МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$ (2)

(2): $\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin((2\alpha+2\beta)-2\beta)=-\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta-$
$-\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta=-\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

(1) в (2): $\cos 2\beta=-\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{2\sin(2\alpha+2\beta)}=-\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{2\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}=$

$=\frac{2\cdot\sqrt{17}}{\frac{17\cdot 2}{\sqrt{17}}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

(1): $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

$-4\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha+\underset{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\underset{\parallel}{1}}=0$

$-3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha=0$

Поделим на $\cos^2\alpha$ (по условию $\operatorname{tg}\alpha$ определён, значит $\cos\alpha\neq 0$):

$-3tg^2\alpha+2tg\alpha+5=0$

$3tg^2\alpha-2tg\alpha-5=0$

$\frac{D}{4}=1+15=16$

$tg\alpha=\frac{1\pm4}{3}$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{5}{3} \\ tg\alpha=-1 \end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}-\frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha-4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha+\underset{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\underset{\shortparallel}{1}}=0$

$5\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$

Поделим на $\cos^2\alpha$; $5tg^2\alpha+2tg\alpha-3=0$

$\frac{D}{4}=1+15=16$

$tg\alpha=\frac{-1\pm4}{5}$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{3}{5} \\ tg\alpha=-1 \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha\in\{-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}\}$

Задача №2.

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$

(1): $y-6x=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

(2): $9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение решения задания №2

Пусть $a = x-1$ и $b = y-6$

Тогда $\begin{cases} y-6x=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\quad y-6x = y-6-6(x-1) = b-6a$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-6a)^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \\ b-6a\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (b-6a)^2=ab & (3) \\ 9a^2+b^2=90 & (4) \\ b\geq 6a & (5) \end{cases}$

(3): $36a^2-12ab+b^2=ab$; $36a^2-13ab+b^2=0$

1) $b=0$: $\begin{cases} 36a^2=0 \\ 9a^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a=0 \\ 9a^2=90 \end{cases}$ – не подходит / 2) $a=0$: $\begin{cases} b^2=0 \\ b^2=90 \end{cases}$ – не подходит

3) $b\neq 0, a\neq 0$;

$36\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+1=0$

$t=\frac{a}{b}$; $36t^2-13t+1=0$

$\cancel{D=169-4\cdot 36=169-144=25}$

$\cancel{t=\frac{13\pm 5}{36} \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{2}{9} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{1}{2} \\ \frac{a}{b}=\frac{2}{9} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} b=2a \\ b=\frac{9}{2}a \end{array}\right. \overset{(5)}{\Rightarrow} b=\frac{9}{2}a}$

$D=169-4\cdot 36=169-144=25$

$t=\frac{13\pm 5}{72} \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{4} \\ t=\frac{1}{9} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{1}{4} \\ \frac{a}{b}=\frac{1}{9} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=9a \end{array}\right. \overset{(5)}{\Leftrightarrow} b=9a$

(4): $9a^2+81a^2=90$; $90a^2=90$; $a=\pm 1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-9 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad$ 1) $\begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}$ $\quad$ (5): $9-6=3\geq 0$ – подходит

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $\begin{cases} a=-1 \\ b=-9 \end{cases}$ ~~(5): $-9+6=-3\geq 0$ — не подходит~~

1. $b=4a$

(4): $9a^2+16a^2=90$; $25a^2=90$; $a^2=\frac{90}{25}$; $a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ b=\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ b=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \overset{b\geq 6a}{\iff} \begin{cases} a=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ b=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

2. $b=9a$

(4): $9a^2+81a^2=90$; $90a^2=90$; $a^2=1$; $a=\pm 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-9 \end{cases} \end{array}\right. \overset{b\geq 6a}{\iff} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$$

Ответ: $(x,y)\in\left\{\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5};\ 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right);\ (2;15)\right\}$

Задание № 5

На промежутке $[4;\ 28]$ имеются следующие простые числа:

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

Посчитаем для каждого из них $f(a)$:

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$, $f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$, $f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$,

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$, $f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$, $f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$,

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

Заметим, что для любого a, при котором $f(x)$ определена верно:

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение решения задания №5

2 и 3 – простые числа, поэтому $f(2)=f(3)=0$

Найдём $f(x)$ для $x\in[4;28]$, не считая ранее найденные для простых чисел:

$f(4)=f(2)+f(2)=0$
$f(6)=f(2)+f(3)=0$
$f(8)=f(2)+f(4)=0$
$f(9)=f(3)+f(3)=0$
$f(10)=f(2)+f(5)=1$
$f(12)=f(2)+f(6)=0$
$f(14)=f(2)+f(7)=1$
$f(15)=f(3)+f(5)=1$
$f(16)=f(4)+f(4)=0$
$f(18)=f(2)+f(9)=0$
$f(20)=f(2)+f(10)=1$
$f(21)=f(3)+f(7)=1$
$f(22)=f(2)+f(11)=2$
$f(24)=f(2)+f(12)=0$
$f(25)=f(5)+f(5)=1$
$f(26)=f(2)+f(13)=3$
$f(27)=f(3)+f(9)=0$
$f(28)=f(2)+f(14)=1$

Итого имеем для $x\in[4;28]$:
$f(x)=0$ при 9 значениях x
$f(x)=1$ при 9 значениях x
$f(x)=2$ при 2 значениях x
$f(x)=3$ при 2 значениях x
$f(x)=4$ при 2 значениях x
$f(x)=5$ при 1 значении x

Также заметим, что при любом a, при котором $f(x)$ определена верно:
$f(1)=f(\frac{a}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$

И ещё заметим, что $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$ <0

Т.к. $x\in[4;28]$ и $y\in[4;28]$, то из вышесказанного $f(x)\geq 0$, а $f(\frac{1}{y})<0$, т.о. требуется найти такие y и x, что $|f(y)| > f(x)$

Так, что

1) $f(y)=5$ – это возможно при 1 значении y. ($y=23$)

При значениях $x \neq 23$ $f(x)<f(y)$. Значит, таких x 24 значения

2) $f(y)=4$ – это возможно при 2 значениях y

При 1 значении x $f(x)>f(y)$, при 2 значениях – $f(x)=f(y)$

Значит, способов выбрать x и y в этом случае $2\cdot 22=44$

3) $f(y)=3$ – это возможно при 2 значениях y.

Аналогично 1) и 2) $f(x)<f(y)$ при $25-1-2-2=20$ значениях x. Значит, способов выбрать x и y в этом случае $2\cdot 20=40$

4) $f(y)=2$ – это возможно при 2 значениях y

Аналогично 1), 2) и 3) $f(x)<f(y)$ при $25-1-2-2-2=18$ значениях x. Значит, способов выбрать x и y в этом случае $2\cdot 18=36$.

5) $f(y)=1$ – это возможно при 9 значениях y.

Аналогично 1), 2), 3) и 4) $f(x)<f(y)$ при $18-9=9$ значениях x.

Значит, способов выбрать x и y в этом случае $9\cdot 9=81$

6) $f(y)=0$ При всех $x\in[4;\ 28]$ $f(x)\geq f(y)$.

Итого в сумме всех пар x и y будет $24+44+40+36+$
$+81=64+80+81=64+161=225$

Ответ: 225 пар x и y

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание № 3.

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)} \Leftrightarrow$

О.О.Н: $26x-x^2>0$; $x^2-26x<0$; $x(x-26)<0$

$x \in (0;26)$

О.О.Н $\Leftrightarrow (26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$

$26x-x^2=t$ (парабола, ветви вниз) $x_0=\frac{26}{2}=13$; $t_0=-169+26\cdot 13=169$

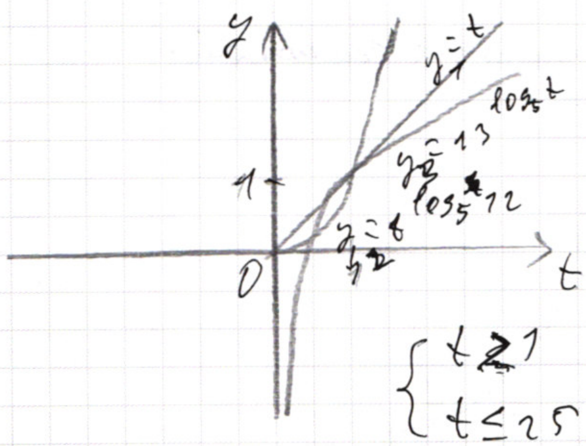
$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t} \geq 0$ $\quad$ т.к. $t>0$, $t \in (0;169]$

При $t=5$; $12+5-13=4 \geq 0$ – подходит

$t=25$; $12^2+25-13^2=144+25-169=0 \geq 0$ – подходит

$t=125$; $12^3+125-13^3=144\cdot 12+125-169\cdot 13=$

$=1728+125-2197<0$ – не подходит



По сути, мы ищем при каких t $\quad y_1+y_2 \geq y_3$

Видно, что это возможно при $t \in [0;25]$

$\begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq 25 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -x^2+26x \geq 0 & (1) \\ -x^2+26x \leq 25 & (2) \end{cases}$

$x^2-26x \leq 0$ (1); $x^2-26x<0$; $x \in (0;26)$

$D=169$ ~~...~~ (2); $x^2-26x+25 \geq 0$ $\quad (x-25)(x-1) \geq 0$

$x=$

$x \in (-\infty;1] \cup [25;+\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №4 (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x \in (0; 26) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1] \cup [25; 26)$$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Задание №6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq 9x+6 \geq 18x^2-51x+28 \qquad x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$$

Заметим, что в плоскости xOy:

$f(x) = 9x+6$ – прямая

$g(x) = 18x^2-51x+28$ – парабола, ветвями вверх

$x_0 = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$$g_0 = 18\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28 = \frac{17}{12}\left(\frac{18 \cdot 17}{12} - 51\right) + 28 =$$

$$= -\frac{17}{12} \cdot \frac{51}{2} + 28 = -\frac{17 \cdot 51}{12 \cdot 2} + 28 = -\frac{289}{8} + 28 =$$

$$= \frac{-289+224}{8} = -\frac{65}{8}$$

$$\varphi(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} = \cancel{-2 - \frac{4}{3x-2}} = -\frac{2(3x-4)}{3x-2} =$$

$$= -2 + \frac{4}{3x-2}$$

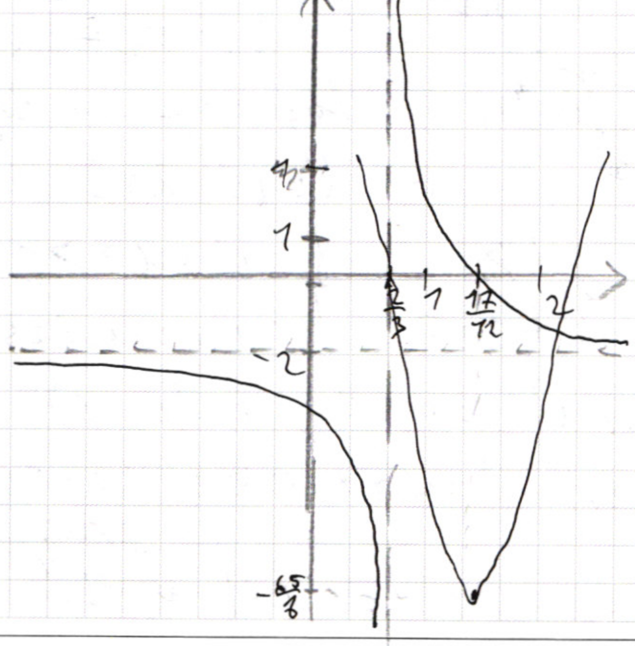
$x = \frac{2}{3}$ – вертикальная асимптота

$y = -2$ – горизонтальная асимптота

$18x^2-51x+28 = 2$

$18x^2-51x+26 = 0$

$D = 51^2 - 4$



☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. 4 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x(y)^{-1}) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$; $f(1) = 0 = f(2) = f(3)$,

~~$f(2) = f(2) + f(1)$~~ $f(4) = f(2) + f(2) = 2f(2)$;

~~$f(2a) = f(a) + f(2)$~~ $f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0 = f(6) = f(8) = f(9) = f(12) = f(16) = f(18) = f(24) = f(27)$

$f(5) = 1 = f(7) = f(10) = f(14) = f(15) = f(20) = f(21) = f(25) = f(28)$

$f(11) = 2 = f(22)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f(13) = 3 = f(26)$

$f(17) = 4 = f(19)$

$f(23) = 5$.

$f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow$

$\frac{a}{a}$ = 0

~~$f\left(\frac{2}{2}\right) = f(2) +$~~

$f\left(\frac{5}{5}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

$f\left(\frac{5}{5}\right) = 0$, $f(5) = 1$

Всего чисел: 25

27 22 $27 \cdot 2 \cdot 25$

-5; 24

-4; $2 \cdot 22 = 44$

-3; $2 \cdot 20 = 40$

-2; $2 \cdot 18 = 36$

-1; $9 \cdot 9 = 81$

$24 + 44 + 40 + 36 + 81 = 161 + 44 = 205$

$\leq 25^2 = 625$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad tg\,\alpha = ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\quad \geq 3$ значения

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\alpha = a$

$2\beta = b$

$\sin a\cos b + \cos a\sin b = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\sin a\cos 2b + \cos a\sin 2b + \sin a = -\frac{2}{17}$ (2)

$\sin a(\cos^2 b - \sin^2 b) + 2\cos a\sin b\cos b + \sin a = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$(2\alpha+2\beta)+2\beta \qquad (2\alpha+2\beta)-2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta +$

$+\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta - \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{2\sin(2\alpha+2\beta)}$ (2)

(1) в (2): $\cos 2\beta = -\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{-\frac{2}{\sqrt{17}}} = \frac{2\sqrt{17}}{17\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$-\sin(2\alpha+2\beta) = \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow$ ~~$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n$~~

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

~~$2\beta = \pm\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n$~~

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2\beta = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\beta = \pi - \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$-4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha + \underset{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\underset{\parallel}{1}} = 0$

$-3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha$

$-3\,tg^2\alpha + 2\,tg\alpha + 5 = 0$

$3\,tg^2\alpha - 2\,tg\alpha - 5 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 15 = 16$

$tg\alpha = \frac{1 \pm 4}{3}$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right.$

$-1; \ \frac{3}{5}; \ \frac{5}{3}$

2) $\ldots - \ldots = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 1 = 0$

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

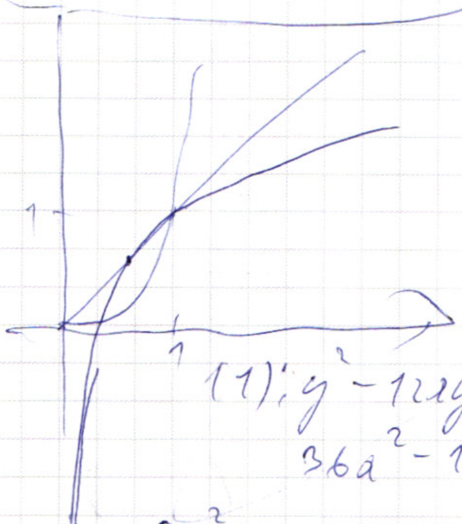
$5\,tg^2\alpha + 2\,tg\alpha - 3 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 15 = 16$ $\quad tg\alpha = \frac{-1 \pm 4}{5}$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_5 12} + t \ge 13^{\log_5 t}$



№2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} (y-6x)^2 = xy-6x-y+6 \quad (1) \\ y-6x \ge 0;\ y \ge 6x \quad (2) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \quad (3) \end{cases}$

(1): $y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$36x^2-13xy+y^2+6x+y-6=0$

$9x^2+6x+1+$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)}=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$9x^2+y^2-18x-12y \mid x-1$

$9x^2-9x \quad\quad 9x+\frac{y^2}{x}$

$y^2-9x-12y$

$y^2-\frac{y^2}{x}$

$\frac{y^2}{x}-9x-12y$

(1): $y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

(2): $9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90=3\sqrt{10}$

$a=x-1$

$b=y-6$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{\underbrace{(y-6)}_{b}\underbrace{(x-1)}_{a}} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} y-6x=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$ $y-6x=\underbrace{y-6}_{b}\underbrace{-6(x-1)}_{-6a}=$

$=y-6-6x+6=y-6x$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \ (1) \\ 9a^2+b^2=90 \\ b-6a\ge 0;\ b\ge 6a \end{cases}$ $36a^2-13ab+b^2=0 \mid :b^2$

(2): $36\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+1=0$

$\frac{a}{b}=t;\ 36t^2$

(1): $36a^2-13ab+b^2=0$; $36\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}+1=0$ $\quad \frac{a}{b}=t$ $\quad 36\cdot 4=144$

$36t^2-13t+1=0$ $\quad (2t-1)(9t-2)=18t^2-9t-4t+2=$

$D=169-4\cdot 36=169-144=25$ $\quad =18t^2-13t+2$

$t=\frac{13\pm 5}{36}$ $\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{8}{36}=\frac{2}{9} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{1}{2} \\ \frac{a}{b}=\frac{2}{9} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} b=2a \\ b=\frac{9}{2}a \end{array}\right.$

1) $b=2a$; (2): $9a^2+4a^2=90$; $13a^2=90$; $a^2=\frac{90}{13}$; $a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$

$\frac{18}{72}=\frac{1}{4}$ $\quad \frac{8}{72}=\frac{1}{9}$ $\quad 6x-8 \mid 3x-2$; $6x-4 \quad 2$; -4

$\frac{8-6x}{3x-2}=-\left(\frac{6x-8}{3x-2}\right)=-\left(2-\frac{4}{3x-2}\right)$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$169 \cdot 13 = 1507 + 169 = 2197$

$144 \cdot 12 = 288 + 144 = 1728$

О.О.Н.: $26x - x^2 \geq 0$; $x^2 - 26x \leq 0$; $x(x-26) \leq 0$

$\boxed{x \in [0; 26]}$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 - 13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$

$26x - x^2 = t$; $x_0 = 13$; $t_0 = -169 + 26 \cdot 13 = 169$; $t \in [0; 169]$

$t^{\log_5 12} + t - 13^{\log_5 t} \geq 0$

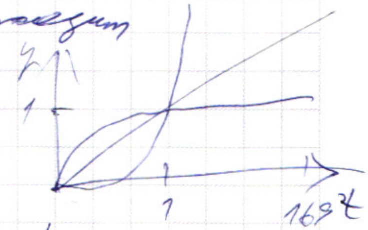
$\cancel{\log_5 12 = \log_5(13-1)}$

$\log_5 12 - 1 = \log_5 12 - \log_5 5 = \log_5 \frac{12}{5}$

$t = 5$: $5^{\log_5 12} + 5 - 13^{\log_5 5} \geq 0$

$12 + 5 - 13 = 4 \geq 0$

$t = 25$ – подходит



$t^{\log_5 12} + t - 13^{\log_5 t} \geq 0$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$\log_5 12 + \log_5 5 \geq \log_5 t$

$\log_5 \frac{12}{5} \geq \log_5 t$; $\frac{12}{5} \geq t$

$t = 25$: $144 + 25 \geq 169 \geq 169$

подходит

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} - 13^{\log_5 t} \geq 0$

$y = t$

$2(3x-2) = 6x - 4$

$12^3 + 125 - 13^3 \geq 0$

$144 \cdot 12 + 125 - 169 \cdot 13 < 0$

$17 \cdot 17 = 119 + 17 = 289$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)