МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad (2) \end{cases}$$

$tg\alpha$ - ?

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$$(2):\ 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{17}$$

$$\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

1 сл. $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$$

$\cos\alpha = 0$ не сод. корней ур.

$$2tg\alpha + 5 - 3tg^2\alpha = 0$$

$$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$$

~~по обр~~ $t = tg\alpha$

$$3t^2 - 2t - 5 = 0$$

по обр. т. Виета

$$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{5}{3} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2а. $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$

$\cos\alpha = 0$ не сод. корн. ур

$2tg\alpha - 3 + 5tg^2\alpha = 0$

$m = tg\alpha$

$5m^2 + 2m - 3 = 0$

по обр. т. Виета

$\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{3}{5} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha \in \{-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}\}$

№2.

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \quad (1) \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$

(1): $\begin{cases} xy - 6x - y + 6 = y^2 - 12xy + 36x^2 \\ y - 6x \geq 0 \end{cases}$

$y^2 - 13xy + y + 36x^2 + 6x - 6 = 0$

$y^2 + y(-13x + 1) + 36x^2 + 6x - 6 = 0$

$D = 1 - 26x + 169x^2 - 144x^2 - 24x + 24 =$

$= 25x^2 - 50x + 25 = 5^2 \cdot (x-1)^2$

$y_1 = \frac{13x - 1 + 5x - 5}{2} = 9x - 3$

$y_2 = \frac{13x - 1 - 5x + 5}{2} = 4x + 2$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 9x - 3 \\ y = 4x + 2 \end{array}\right. \\ y \geq 6x \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} y = 9x - 3, \; x \geq 1 \\ y = 4x + 2, \; x \leq 1 \end{array}\right.$

$9x - 3 \geq 6x$ $\quad 4x + 2 \geq 6x$

$3x \geq 3$ $\quad x \leq 1$

$x \geq 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 сл. $y = 9x - 3, \quad x \geq 1$

$9x^2 + 81x^2 - 54x + 9 - 18x - 108x + 36 - 45 = 0 \quad |:9$

$x^2 + 9x^2 - 6x + 1 - 2x - 12x + 4 - 5 = 0$

$10x^2 - 20x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$, но $x \geq 1 \Rightarrow x = 2 \quad y = 15$

2 сл. $y = 4x + 2, \quad x \leq 1$

$9x^2 + 16x^2 + 16x + 4 - 18x - 48x - 24 - 45 = 0$

$25x^2 - 50x - 65 = 0$

$5x^2 - 10x - 13 = 0$

$\frac{D}{4} = 25 + 13 \cdot 5 = 5(5+13) = 5 \cdot 18 = 9 \cdot 10$

$x_1 = \frac{5 + 3\sqrt{10}}{5}$

$x_2 = \frac{5 - 3\sqrt{10}}{5}$, но $x \leq 1 \Rightarrow x = \frac{5 - 3\sqrt{10}}{5}$

$y = \frac{20 - 12\sqrt{10}}{5} + 2 = \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}$

Ответ: $(2; 15)$; $\left(\frac{5 - 3\sqrt{10}}{5}; \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}\right)$

№ 3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Необходимо: $26x-x^2>0$ $\quad x^2-26x<0$

$\Downarrow$

$|x^2-26x|=-x^2+26x$

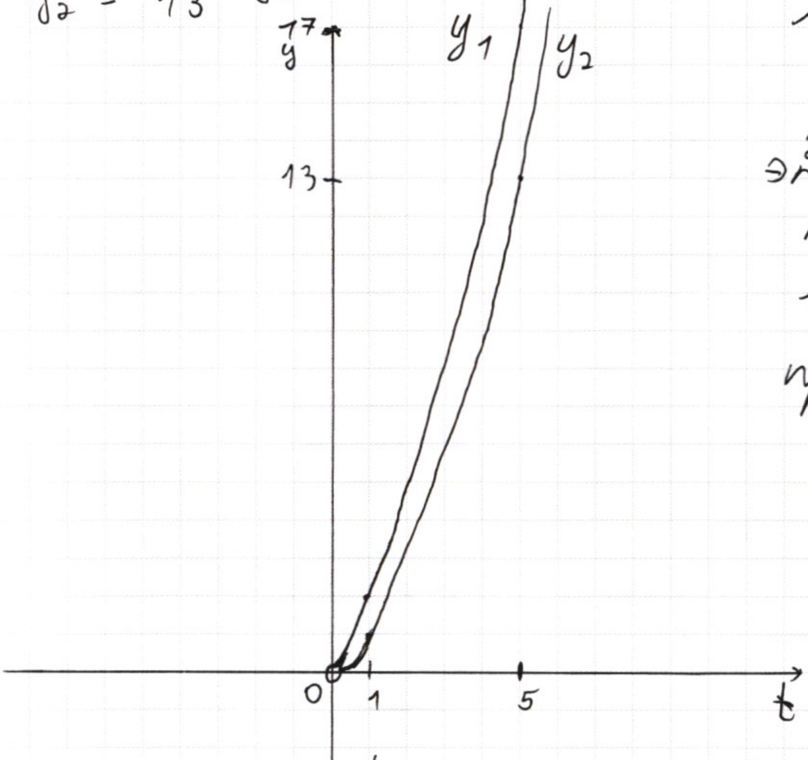
$$(-x^2+26x)^{\log_5 12}-x^2+26x-13^{\log_5(-x^2+26x)}\geq 0$$

Пусть $-x^2+26x=t$

$$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t}\geq 0$$

$y_1=t^{\log_5 12}+t$

$y_2=13^{\log_5 t}$, $t>0$

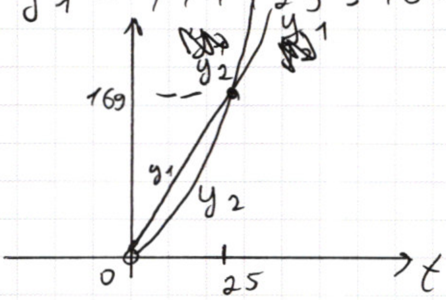


~~2 возраст. ф. могут пересечься точно при $t=25$~~

эти 2 возр. ф. могут пересечься ~~только~~ максимум 1 раз

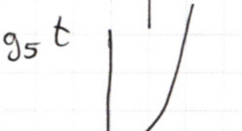
при $t=25$

$y_1=144+25=169=y_2$



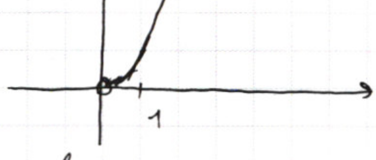
$y_2=13^{\log_5 t}$ $\quad t=\frac{1}{5}$ $\quad y_2=\frac{1}{13}$

$\nearrow$



вид такой

$y=t^{\log_5 12}$



вид такой же, как и у $y=t^{\frac{3}{2}}$

$1<\log_5 12<2$

$y=t^{\log_5 12}$

$y'=\log_5 12\cdot t^{\log_5\frac{12}{5}}+1$

$y'>0$, т.к $t>0$

$\Downarrow$

$y\nearrow$

$t=\frac{1}{5}$ $\quad y_1=-\frac{1}{12}+\frac{1}{5}=$

$=\frac{7}{60}$, $\quad \frac{7}{60}>\frac{1}{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

по граф. $y_1 \geq y_2$, если $0 < t \leq 25$

$$\begin{cases} -x^2+26x \leq 25 \\ -x^2+26x > 0 \end{cases}$$

$x^2-26x+25 \geq 0$

$(x-1)(x-25) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty) \\ x \in (0; 26) \end{cases}$$

$x^2-26x < 0$

$x(x-26) < 0$

$x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$

№ 6.

перефразируем условие

$$\begin{cases} \dfrac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \\ ax+b \geq 18x^2-51x+28 \end{cases}$$

(a, b) — ?

~~верна~~ сист. им. реш. для $\forall x \in (\frac{2}{3}; 2]$

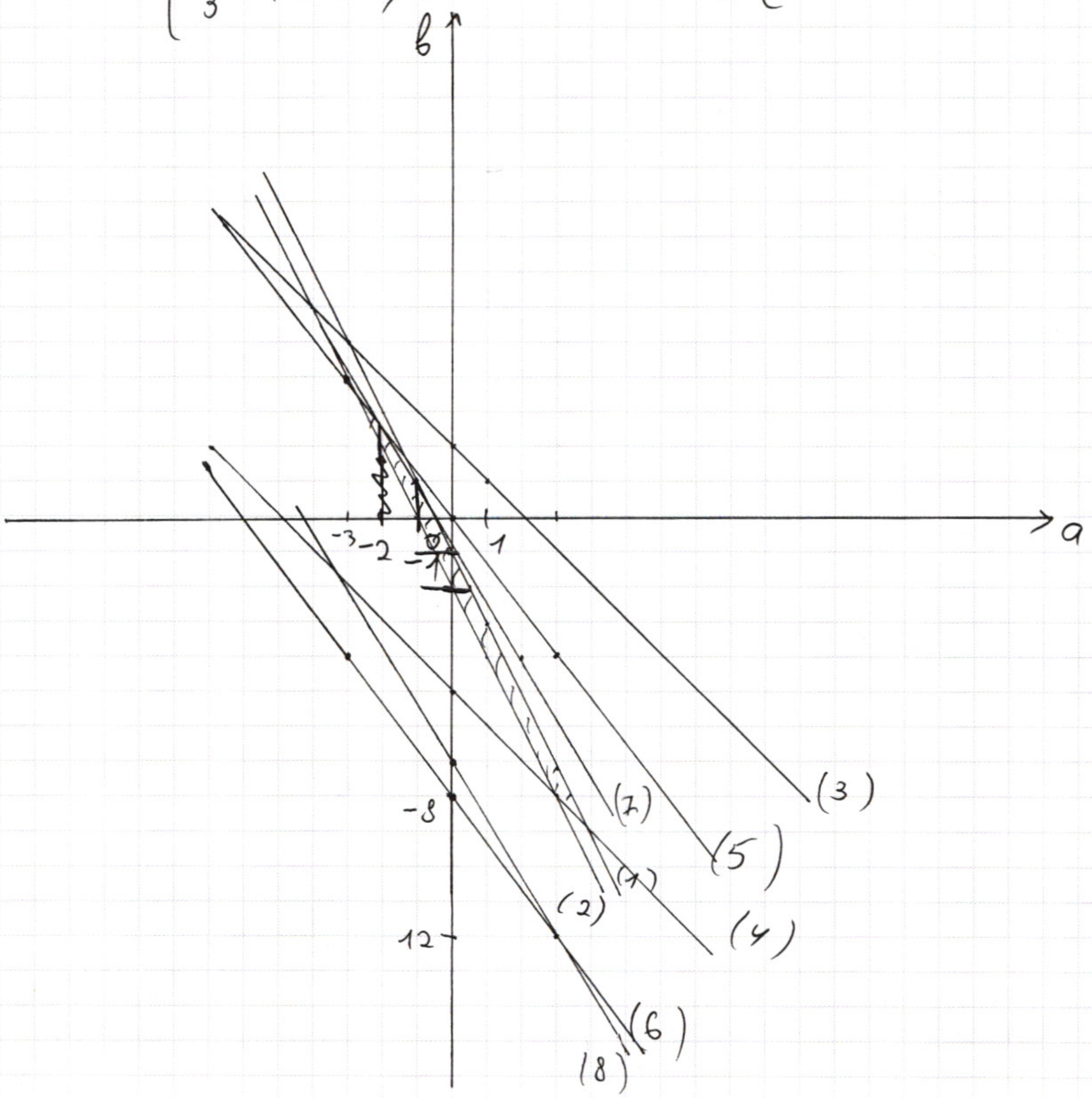
Сист. ~~верна~~ им. реш. для $\forall x \in (\frac{2}{3}; 2]$ => сист. верна для $x = 2$, $x = 1$, $x = \frac{4}{3}$, $x = \frac{5}{3}$

$x = 2$: $\begin{cases} 2a+b \leq -1 \\ 2a+b \geq 72-\overset{-2}{102}+28 \end{cases}$ $\begin{cases} b \leq -2a-1 & (1) \\ b \geq -2a-2 & (2) \end{cases}$

$x = 1$: $\begin{cases} a+b \leq 2 \\ a+b \geq 18-\overset{-5}{51}+28 \end{cases}$ $\begin{cases} b \leq -a+2 & (3) \\ b \geq -a-5 & (4) \end{cases}$

$x = \frac{4}{3}$: $\begin{cases} \frac{4}{3}a + b \le 0 \\ \frac{4}{3}a + b \ge 32 - \overset{-8}{68} + 28 \end{cases}$ $\begin{cases} 4a + 3b \le 0 & (5) \\ 4a + 3b + 24 \ge 0 & (6) \end{cases}$

$x = \frac{5}{3}$: $\begin{cases} \frac{5}{3}a + b \le -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}a + b \ge 50 - \overset{-7}{50 - 35} + 28 \end{cases}$ $\begin{cases} 5a + 3b \le -2 & (7) \\ 5a + 3b \ge -21 & (8) \end{cases}$



$y_1 = \frac{8 - 6x}{3x - 2}$

гр. гипербола $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8 - 6x}{3x - 2} = \frac{\frac{8}{x} - 6}{3 - \frac{2}{x}} = -2$

гор. ас. -2

верт. ас. $\frac{2}{3}$

$y_6 < 0$

$y_2 = 18x^2 - 51x + 28$ $+28$

гр. парабола

$y_b = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{3} \cdot 289}{4\,\cancel{12} \cdot \cancel{12}\,2} - \frac{17 \cdot \cancel{3} \cdot 289}{\cancel{12}\,2} + 28$

$x_b = \frac{17}{12}$ $y_b = \frac{289}{8} - \frac{17 \cdot 289}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

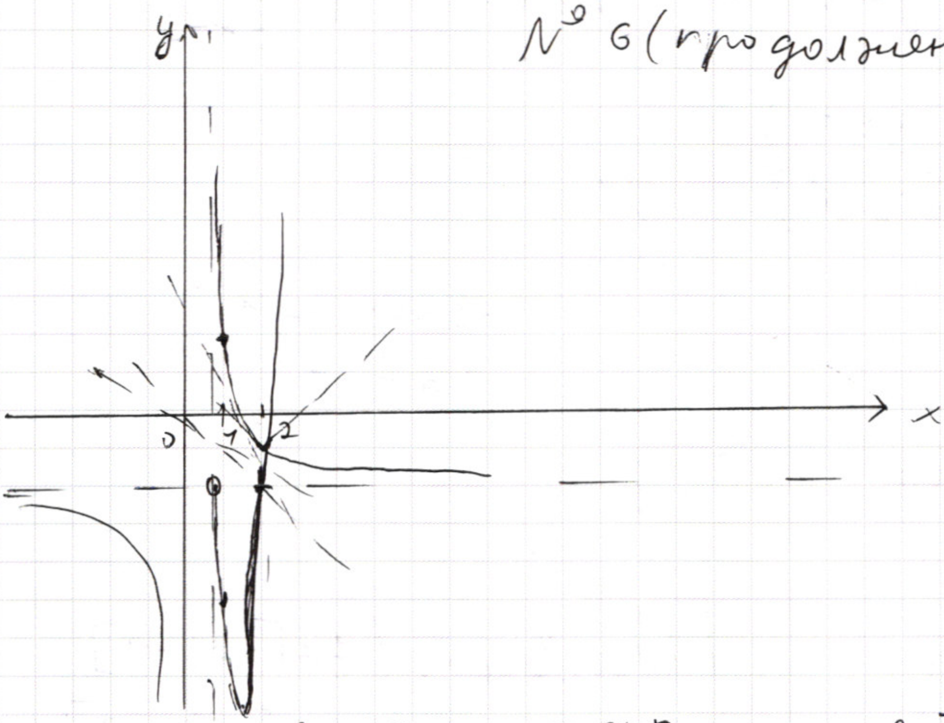
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 (продолжение)



$y_2\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{6}\cdot \cancel{3}\cdot\frac{4}{\cancel{9}} - \frac{17\cdot\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{3}} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$y_2(1) = 18 - 51 + 28 = -5$

$y_2(2) = -2$

$$\begin{cases} ax + b \le \dfrac{8-6x}{3x-2} \\ ax + b \ge 18x^2 - 51x + 28 \end{cases} \quad \text{на } \left(\frac{2}{3}; 2\right]$$

≤ 2

$$\begin{cases} ax + b \le -1 \\ ax + b \ge -2 \end{cases}$$

$-2 \le ax + b \le -1$

по гр. $a \le 0$

$-2 \le b \le -1$

$ax + b$ — беск. мн-во прямых, что $a \le 0$, $-2 \le b \le -1$, прох. через $x = 2$

$$\left.\begin{aligned}&-2 \le 2a + b \le -1\\&-2a-2 \le b \le -2a-1\end{aligned}\right\}$$

и нужно убрать такие a, при которых $y = ax + b$ касётся $\frac{8-6x}{3x-2}$

~~$b = -1$ $a \le 0$~~
~~$b = -2$ $a \ge 0$~~

$$\left.\begin{aligned}&-2 \le b \le -1\\&-\frac{1}{2} \le a \le 0\end{aligned}\right]$$

$-2a-2 = -1$

$2a = -1$

по 1, 2 гр.

$$\begin{cases} b \in [-2; -1] \\ a \in [-\frac{1}{2}; 0] \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} b \in [-2; -1] \\ a \in [-\frac{1}{2}; 0] \end{cases}$

№ 6.

$$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \\ ax+b \geq 18x^2-51x+28 \end{cases}$$

$$18x^2-51x+28 \leq \frac{8-6x}{3x-2}$$

$$\frac{(18x^2-51x+28)(3x-2)-8+6x}{3x-2} \leq 0$$

$x^{\log_5 144} + x^2 - 13^{2\log_5 x}$

$x^{\log_5 144} + x^2 - 169^{\log_5 x}$

вып. для $\forall x \Rightarrow$ вып. для $x = 2$, $x = 1$

$$t^{\log_5 12} + t = 13^{\log_5 t}$$

$\cancel{t = \log_5 7}$

$13^{\log_5 t} - t = t^{\log}$

$\log_5 t \uparrow$

$13^{\log_5 t} \uparrow$

$\ln x' = \frac{1}{x}$

$\log x' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$13^{\log_5 5} = 13$

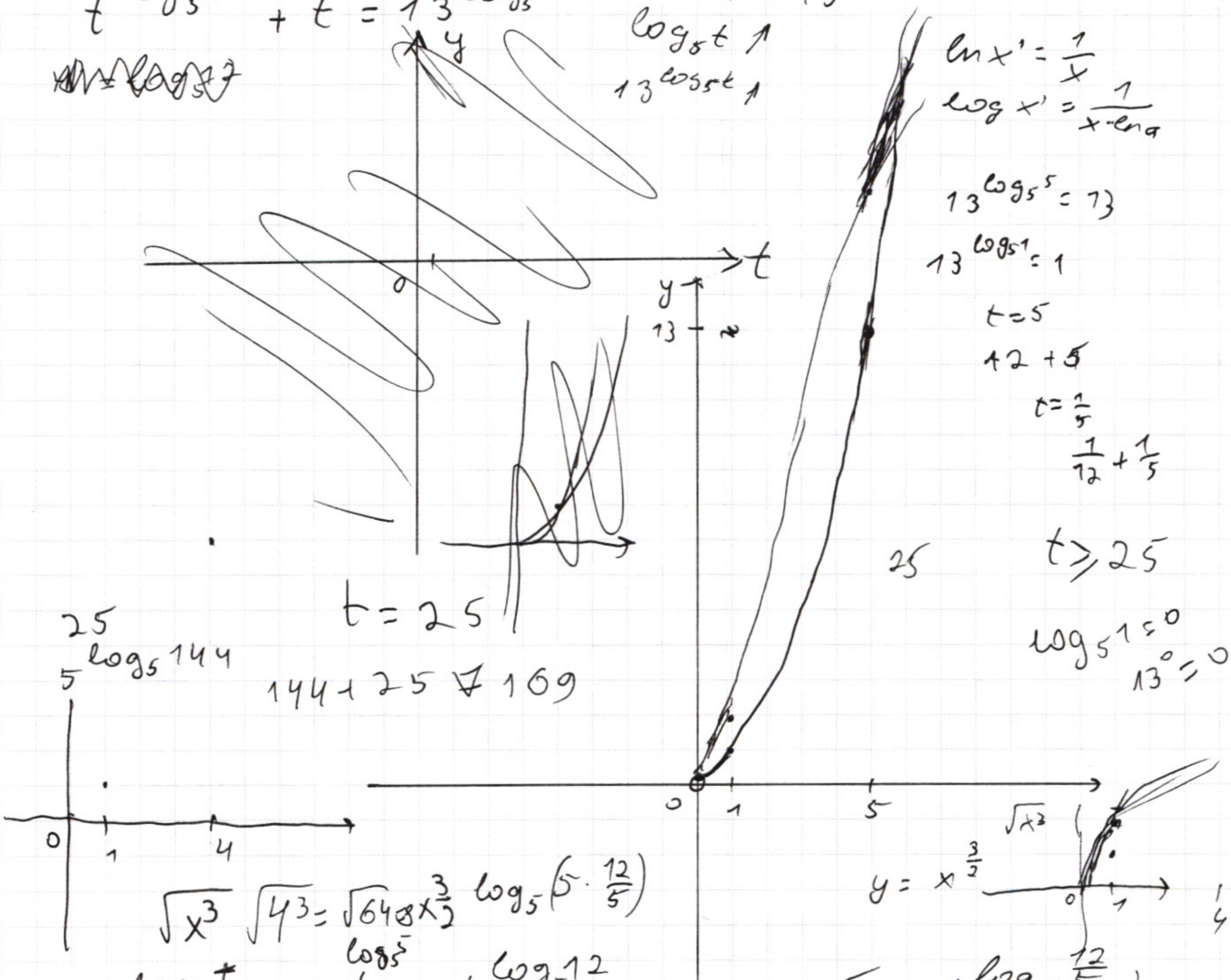
$13^{\log_5 1} = 1$

$t = 5$

$12 + 5$

$t = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{5}$



25

$t \geq 25$

$t = 25$

25

$5^{\log_5 144}$

$144 + 25 \;\nabla\; 169$

$\log_5 1 = 0$

$13^0 = 0$

$y = x^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt{x^3} \quad \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8 \quad x^{\frac{3}{2}} \quad \log_5\left(5 \cdot \frac{12}{5}\right)$

$\log_5 5$

$$13^{\log_5 t} \leq t + t^{\log_5 12}$$

$t \cdot \left(1 + t^{\log_5 \frac{12}{5}}\right)$

$13 t$

$$\log_5 t \cdot \log_5 13 \leq \log_5 t + \log_5 \left(1 + t^{\log_5 \frac{12}{5}}\right)$$

$$\log_5 t \cdot \left(\log_5 13 - 1\right) \leq \log_5 \left(1 + t^{\log_5 \frac{12}{5}}\right)$$

$$\log_5 t \cdot \log_5 \frac{13}{5} \leq \log_5 \left(1 + t^{\log_5 \frac{12}{5}}\right)$$

$\sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$

$\sqrt{0{,}001} = 0{,}1$

$$y = t^{\log_5 12} + t \qquad y' = \log_5 12 \cdot t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1$$

$t > 0$

$y' > 0$

$y \nearrow$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\log_a(bc) = \log_a b+\log_a c$

Необходимо: $26x-x^2>0 \quad x^2-26x<0$

$|x^2-26x| = -x^2+26x$

$(-x^2+26x)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

пусть $-x^2+26x=t$

$\log_5 t\cdot(\log_5 13-1)=\log_5\left(t^{\log_5\frac{12}{5}}+1\right)$

$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t}\geq 0$

$\log_5 12-\log_5 5=\log_5\frac{12}{5}$

$f(t)=\ldots$

$D(t)=(0;+\infty)$

нули: $t\cdot\left(t^{\log_5 12-1}+1\right)=13^{\log_5 t}$

$\log_5\left(t\cdot\left(t^{\log_5 12-1}+1\right)\right)=\log_5\left(13^{\log_5 t}\right)$

$\log_5 t+\log_5\left(t^{\log_5 12-1}+1\right)=\log_5 t\cdot\log_5 13$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$\log_5 t\cdot(\log_5 13-1)=$

$\log_5 t+\log_5\left(t^{\log_5\frac{12}{5}}+1\right)$

$t=1: \quad 1^{\log_5 12}+1 > 13^0 = 1$

$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

$\underbrace{t^{\log_5 12}+\underbrace{t}_{>0}}_{>0}\geq\underbrace{13^{\log_5 t}}_{>1}$

$t=2: \quad 2^{\log_5 12}+2 \vee 13^{\log_5 2}$

$x^2=2x$
$x^3=3x^2$

$t=5: \quad 12+5 > 13$

$f(t)=t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t}$

$\log_5\left(t^{\log_5 12}+t\right)=\log_5\left(13^{\log_5 t}\right)$

$\log_a(b^k)=k\cdot\log_a b$

$\log_5\left(t^{\log_5 12}+t\right)=\log_5 t\cdot\log_5 13$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$b \geq -\frac{5}{3}a - 7$ $\quad a=3$, $b=-12$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$

$\frac{17\cdot 3}{3\cdot 6} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad a=2$, $b=-\frac{12}{3}=-4$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad / -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$b \leq -\frac{5}{3}a - \frac{2}{3}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad a=-1$

$\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad b = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1$

$-6x+8 \,|\, 3$, $-6x-6$, -2, 2, $-2+\frac{2}{3x-2}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{17}$

$b \geq -\frac{4}{3}a - 8$

$\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{17}$ $\quad a=3$, $b=-12$

$6\cdot 3\cdot 289$ $\quad a=-3$, $b=-4$

$\cos 2\beta = \frac{1\cdot\sqrt{17}}{17\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad a=0$, $b=-8$

$\cancel{6}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{289}{\cancel{18}\cdot\cancel{6}} - \frac{17\cdot 3\cdot 17}{6}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{-4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad a\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$ $\quad | : \cos^2\alpha$ т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ опред.

$2\operatorname{tg}\alpha + 4 - 4\operatorname{tg}^2\alpha = -1$

$+\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$-4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№ 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \quad (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\overbrace{(3x-3)^2}^{9x^2-18x+9}-9+(y-6)^2-36=45$$

(1)
$$\begin{cases} xy-6x-y+6=y^2-12xy+36x^2 \\ y-6x\geq 0 \end{cases}$$

$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$

$y^2+y(-13x+1)+36x^2+6x-6=0$

$D=1-26x+169x^2-4(36x^2+6x-6)=$ $\quad -144x^2-24x+24$

$=25x^2-50x+25=25(x^2-2x+1)=$

$=25(x-1)^2$ $\quad (5(x-1))^2$

$y_1=\dfrac{-1+13x+5x-5}{2}=\dfrac{18x-6}{2}=9x-3$

$y_2=\dfrac{-1+13x-5x+5}{2}=\dfrac{8x+4}{2}=4x+2$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} y&=9x-3 \\ y&=4x+2 \end{aligned}\right. \\ y\geq 6x \end{cases}$$

$9x-3\geq 6x$

$3x\geq 3$

$x\geq 1$

$4x+2\geq 6x$

$2x\leq 2$

$$\left[\begin{aligned} y&=9x-3, \quad x\geq 1 \\ y&=4x+2, \quad x\leq 1 \end{aligned}\right.$$

$-12(4x+2)=$

$=-48x-24$

$-12\cdot 9$

-108

$(4x+2)^2=$

$=16x^2+16x+4$

$9x^2+3^2(3x-1)^2-18x-12(9x-3)-45=0 \quad |:9$

$x^2+9x^2-6x+1-2x-12x+4-5=0$

$10x^2-20x-1=0$

$\dfrac{D}{4}=100+10=110$

$$\left[\begin{aligned} x&=\frac{10+\sqrt{110}}{10} \geq 1 \text{ уд. } y= \\ x&=\frac{10-\sqrt{110}}{10} < 1 \text{ не уд.} \end{aligned}\right.$$

$9x^2+\overbrace{2^2(2x+1)^2}^{4(4x^2+4x+1)}-18x-12(4x+2)-45=0$

$9x^2+16x^2+16x+4-18x-48x-24-45=0$ $\quad -2x \quad -20$

$25x^2-50x-65=0 \quad |:5$

$5x^2-10x-13=0$

$\dfrac{D}{4}=25+13\cdot 5=90$

$4\cdot 36=$

$=144$

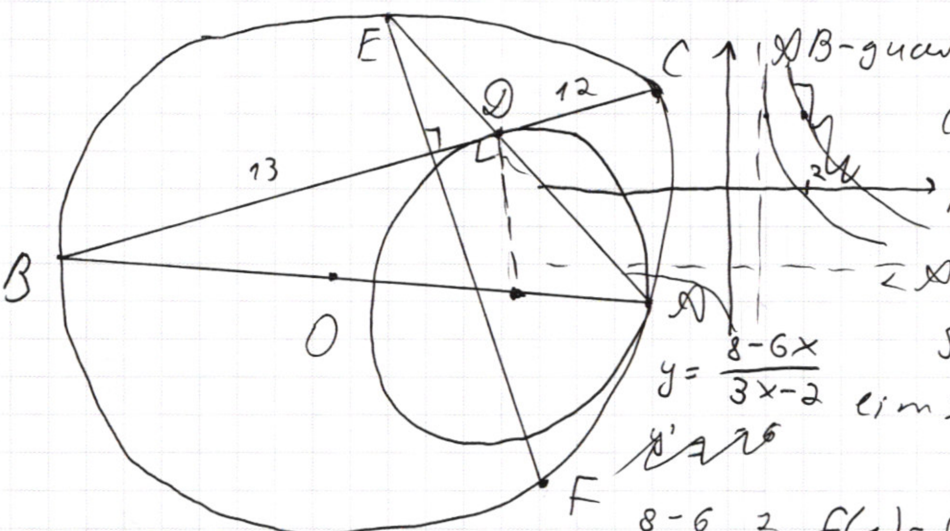
$25(x^2-2x+1)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



AB - диам.

$CD = 12$

$BD = 13$

$\angle AFE - ?$

$S_{\triangle AFE} - ?$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$e^x = e^x \cdot \ln e$

$y = \frac{8-6x}{3x-2}$ $\lim = \frac{\frac{8}{x} - 6}{3 - \frac{2}{x}} = -2$

$\frac{8-6}{3-2} = \frac{2}{1} = 2 = f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(1)$

$f\left(\frac{x}{y \cdot 2} \cdot 2\right) = f\left(\frac{1}{2}\frac{x}{y}\right) + f(2)$

$-x^2 + 26x > 0$

$x^2 - 26x < 0$

$x \in (0; 26)$

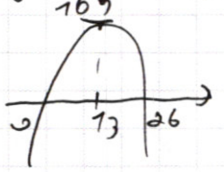
$t + t^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 t}$

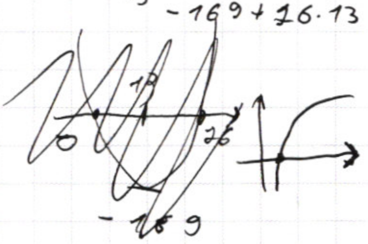
$x_в = 13$

$y_в = 169 - 26 \cdot 13 = 169(1-2) = -169$

$-169 + 26 \cdot 13$

$y' = 1 - \log_5 12 \cdot t^{\log_5 \frac{12}{5}} - 13^{\log_5 t} \cdot \ln 13 \cdot \frac{1}{t \cdot \ln 5}$





$\cancel{-169 < -x^2 + 26x < 0}$

$0 < -x^2 + 26x \leq 169$

$\log_5(-x^2 + 26x)$

~~$-x^2 + 26x \leq 169$ удобно $\Rightarrow \log_5(-x^2+26x)$~~

$\log_5(-x^2 + 26x) \leq 169$

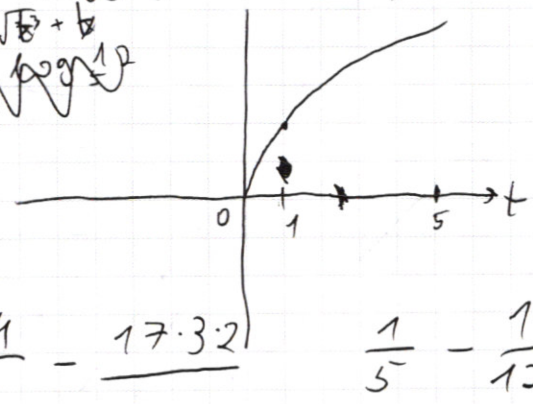
$13^{\log_5(-x^2+26x)} \leq 169$ $\Rightarrow 32$ $t^{\log_5 12} + t - 13^{\log_5 t}$

$1 < \log_5 12 < 2$

$t^{\frac{3}{2}} = \sqrt{t^3}$

$\sqrt{x^3} + 1$ $\sqrt{t^3} + t$

$\log_5(-x^2 + 26x) \leq 2$ $t \in (0; 1)$



$0 < t^{\log_5 12} + t < 2$

$t = \frac{1}{2}$ $5^{-\log_5 12}$

$5^{-1 \log_5 12} + \frac{1}{5}$

$\frac{6 \cdot 3 \cdot 4}{9} - \frac{17 \cdot 3 \cdot 2}{}$

$\frac{1}{5} - \frac{1}{12} = \frac{7}{60}$ $\frac{7}{60} \vee \frac{1}{13}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=2:$ $\begin{cases} ax+b \le \dfrac{8-12}{6-2} & \frac{-4}{4} \\ ax+b \geq 18\cdot 4 - 51\cdot 2+28 \end{cases}$ $\begin{cases} a\cdot 2+b \le -1 \\ a\cdot 2+b \geq -2 \end{cases}$ $\dfrac{-2}{5-2}$

$b \le -\frac{4}{3}a$

$a=-3\ b=4 \quad 72+28-102$

$\cancel{x=1:}$ $\cancel{\begin{cases} ax+b \le \frac{8-6}{3-2} \\ ax+b \geq 18-51+28 \end{cases}}$ $17\cdot\cancel{3}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}$ $\cancel{\begin{cases} ax+b \le 2 \\ ax+b \geq - \end{cases}}$ $8-\frac{\cancel{6}^2\cdot 5}{\cancel{3}}=-2$

$a=3$

$b=-4$

$46-51$ $\cancel{9}\cdot 2\cdot\frac{25}{\cancel{9}}$

$\cancel{x=\frac{3}{2}}$ $18\cdot 4=72$ $b=-2a-1 \quad 18x^2-51x+29=0 \quad -40$

$\cancel{D=51^2-18\cdot 29}$

$\cancel{x=\frac{4}{3}:}$ $\cancel{ax+b \le}\ 8-\frac{24}{3}=0 \quad \frac{8-12}{4}=-1$

$\cancel{ax+b \geq}$

$18x^2-51x+28$

$x=\frac{5}{3}:$ $ax+b \le \dfrac{8-10}{5-2}$ $\frac{-2}{3} \le -\frac{2}{3}$ $18\cdot 4-51\cdot 2+28=$

$-33 \quad -5$ $=100-102=-2$

$18-51+28$ $17\cdot 200=$

$=3400$ $18x^2-51x+28 \le 0$

$+\begin{cases} -5a-5b \le 25 \\ 5a+3b \le -2 \end{cases}$ $x_b=\frac{51}{2\cdot 18}=\frac{51}{36}$ $x=\frac{4}{3}$ $\frac{4}{3}a+b \geq 0$

$\begin{cases} 2a+b \le -1 \\ -2a-b \le 2 \end{cases}$ $b \geq -\frac{4}{3}a$

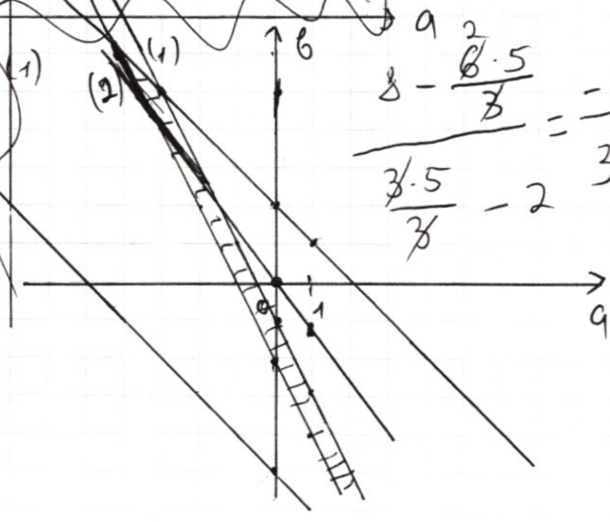
$\begin{cases} b \le -ax-1 \\ b \geq -ax-2 \end{cases}$ $46-51=-5$ $17\cdot\cancel{3}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}$

$x=\frac{5}{3}:$ $\frac{5}{3}a+b \le -\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}a+b \le 0$

$-2b \le 21 \quad -4$ $\cancel{9}\cdot 2\cdot\frac{16}{\cancel{9}}$

$\frac{8-6\cdot 2}{6-2}=-1$ $5a+3b \le -2$ $-35+28=-7$

$\frac{17\cdot\cancel{3}}{2\cdot 6\cdot\cancel{3}}=$



$8-\frac{\cancel{6}^2\cdot 5}{\cancel{3}}=\frac{-2}{3}$

$\frac{\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{3}}-2$

$x=2:$ $\begin{cases} 2a+b \le -1 \\ 2a+b \geq -2 \end{cases}$ $\begin{cases} b \le -2a-1 \\ b \geq -2a-2 \end{cases}$

$x=1:$ $\begin{cases} a+b \le 2 \\ a+b \geq -5 \end{cases}$ $\begin{cases} b \le -a+2 \\ b \geq -a+5 \end{cases}$

$x=\frac{4}{3}:$ $b \le -\frac{4}{3}a$

$x=\frac{5}{3}:$ $5a+3b \le -2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)