МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Произведем замену $t = 10x - x^2$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} \Rightarrow t > 0 \Rightarrow |t| = t$

$t + t^{\log_3 4} \geq 3^{\log_3 t \cdot \log_3 5}$

$t = 3^{\log_3 t}$ $\quad t^{\log_3 4} = 3^{\log_3 t \cdot \log_3 4} = 4^{\log_3 t}$

Пусть $\log_3 t = p$, тогда

$3^p + 4^p \geq 5^p$ Заметим, что

$3^2 + 4^2 = 5^2$ Пусть $p = 2 + \alpha$, тогда

если $\alpha > 0$, то $3^2 \cdot 3^\alpha + 4^2 \cdot 4^\alpha < 5^2 \cdot 5^\alpha$,
т.к. $3^\alpha < 5^\alpha$, $4^\alpha < 5^\alpha \Rightarrow 3^2 \cdot 3^\alpha + 4^2 \cdot 4^\alpha <$
$< 3^2 \cdot 5^\alpha + 4^2 \cdot 5^\alpha = 5^2 \cdot 5^\alpha$

Если же $\alpha < 0$, то $3^2 \cdot 3^\alpha + 4^2 \cdot 4^\alpha > 5^2 \cdot 5^\alpha$,
т.к. $5^\alpha < 3^\alpha$ и $5^\alpha < 4^\alpha \Rightarrow 3^2 \cdot 3^\alpha + 4^2 \cdot 4^\alpha >$
$> 3^2 \cdot 5^\alpha + 4^2 \cdot 5^\alpha = 5^2 \cdot 5^\alpha$

$\Rightarrow$ решение неравенства $3^p + 4^p \geq 5^p$
такое: $p \in (-\infty; 2] \Rightarrow t \in (0; 9]$

$\Rightarrow 10x - x^2 \in (0; 9] \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 10) \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

т.е. $\begin{cases} x \in (0;10) \Leftrightarrow x \in (0;10) \\ x^2-10x+9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;1] \cup [9;+\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$

№ 2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y+6-x} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{(1-2y)(6-x)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=10^2 \end{cases}$$

Заметим, что первое уравнение ограничивает область значений x и y так, что $x-12y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{12}x$ и

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 6 \\ y < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

А второе уравнение описывает эллипс с центром в $(6; \frac{1}{2})$ и большим радиусом 10 и меньшим радиусом $\frac{5}{3}$

Преобразуем первое равенство:

Обозначим множество D:

все x, y такие, что $\begin{cases} y \leq \frac{1}{12}x \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 6 \\ y < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$ тогда первое равенство можно записать так:

$$\begin{cases} (x-12y)^2 = (1-2y)(6-x) \\ x, y \in D \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда это равносильно

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2-2xy+12y+x-6=0 \\ x,y\in D \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (x-8y-2)(x-18y+3)=0 \\ x,y\in D \end{cases}$$ - задает две "обрезанные" прямые

Прямая $x-8y-2=0$ пересекает прямую $y=\frac{1}{12}x$ в точке $(6;\frac{1}{2})\Rightarrow$ от неё остается луч $\begin{cases} x-8y-2=0 \\ x\le 6 \end{cases}$

т.к. $(6;\frac{1}{2})$ - центр эллипса, с ним у этого луча будет ровно одно пересечение:

$(-2;-\frac{1}{2})$: $-2-(\frac{-1}{2})\cdot 8-2=0$

и $(-2-6)^2+(6\cdot\frac{-1}{2}-3)^2=10^2$

и $(-2;-\frac{1}{2})\in D\Rightarrow(-2;-\frac{1}{2})$ - решение

Прямая $x-18y+3=0$ пересекает прямую $y=\frac{1}{12}x$ в точке $(6;\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ от неё остается луч $\begin{cases} x-18y+3=0 \\ x\ge 6 \end{cases}$

(т.к. на оставшейся части прямая не удовлетворяет неравенству $y\le\frac{1}{12}x$)

т.к. $\left(6; \frac{1}{2}\right)$ - центр эллипса,
пересечение будет не больше одного
Рассмотрим точку:

$\left(6+3\sqrt{10}; \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)$ она принадлежит лучу, т.к. $x \geq 6$ и $(6+3\sqrt{10}) - 18\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)+3=0$

и принадлежит эллипсу, т.к.

$$(6+3\sqrt{10}-6)^2 + (3+\sqrt{10}-3)^2 = 10^2$$

$\Rightarrow$ эта точка и есть наше единственное пересечение. Заметим, что ~~Больше ре~~ $\left(6+3\sqrt{10}; \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{10}\right) \in D$

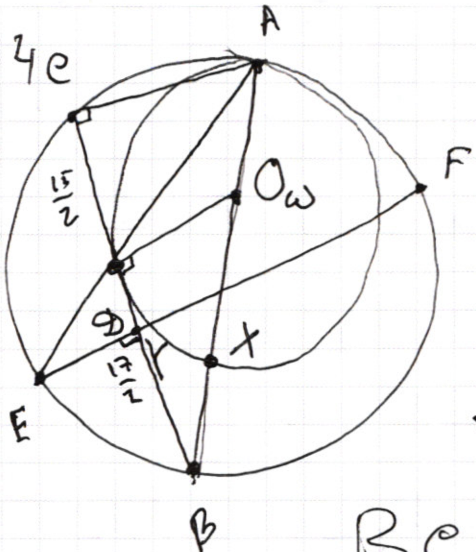
Больше решений нет, т.к. первое уравнение задает два луча и были рассмотрены оба случая

Ответ: $x=-2$; $y=-\frac{1}{2}$ и $x=6+3\sqrt{10}$, $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{10}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4с



Заметим, что т.к. A - точка касания O_ω - центр малой окружности лежит на AB.

Тогда $O_\omega D \perp BC$, т.к. BC - касательная.

$AC \perp BC$, т.к. AB - диаметр Ω

Пусть $X = AB \cap \omega \setminus \{A\}$, тогда

$|BX| \cdot |BA| = |BD|^2$ ~~BC~~ - степень точки B для ω.

$|BD| : |BO_\omega| = |BC| : |BA|$ - подобие $\triangle ABC$ и $\triangle O_\omega BD$

Пусть радиусы окружностей ω и Ω ~~R_ω и R~~ - r и R соответственно

Тогда $\frac{2R}{16} = \frac{2R-r}{\frac{17}{2}}$ и $\left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2R-2r)(2R)$

$17R = 32R - 16r \Rightarrow 16r = 15R \Rightarrow r = \frac{15}{16}R$

$\Rightarrow 2R - 2r = \frac{1}{8}R \quad = \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}R^2 \Rightarrow R = 17$

$r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$ Тогда $|AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2$ - Th. Пифагора $\Rightarrow |AC| = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$

тогда $|AC| : |AB| = |CD| : |BD| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ AD – биссектриса угла $\angle CAB$

Тогда дуги CE и BE в Ω равны

тогда EF – серединный перпендикуляр к BC, тогда EF – диаметр в Ω

$|EF| = 34$ (т.к. дуги EC и EB равны, равны и хорды EC и EB $\Rightarrow$ $\triangle EBC$ – равнобедренный $\Rightarrow$ высота в нём – серединный перпендикуляр к стороне BC)

Заметим, что $AC \perp BC$ и $EF \perp BC$ $\Rightarrow$ $ECAF$ – трапеция, вписанная в Ω $\Rightarrow$ равнобокая, ~~тогда т.к.~~

Пусть $EF \cap BC = \{Y\}$ Y – середина BC

тогда, т.к. CY – высота в трапеции,

$$|YE| = \frac{|EF| - |AC|}{2} = 2 \qquad |YC| = \frac{|BC|}{2} = 8$$

$$\Rightarrow |EC| = \sqrt{|YE|^2 + |YC|^2} = 2\sqrt{17} = |AF|,$$ т.к. трапеция равнобокая

$$\Rightarrow \angle AFE = \arccos\left(\frac{|AF|}{|FE|}\right) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{17}}{34}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right) \qquad |AE| = \sqrt{|EF|^2 - |AF|^2} = 8\sqrt{17}$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AF| = 8 \cdot 17 = 136$$

Ответ: $r = \frac{255}{16}$ $R = 17$ $\angle AFE = \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$ $S_{AEF} = 136$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right)$ по условию равно $f(x)-f(y)$, т.к.

$$f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$$

Тогда условие $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ равносильно $f(x)<f(y)$ Рассмотрим, какие значения принимает $f(x)$ на $[2\ldots 25]\cap\mathbb{N}$

$f(x)=0 \Rightarrow x=2,3,4,6,8,9,12,16,18,24$ – 10 чисел

$f(x)=1 \Rightarrow x=5,7,10,14,20,21,15,$ – 7 чисел

$f(x)=2 \Rightarrow x=11,22,25$ – 3 числа

$f(x)=3 \Rightarrow x=13$ – 1 число

$f(x)=4 \Rightarrow x=17,19$ – 2 числа

$f(x)=5 \Rightarrow x=23$ – 1 число

Всего есть 24 разных числа $\Rightarrow 24^2$ пары чисел

Для каждой пары x,y либо $f(x)=f(y)$, либо $f(x)<f(y)$ либо $f(x)>f(y)$

$\Rightarrow$ ответ $=(24^2-$ кол-во пар $x,y: f(x)=f(y))/2$

т.к. если $f(x)<f(y)$, то $f(y)>f(x)$

кол-во пар $x,y: f(x)=f(y)$ – сумма квадратов размеров выше перечисленных групп

$\Rightarrow$ ответ $= \dfrac{24^2-10^2-7^2-3^2-1^2-2^2-1^2}{2} =$

$= \dfrac{576-100-49-9-1-4-1}{2} = 206$

Ответ: 206 пар

№6

Чтобы условие выполнялось на отрезке, необходимо, чтобы оно выполнялось на границе

$4+\dfrac{4}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$

верно при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

Заметим, что выражение слева - гипербола, выражение справа - парабола, а выражение в центре - прямая.

Скажем, что прямая $f(x)=y=ax+b$ проходит через точки $(\frac{1}{4}; y_1)$ и $(1; y_2)$, тогда $4+\dfrac{4}{1-5} \leq y_1 \leq -32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3$

$3 \leq y_1 \leq 4$ и $4+\dfrac{4}{4-5} \leq y_2 \leq -32\cdot1^2+36\cdot1-3$

$0 \leq y_2 \leq 1$ Рассмотрим прямую, проходящую через $y_1=4$ и $y_2=1$ Заметим, что это максимальная прямая из возможных, то есть все остальные возможные

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

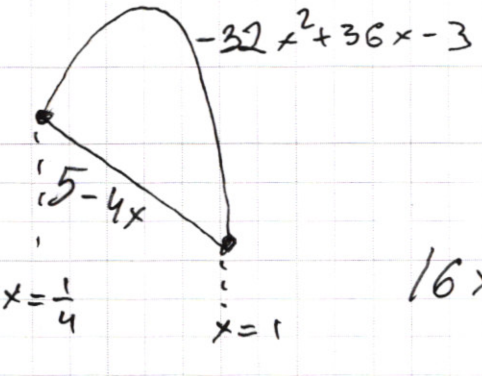
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

прямые во всех точках $(\frac{1}{4};1)$ имеют значение меньше, чем эта (т.к. лежат в одной, более нижней полуплоскости относительно неё, и пересекают её в точках $(-\infty;\frac{1}{4}]\cup[1;+\infty)$ или не пересекают вовсе.

Эта прямая имеет уравнение $5-4x=y$

Заметим, что условие $f(x)\leq -32x^2+36x-3$ выполняется, т.к. парабола выпуклая (график имеет примерно такой вид:



Докажем, что

$$4+\frac{4}{4x-5}\leq 5-4x,\text{ если } x\in[\tfrac{1}{4};1]$$

$$\Leftarrow$$

$$16x-16\geq -(4x-5)^2 \text{ при } x\in[\tfrac{1}{4};1]$$

$$\Leftarrow$$

$$16x^2-40x+25+16x-16\geq 0 \text{ при } x\in[\tfrac{1}{4};1]$$

$$\cancel{16x^2-56x+41\geq 0 \text{ при } x\in[\tfrac{1}{4};1]}$$

$$\cancel{t=4x}$$

$$\cancel{(t-7)^2-8\geq 0 \text{ при } t\in[1;4]}$$

$$16x^2-24x+9\geq 0 \text{ при } x\in[\tfrac{1}{4};1]$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$t = 4x$, тогда выражение становится

$(t-3)^2 \geq 0$ при $t \in [1; 4]$

очевидно, верно.

$\Rightarrow a = -4$ $b = 5$ подходит.

Но заметим, что при $x = \frac{3}{4}$

прямая $y = 5 - 4x$ касается гиперболы

$4 + \frac{4}{4x-5}$ (следует из) А значит,

Все остальные прямые, которые

в точке $x = \frac{3}{4}$ имеют значение

меньше, точно не подойдут.

$\Rightarrow$ единственная пара (a, b), которая

подходит — $a = -4$, $b = 5$

Ответ: $a = -4$, $b = 5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{2}{5}$

Пусть $\alpha' = 2\alpha \quad \beta' = 2\beta$

Тогда

$\sin\alpha'\cos\beta' + \sin\beta'\cos\alpha' = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha'\cdot(2\cos^2\beta' - 1) + \sin\alpha' + 2\sin\beta'\cos\beta'\cdot\cos\alpha' =$

$= \frac{2}{5} \Rightarrow 2\cos\beta'(\sin\alpha'\cos\beta' + \sin\beta'\cos\alpha') =$

$= \frac{2}{5} \Rightarrow \cancel{2\cos}\ \cos\beta'\cdot\frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

$\cos\beta' = \frac{-1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\beta' = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha'\cdot\frac{-1}{\sqrt{5}} + \cos\alpha'\cdot\frac{\pm 2}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

При $\sin\beta' = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha' - 2\cos\alpha' = 1 \Rightarrow \sin\alpha' = 1 + 2\cos\alpha'$

$\sin^2\alpha' = 1 - \cos^2\alpha' = (1+2\cos\alpha')^2$

$5\cos^2\alpha' + 4\cos\alpha' = 0 \quad \cos\alpha' = 0$ или $\cos\alpha' = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ ~~$\sin\alpha$ $\cos\alpha \neq 0$ т.к. $tg\alpha \in \mathbb{R}$~~

$\Rightarrow \sin\alpha' = \frac{-3}{5}$ ~~$\Rightarrow tg\alpha = \frac{3}{4}$, но это один вариант, а надо 3 $\Rightarrow$~~ или $\sin\alpha' = 1$

Заметим, что $tg\frac{\alpha'}{2} \equiv tg\frac{\alpha'+2\pi k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ имеем только 2 варианта для $tg\alpha$

Если ~~cos~~ $\sin\beta' = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha' + 2\cos\alpha' = 1$

$\sin\alpha' = 1 - 2\cos\alpha' \Rightarrow \cos\alpha' = \frac{4}{5}$ или $\cos\alpha' = 0$

$\Rightarrow$ ~~$tg\alpha = 0, \frac{3}{4}$ или $\frac{3}{4}$~~

$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $2\alpha = arctg\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k$

или $2\alpha = -arctg\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow tg\alpha = 1$ или $tg\alpha = \frac{3 \cdot \frac{4}{9}}{5}$ – по св-ву биссектрисы

$tg\alpha = \frac{4}{15}$ или $tg\alpha = -\frac{4}{15}$

Ответ: $tg\alpha = 1$ $tg\alpha = \frac{4}{15}$ или $tg\alpha = -\frac{4}{15}$

$\sin \alpha+\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin \alpha+2\beta + \sin\alpha = -\frac{2}{5}$

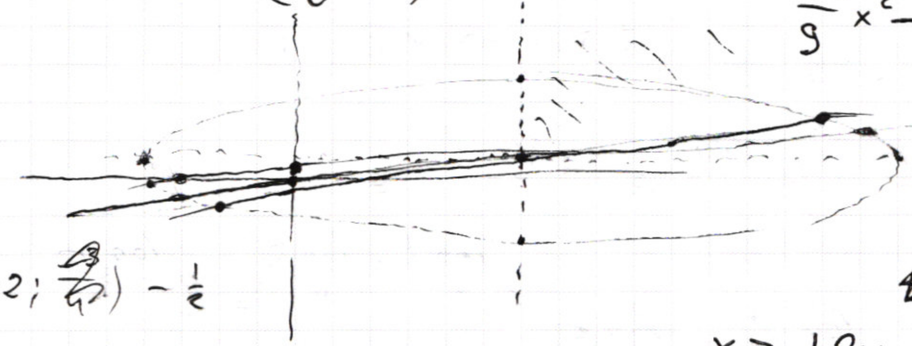
$(x-6)^2 + (\frac{x}{3}-2)^2 = 10^2$

$x^2 - 12x + 36 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 = 100$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 10^2$

$\frac{10}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 60 = 0$

$t = \frac{x}{3}$



$t^2 - 4t - 6 = 0$

$t = \pm\sqrt{10} + 2$

$(-2; \frac{3}{4}) - \frac{1}{2}$

$x \geq 12y$ $x = 3t = 6 \pm 3\sqrt{10}$

$(1-2y)(6-x)$

$(x-12y)^2 = (1-2y)(6-x)$

$6 - 12y - x + 2xy$

$2y \leq 1$

$\frac{x}{8} - \frac{1}{4} = y$

$x \leq 6$

$x^2 - 24xy + 144y^2 - 2xy + x + 12y - 6 = 0$ $2y > 1$

$x > 6$

$(x - 8y - 2)(x - 18y + 3)$ $x^2 - 26xy + 144y^2 + x + 12y - 6 = 0$

$(ax + by + c)(dx + ey + f)$

$x^2 - 18xy - 3x +$

$cf = 6$

$be = 144$ $a=1$ $d=1$

$+144y^2 - 8xy + 24y$

$ad = 1$

$18 \cdot 8 = 144$

$+2x - 36y - 6$

$(x - 8y + c)(x - 18y + d) = 0$

$x^2 - 26xy - 12y - 6 - x$

$-18c - 8f = 12$

$c + f = 1$ $8 \cdot 3$

$\left[\begin{array}{l} x - 8y - 2 = 0 \\ x - 18y + 3 = 0 \end{array}\right.$

$cf = -6$

$6y = \frac{x}{3} + 1$ $3; -2$

$\frac{x}{18} + \frac{1}{6} = y$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq \cancel{8}x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x - x^2 = t \qquad t>0 \Rightarrow x \in (0;10)$$

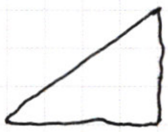
$$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} =$$

$$= 3^{\log_3 t \cdot \log_3 5} = t^{\log_3 5}$$

$$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

$$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

$$\log_3 t = p$$



$$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$$

$$3^p + 4^p \geq 5^p \qquad \ln 3 \cdot 3^p + \ln 4 \cdot 4^p \geq \ln 5 \cdot 5^p$$

$$3^x + 4^x - 5^x$$

$$\ln 3 \cdot 3^x + \ln 4 \cdot 4^x - \ln 5 \cdot 5^x$$

$$p<2$$

$$3^{2-\alpha} + 4^{2-\alpha} - 5^{2-\alpha}$$

$$\frac{3^2}{3^\alpha} + \frac{4^2}{4^\alpha} - \frac{5^2}{5^\alpha}$$

$$p \leq 2$$

$$t \in (0;9]$$

$$10x - x^2 \in (0;9] \Rightarrow \begin{cases} x \in (0;10) \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$x \in (0;1] \cup [9;10) \qquad x^2 - 10x + 9 \geq 0$$

$$(x-9)(x-1)$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

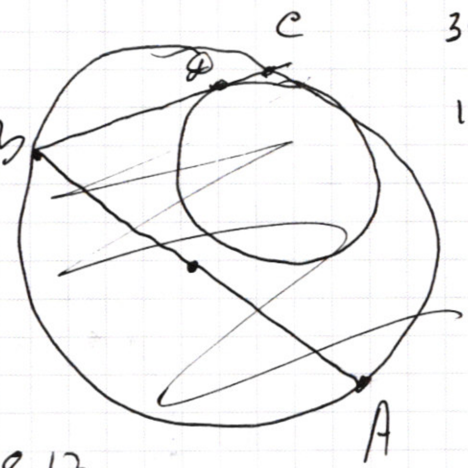
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

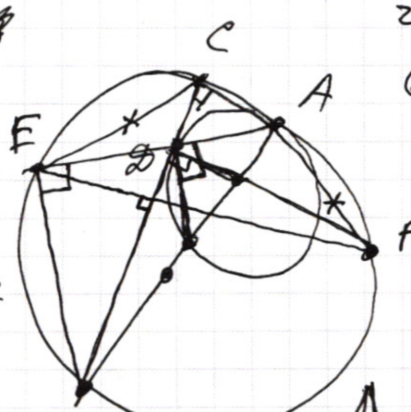


34, 16, ~~18~~

17, 8, ~~9~~

289 - 64

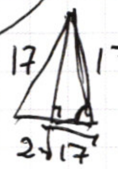
$225 = 15^2$



272

68 · 4

~~17~~ · 16



15, 8, 17

$\sqrt{\frac{17}{2} \cdot 16}$ $\frac{15}{2}$

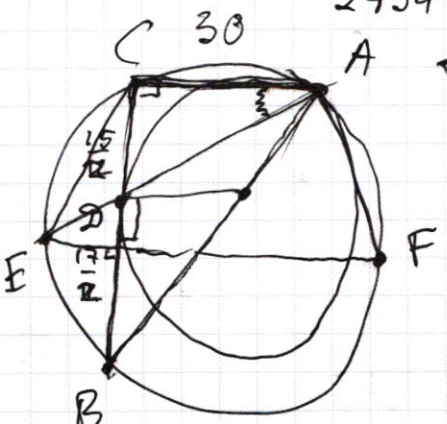
$\frac{17}{2} : D_\omega =$

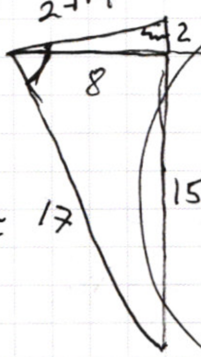
$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

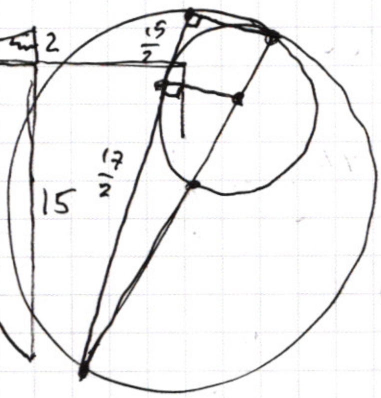
$2\sqrt{34}$

$\frac{17}{2} : D_\Omega - r_\omega =$

$16 : D_\Omega$







$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = D_\Omega \cdot (D_\Omega - D_\omega)$

$D_\Omega \cdot \frac{1}{16} D_\Omega = \frac{17^2}{4} \cdot 4$

$D_\Omega = \frac{17}{2}$

$D_\omega = \frac{15}{16} D_\Omega$

$\frac{2 r_\Omega}{16} = \frac{2 r_\Omega - r_\omega}{17}$

$\frac{17}{D_\Omega - r_\omega} = \frac{32}{D_\Omega}$

$17 r_\Omega = 32 r_\Omega - 16 r_\omega$

$\frac{D_\Omega - r_\omega}{17} = \frac{D_\Omega}{32}$

$16 r_\omega = 15 r_\Omega$

$r_\omega = \frac{15}{16} r_\Omega$

$15 D_\Omega = 32 r_\omega = 16 D_\omega$

$\frac{1}{16} D$

$\frac{D_\Omega}{4} = \frac{17}{2}$

$D_\Omega = 34$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\sin(\alpha + 2\beta)$

$\sin\alpha(\cos 2\beta) + \cancel{\cos 2\beta}\ \cos\alpha \cdot \sin 2\beta$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(6) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(4) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$\cos^2\beta \cdot \sin\alpha +$

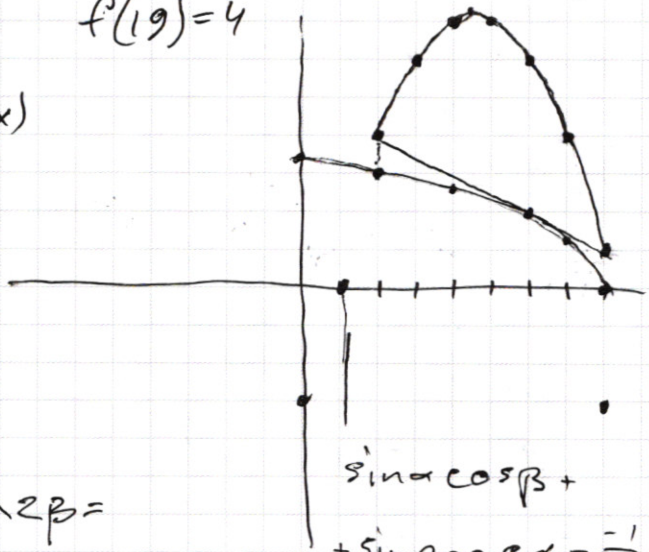
$+ \cos\alpha + \sin 2\beta = = \frac{2}{5}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$f(x) \geq 0$

$f(y) > f(x)$



$16x - 16 = 4(4x - 5) + 4$

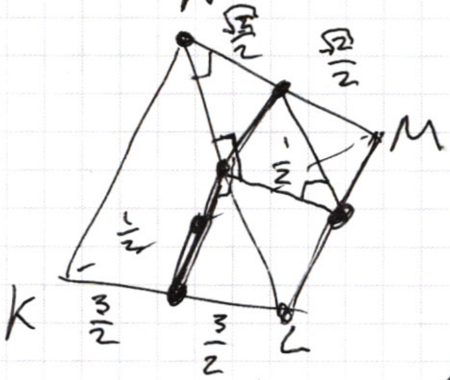
$4 + \frac{4}{4x - 5}$

$\sin 2\beta =$

$= 2\sin\beta\cos\beta$

$\sin\alpha\cos\beta +$

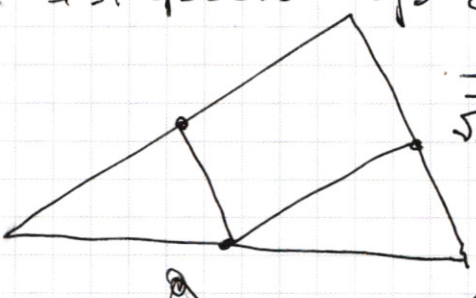
$+ \sin\beta\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}$



$\cos\beta\sin\alpha \cdot \cos\beta +$

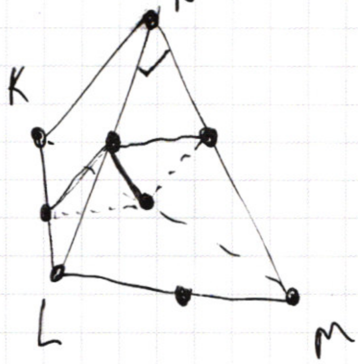
$+ \sin\beta\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot 2$

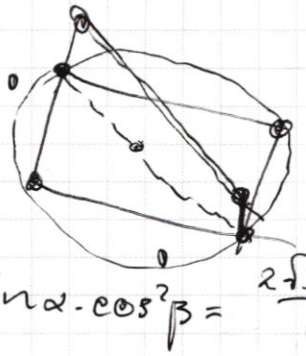
$\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos\alpha}$



$\frac{-1}{\sqrt{5}} + \cos\alpha \cdot \sin\beta\cos\beta =$

$= \frac{2}{5}$





$\sin\alpha \cdot \cos^2\beta = \frac{2\sqrt{5} - 2}{5}$

$\cos\beta = -1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)