -\frac{1}{(1-\frac{5}{4})^2} + \left(4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}\right)(x-1) =$

$= -\cancel{\frac{1}{16}} \quad -16$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \cancel{\frac{16(x-1)}{4}}$ $\quad 4 + \frac{4}{4x-5} = \cancel{\frac{16x-16+4}{4x-5}}$

$= \frac{16x-16}{4x-5}$ $\quad 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$4 + \frac{1}{1-\frac{5}{4}} + -\left(\frac{1}{(1-\frac{5}{4})^2}\right)(x-1) = 0 - 16x + 16$

$\Rightarrow \left(4 + \frac{1}{x_0-\frac{5}{4}}\right) + \left(-\frac{1}{(x_0-\frac{5}{4})^2}\right)(x-x_0)$

$-\frac{1}{(x_0-\frac{5}{4})^2} = -4$

$1 = 4(x_0-\frac{5}{4})^2$

$\frac{1}{2} = x_0 - \frac{5}{4}$

$-\frac{1}{2} \cancel{x_0} = x_0 - \frac{5}{4}$

$\cancel{x_0 = \frac{3}{2}}$

$\cancel{x_0 = 1}$

$x_0 = \frac{2}{4} + \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$ ⊗

$x_0 = \frac{5}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$\cancel{4+2} \frac{1}{}$

$2 + -4x + 3 = -4x + 5 \Rightarrow$ $a = -4$, $b = 5$

$BC = 16$

$16^2 + CA^2 = 4R^2$

$\frac{17}{2\cdot r} = \frac{16}{CA} \Rightarrow CA = \frac{32\cdot r}{17}$

$r^2 + \frac{17^2}{4} = (\cancel{2R}\ (\frac{2\cdot 17\cdot r}{34-4r} - r)$

$(\frac{17\cdot r}{17-2r} - r)^2$

$r^2 + \frac{17^2}{4} = r^2(\frac{17}{17-2r} - 1)^2$

$r^2 + \frac{17^2}{4} = r^2(\frac{\cancel{17-17}+2r}{17-2r})^2$

$r^2 + \frac{17^2}{4} = r^2 \frac{4r^2}{(17-2r)^2}$

$4r^4 = (r^2 + \frac{17}{4})^2(17-2r^2)$

$4r^4 = 17\cdot r^2 - 2r^4 + \frac{17^2}{4} - \frac{17}{2}r^2$

$6\cdot r^4 = \frac{17}{2}\cdot r^2 + \frac{17^2}{4}$

$24\cdot r^4 - 34\cdot r^2 - 17^2 = 0$

$D/4 = 17^2 + 17^2\cdot 24 = 17^2\cdot 25$

$r_{1,2} = \frac{17 \pm 17\cdot 5}{2}$

$r_1 = \frac{6\cdot 17}{2} = 3\cdot 17$

$r_2 = -\frac{4\cdot 17}{2} = -2\cdot 17 < 0$

$r = \sqrt{3\cdot 17}$

$16^2 + AC^2 = 4R^2$

$\cancel{\frac{BD}{r}}$ BD

$\frac{BD}{BC} = \frac{r}{AC}$

$AC = \frac{r\cdot 16\cdot 2}{17} = \frac{32\cdot r}{17}$

$r^2 + \frac{17^2}{4} = (2R - r)^2$

$r^2 + \frac{17^2}{4} = (\frac{17\cdot 2r}{34-4r} - r)^2$

$(\frac{\cancel{34r} - \cancel{34r} + 4r^2}{34-4r})^2$

$(r^2 + \frac{17^2}{4})(34-4r)^2 = 16\cdot r^4$

$(r^2 + \frac{17^2}{4})(34^2 - 34\cdot 8r + 16r^2) = 16\cdot r^4$

$34^2\cdot r^2 - 34\cdot 8\, r^3 + \cancel{16\, r^4} + \frac{17^2\cdot 34^2}{4} - 34\cdot 8\cdot\frac{17^2}{4} r + 16\cdot r^2\cdot\frac{17^2}{4} = \cancel{16\cdot r^4}$

$\cancel{-34\cdot 8\cdot r^3 + 34^2\cdot r^2 - 34\cdot 8\ \ 34\cdot 17^2\cdot 2\cdot r}$

$-34\cdot 8\cdot r^3 + r^2(34^2 + \frac{16\cdot 17^2}{4}) - 34\cdot 17^2\cdot 2\cdot r + \frac{17^2\cdot 34^2}{4} = 0$

$\frac{17^2}{4} = (2R - 2r)\cdot 2R$

$\frac{17^2}{16} = (R - r)R$

$\frac{17^2}{16} = (\frac{17r}{34-4r} - r)\frac{17r}{34-4r}$

$\frac{17^2}{16} = (\frac{17r - \cancel{r}}{34-4r})\cdot\frac{17r}{34-4r}$

$\frac{17r}{34-4r} - r = \frac{17r - 34r + 4r^2}{34-4r} =$

$= \frac{4r^2 - 17r}{34-4r}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

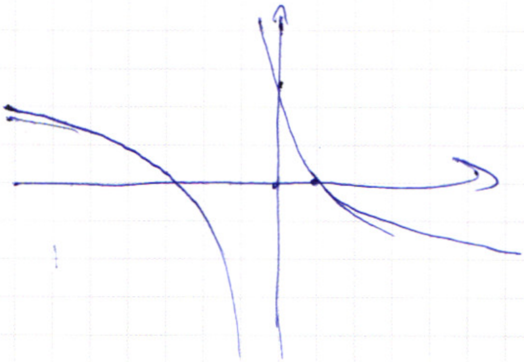
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$[\frac{1}{4}; 1]$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -(32x^2-36x+3)$

$16x-9 \; 20$



$16 \cdot 2$

$4\sqrt{2}$

$4 \mp \frac{4}{}$

$\frac{\frac{4}{x}}{4-\frac{5}{x}}$

$4x - \frac{4}{5}$

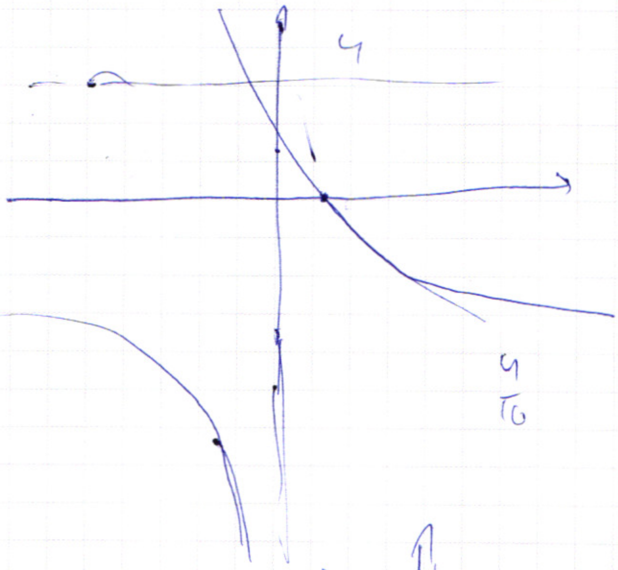
$2 = 4+\frac{4}{4x-5}$

$-2 = \frac{4}{4x-5}$

$-8x+10 = 4$

$b = 8x = \frac{3}{4}$

$4(x-\frac{5}{4})$



$4+\frac{4}{4x-5} = 0$

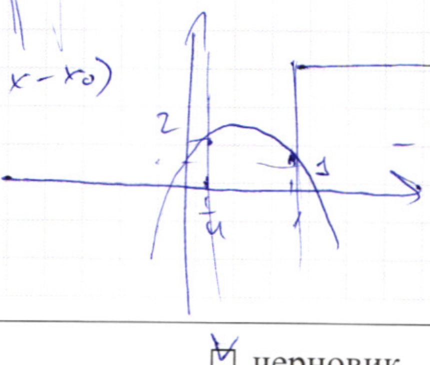
$\frac{1}{4x-5} = -1$

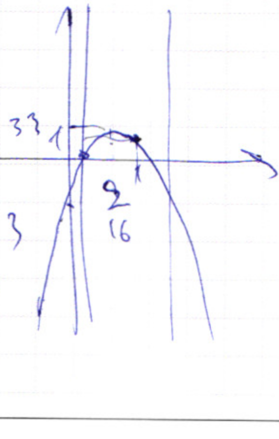
$1 = -4x+5$

$x = 1$

б) $-\frac{b}{2a} = \frac{\cancel{36}\,18}{\cancel{32}\cdot 2} = \frac{9}{8}$

$y = y_0 + y_0'(x-x_0)$



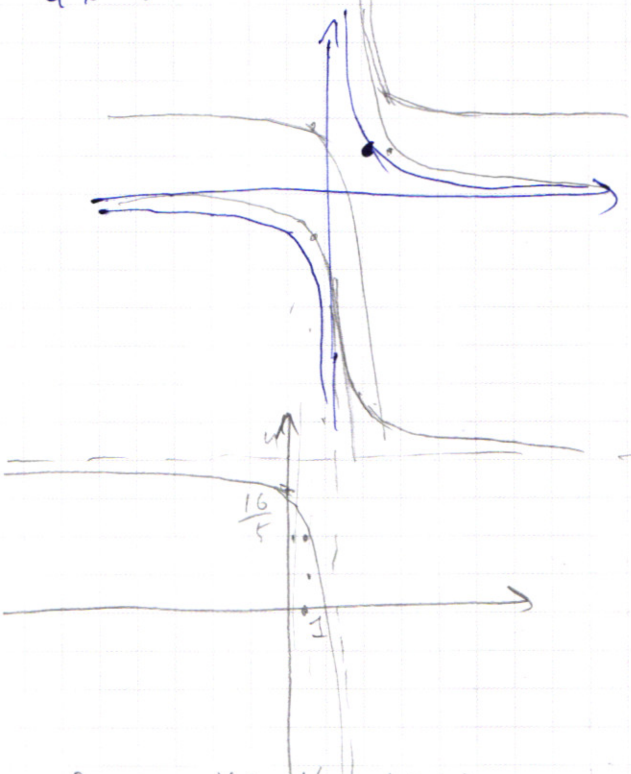


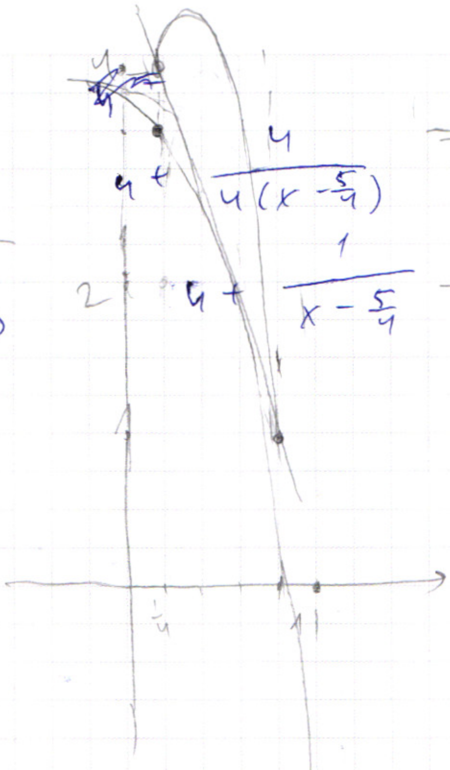
$\cancel{-\frac{32 \cdot 9^2}{16 \cdot 16} + \frac{36 \cdot 9}{16} - 3}$

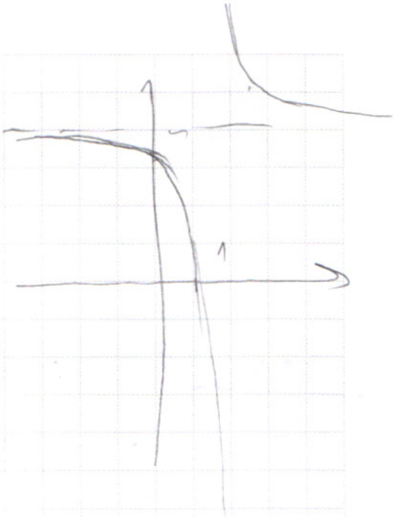
$-\frac{32 \cdot 9}{8 \cdot 8 \cdot 2} + \frac{36 \cdot 9}{8 \cdot 2} - 3$

$\frac{9}{2}(9-1)-3 = \frac{9}{2}\cdot 8 - 3 = 33$

$$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$







$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$; $g(x) = -32x^2+36x-3$

$\cancel{f()} = f(\frac{1}{4}) = 3$; $f(1) = 0$

$g(\frac{1}{4}) = 4$; $g(1) = 1$

$-\frac{32}{16} + 9 - 3 = -2 + 9 - 3 = 7 - 3 = 4$

(1) крайнее верхнее положение: $x = \frac{1}{4}$; $y = 4$

$x = 1$; $y = 1$

$\begin{cases} y = kx + b \end{cases}$ $\begin{cases} 4 = \frac{1}{4}k + b \\ 1 = k + b \end{cases}$ $-3 = \frac{3}{4}k$

$k = -4$

$1 = -4 + b$ $b = 5$

$y = -4x + 5$

Касат. к гиперболе:

$y = 4 + \frac{1}{x - \frac{4}{5}}$

$y' = \left(\frac{1}{x-\frac{4}{5}}\right)' = \left((x-\frac{4}{5})^{-1}\right)' = -\cancel{1} \cdot \frac{1}{(x-\frac{4}{5})^2}$

$y_к = \frac{1}{(x_0-\frac{4}{5})^2} + \left(4 + \frac{1}{x_0 - \frac{4}{5}}\right)(x - x_0) =$

$= \left(4 + \frac{1}{x_0 - \frac{4}{5}}\right)x - x_0 \cdot \left(\frac{4x_0 - \frac{16}{5} + 1}{x_0 - \frac{4}{5}}\right) + \frac{1}{(x_0-\frac{4}{5})^2} =$

$\left(4 + \frac{5}{}\right) \cdot x - 1\left(\frac{4 \cdot 1 - \frac{16}{5} + 1}{\frac{1}{5}}\right) + \left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)^2 =$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{BD}{BC} = \frac{2R-r}{2r}$ $\quad \frac{64+17}{34} = \frac{R}{r}$ $\quad 81 - 34 = 47$ $\quad 81 - 34 = 47$

$\frac{32}{17} = \frac{R}{r} - \frac{1}{2}$ $\quad \frac{81}{34} = \frac{R}{r}$ $\quad r = \frac{R \cdot 34}{81}$

$\frac{17^2}{4} = (2R-2r)\cdot 2R$ $\quad R - r = \cancel{\frac{R \cdot 34}{81}} -$

$\frac{17^2}{16} = (R-r)\cdot R$ $\quad R - \frac{R\cdot 34}{81} = R\left(\frac{81-34}{81}\right)$

$\frac{17^2}{16} = \cancel{(R(\frac{81-34}{81}))2R}$

$R^2 = \frac{17^2 \cdot 81}{16 \cdot 47}$ $\quad R = \frac{17\cdot 9\cdot\sqrt{47}}{4\cdot 47}$

$\frac{32}{17} = \frac{2R}{2R-r}$ $\quad \frac{17}{16} = \frac{2R-r}{R}$ $\quad \cancel{\frac{r}{R} = \frac{33}{16}}$ $\quad \frac{r}{R} = \frac{32}{16} - \frac{17}{16}$

$\frac{17}{32} = \frac{2R-r}{2R}$ $\quad \frac{17}{16} = 2 - \frac{r}{R}$ $\quad \cancel{r = \frac{33}{16}R}$ $\quad \frac{r}{R} = \frac{15}{16}$

$\frac{17^2}{16} = (R-r)\cdot R$ $\quad \frac{17^2}{16} = \left(R - \frac{15}{16}R\right)\cdot R$ $\quad r = \frac{15}{16}R$

$\frac{17^2}{16} = \frac{R^2}{16} \Rightarrow R = 17$

$r = \frac{15\cdot 17}{16}$ $\quad 33 \times 4 = 132$

$\frac{BC}{BD} = \frac{2R}{2R-r}$ $\quad \frac{17}{32} = 1 - \frac{r}{2R}$ $\quad 17 \times 8 = 136$

$\frac{BD}{BC} = \frac{2R-r}{2R}$ $\quad \frac{r}{2R} = \frac{15}{32}$ $\quad \frac{r}{R} = \frac{15}{16}$

$\frac{17^2}{16} = \left(\frac{16}{16}R - \frac{15}{16}R\right)\cdot R$ $\quad \frac{17^2}{16} = \frac{R^2}{16} \Rightarrow R = 17$ $\quad r = \frac{15}{16}\cdot 17$

$\hat{AFE}$:

$4^2 \cdot 9 \quad 25 \cdot 9$

$18 \cdot 50 = 9$

CA: $\quad 4 \cdot CA^2 = 4BA^2 - BC^2 = 2(17-16)(2\cdot17+16) = \cancel{1\cdot 33}$ $\quad 3\cdot5\cdot2 = 30$

$AC = \sqrt{33}$

$\cancel{CD = \frac{15}{2}} \Rightarrow$ $\quad \operatorname{tg}\hat{AFA} = \cancel{\sqrt{33}}$ $\quad \frac{CA}{CD} = \frac{2\sqrt{33}}{15}$ $\quad \cancel{D = \sqrt{33 + \frac{15}{2}}}$

$\cancel{S_{AFE}} - ?$ $\quad DA = \sqrt{30^2 + \frac{225}{4}} = \frac{\sqrt{3825}}{\cancel{\sqrt{4}}\,2}$ $\quad \cancel{DA = \sqrt{33 + \frac{225}{4}}}$

$900 \cdot 4 = 3600$ $\quad = \sqrt{\frac{132+225}{4}}$

$\operatorname{tg} AFE = \frac{\cancel{230}}{\cancel{15}}\ 2 = 4$ $\quad = \frac{\sqrt{357}}{2}$

$3825 : 5$, -30, 82, 50, 325, -30, 25

$\frac{BF}{FA} = 4 \Rightarrow BF = 4\cdot FA$

$x^2 + 16x^2 = 17x^2 = 4\cdot 17$

$x = 2$

$3825 : 5 = 765$, -30, 8, -5, 32, -30, 25; $\quad 6165 : 5 = 1213$, 6, 19, 10, 6, 15

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \underbrace{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta\cdot\frac{1}{\sqrt5} = \frac{1}{5} \qquad \cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(x+2y)+\sin x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

$$t^{\log_t 5} \qquad \frac{\log_t 5}{\log_t 3} = \log_3 5$$

$$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

$$\log_t\left(t^{\log_3 ?} + t^{\log_3 5}\right) = \log_3 5$$

$$\cancel{\log_t t^{\log_3 3}\left(1 + t^{\log_3 \frac{5}{3}}\right)} =$$

$$t + t^{\log_3 4} \geq \cancel{t^{\log}}\; t^{\log_3 5}$$

$$\cancel{t(1+t^{\log_3 4}} \qquad t\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}\right)$$

$$1 + t^{-1}\left(t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5}\right)$$

$$1 \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}} - t^{\log_3 \frac{4}{3}}$$

$$t(1 + \ldots) \geq 0$$

$t > 0 \Rightarrow$ динимнат

$$1 \geq (t-1)\left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\right)$$

$$3 \geq t-1$$

$$t \leq 4$$

$$\cancel{10x - x^2}$$

$$t \leq 4$$

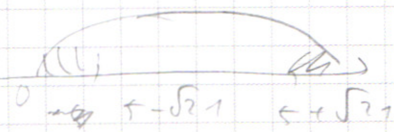
$$t > 0$$

$$10x - x^2 \leq 4$$

$$x^2 - 10x + 4 \geq 0$$

$$D/4 = 25 - 4 = 21$$

$$x_1 = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{}$$



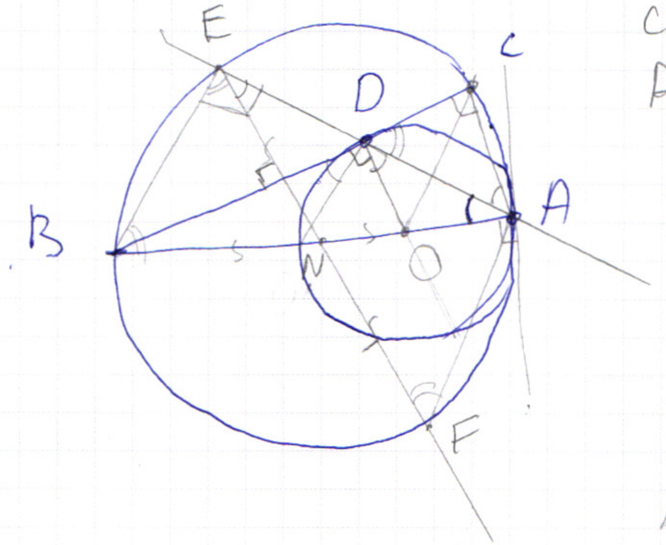
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$

R_1, R_2 ; ~~AB~~ $\hat{AFE}$ - ?

$S_{\hat{AFE}}$ - ?

1) ~~$BD^2 = 2R \cdot r$~~

① $FE \perp BD$; $OD \perp BD$ (касат)

$\Rightarrow EF \parallel DO \Rightarrow \hat{ODA} = \hat{FEA}$

т.к. BA - диаметр $\Rightarrow \hat{BEA} = 90°$

$\left.\begin{array}{l} \hat{EBA} + \hat{EAB} = 90° \\ \hat{BEN} + \hat{NEA} (= \hat{EAB}) = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{BEN} = \hat{EBN} \Rightarrow BN = EN = NA \Rightarrow$

$\Rightarrow$ N-центр окр-ти Ω

$BC = 16$

$\frac{BD}{r} = \frac{BC}{CA} = \frac{2R}{2R-r}$

$\frac{17}{2 \cdot r} = \frac{2R}{2R-r}$

$17 \cdot (2R - r) = 4 \cdot r \cdot R$ $\quad 34R - 17 \cdot r = 4 \cdot r R$

$R(34 - 4r) = 17r$

$\begin{cases} R = \frac{17r}{34-4r} \\ r^2 + \frac{17^2}{4} = (2R-r)^2 \end{cases}$

$\cancel{r^2} + \frac{17^2}{4} = 4R^2 - 4R \cdot r + \cancel{r^2}$

$\frac{17^2}{4} = 4R^2 - 4R \cdot r$

$\frac{17^2}{4} = 4 \cdot \frac{17^2 \cdot r^2}{(34-4r)^2} - \frac{4 \cdot Rr \cdot 17r}{34-4r}$

$\frac{17^2}{4} \cdot (34-4r)^2 = 17^2 \cdot r^2 - 4 \cdot 17 r^2 (34 - 4r)$

$\frac{17^2}{4} \cdot (34^2 - 8 \cdot 34 \cdot r + 16r^2) = 17^2 r^2 - 4 \cdot 17 r^2 \cdot 34 + 16 \cdot 17 r^3$

$r^2 (17^2 \cdot 4) - 17^2 r^2 + 4 \cdot 17 \cdot r^2 \cdot 17$?

$3 \cdot 17^2 \cdot r^2 - 8 \cdot 17^2 \cdot r^2 = 11 \cdot 17^2 r^2$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times 3 \\ \hline 102 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad$ $f(ab) = \left[\frac{ab}{4}\right] =$

$\left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]$

$f(p) = [p/4]$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha - ?$

$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$180 + 36 = 216$

$x^2-12x+36y^2-36y-45=0$

$\cancel{D/4 = 36-4(36y^2-36y-45) = 36-144y^2+144y+}$

$\cancel{+180 = -144y^2+144y+216 = -(144y^2-144y-216)}$

$D/4 = 36-36y^2+36y+45 = -36y^2+36y+81 =$

$= -(36y^2-36y-81)$

$2xy-12y-x+6 = 2y(x-6)-(x-6) =$

$= (x-6)(2y-1)$

26×26: $156 + 52 = 676$

$x-12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9 = 90$

$6\cdot 2 = 12$
$\cdot 3$

$144 \times 4 = 576$

$\cancel{(x-6)^2+(y-}$ $(x-6)^2+(6y-3)^2 = 90$

$x-12y \geq 0$

$x^2-24xy+144y^2 = 2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+144y^2+12y-6+x=0$

$x^2+x(1-26y)+144y^2+12y-6=0$

$D = 1-52y+26^2y^2-4\cdot 144y^2-4\cdot 12y+4\cdot 6 =$

$= 26^2y^2-4\cdot 144y^2-100y+25 =$

$= 100y^2-100y+25 = (10y-5)^2$

$10\cdot 5\cdot 2$ $\quad x = \frac{26y-1 \pm (10y-5)}{2}$

$x = \cancel{\dots}$

$\frac{26y-1-10y+5}{2}$

$\frac{16y+4}{2}$

$8y+2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2 + x(1-26y) + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$D = (10y-5)^2$

$x_{1,2} = \dfrac{26y - 1 \pm (10y-5)}{2}$

$x_1 = \dfrac{26y - 1 - 10y + 5}{2} = \dfrac{16y+4}{2} = 8y+2$

$x_2 = \dfrac{26y-1+10y-5}{2} = \dfrac{36y-6}{2} = 18y-3$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 8y+2 \\ x = 18y-3 \end{array}\right. \\ \dots \\ x - 12y \geq 0 \end{cases}$ $x \geq 12y$

$\begin{cases} x = 8y+2 \\ x \geq 12y \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 18y-3 \\ x \geq 12y \\ x^2 + 36y^2 - 12 \dots = 45 \end{cases}$

1) $8y + 2 \geq 12y$

$2 \geq 4y$

$\begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ x = 8y+2 \\ \dots \end{cases}$

$12 \cdot 8 = 96$ $\quad 96 + 36 = 132$

$(8y+2)^2 + 36y^2 - 12(8y+2) - 36y = 45$

$64y^2 + 32y + 4 + 36y^2 - 96y - 24 - 36y = 45$

$100y^2 - 100y - 65 = 0$

$(10y-5)^2 - 25 - 65 = 0$

$(10y-5)^2 = 90$

$18 \cdot 12 = 216$ $\quad 18 \cdot 18 = 324$

$10y - 5 = \pm\sqrt{90} = \pm 3\sqrt{10}$

$y = \dfrac{\pm\sqrt{90} + 5}{10}$

$y = \dfrac{\pm 3\sqrt{10} + 5}{10}$

$18 \cdot 6 = 108$ $\quad 324 + 36 = 360$

1) $\dfrac{3\sqrt{10}+5}{10} > \dfrac{1}{2}$

$3\sqrt{10} + 5 > 5$ (−)

$3\sqrt{10} > 0$

$\dfrac{-3\sqrt{10}+5}{10} \quad \dfrac{1}{2}$

$-3\sqrt{10} + 5 < 5$

$\Rightarrow y = \dfrac{-3\sqrt{10}+5}{10}$; $x = 8\left(\dfrac{-3\sqrt{10}+5}{10}\right) + 2 = \dfrac{-12\sqrt{10}+20}{5} + 2$

2) $18y - 3 \geq 12y$

$6y \geq 3$ $\quad y \geq \frac{1}{2}$

$216 + 108 = 324$ $\quad 324 + 36 = 360$

$(18y-3)^2 + 36y^2 - 12(18y-3) - 36y = 45$

$324y^2 - 108y + 9 + 36y^2 - 216y + 36 - 36y - 45 = 0$

$360y^2 - 360y = 0$ $\quad y^2 - y = 0$ $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow y = 1$, $x = 18$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$x^2 - 10x < 0 \quad x(x-10) < 0$

$x \in (0; 10)$

$\exists\ 10x - x^2 = t$

$t + |-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$x^2 - 10x < 0 \Rightarrow$ раскрываем модуль всегда с -

$t + (t)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} \quad t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_t 5}$

$\log_a b = c$

$\log_2 2^0 = 1 \quad t$

$\log_2 1 = 0$

$\log_t t^5 = 5$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_t 5} \qquad 5 = t^{\log_t 5}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_t 5 \cdot \log_3 t} \qquad \frac{\log_t 5}{\log_t 3} = \log_3 5$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 1} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$1 + t^{\log_3 4 - \log_3 1} \geq t^{\log_3 5 - \log_3 1}$

$1 + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

~~$1 \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} = t^{\log_3 4}(t^{\lambda} - 1)$~~

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

① $\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$

$2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$\cos 2\beta = \cancel{\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{5}{1} = \sqrt5}$

$\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{5}$

$\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{5}$ $\qquad tg\,\alpha$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt5\cdot 1}{5\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$

$1-\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

① $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \end{cases}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$1-\frac{1}{5} = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot 2 = -1$

$\sqrt5\ \sin(2\alpha+\varphi)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$

$= \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{-\frac{1}{\sqrt5}\cdot 2\alpha+}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)